**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2011**
©Dr. K. Rothe

# Anleitungsaufgaben zu

# Analysis II

# für Studierende der Ingenieurwissenschaften

**Aufgabe 1:**
Von einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge $a$ werden an den Ecken Quadrate mit der Seitenlänge $x$ abgeschnitten. Wie ist $x$ zu wählen, damit der Rest eine Schachtel mit möglichst großem Rauminhalt ergibt?

**Aufgabe 2:**
Für die Zweige der Asteroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ berechne man Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Monotoniebereiche, Extrema, Konvexitätsbereiche, Wendepunkte und skizziere die beschriebene Kurve.

**Aufgabe 3:**
Für die Funktion $\Phi(x) = x + e^{-x}$ zeige man, dass für alle $x, y \in [1, \infty[$ mit $x \neq y$ gilt:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| < |x - y| \,.$$

Kontrahiert $\Phi$ in $[1, \infty[$?

**Aufgabe 4:**
Gegeben sei die Gleichung

$$x = 6 - 3\sqrt[3]{x} \quad \text{für} \quad x \geq 0 \,.$$

a) Man verschaffe sich graphisch durch Zeichnen der Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = 6 - 3\sqrt[3]{x}$ einen Überblick über die Anzahl der Schnittpunkte von $f$ und $g$ und begründe anschließend auch theoretisch, warum es nur eine Lösung $x^*$ der obigen Gleichung geben kann.

b) Man gebe ein Intervall $D$ an, so dass die Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = 6 - 3\sqrt[3]{x_n}$$

für alle Startwerte aus $D$ gegen $x^*$ konvergiert.

c) Wieviele Iterationen $N$ benötigt man ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$, um den Fixpunkt $x^*$ mit einem absoluten Fehler von höchstens $10^{-3}$ zu berechnen?

d) Man berechne für das unter c) a priori bestimmte $N$ die Iterierte $x_N$ und überprüfe die Genauigkeit der Iterierten mit Hilfe der A-posteriori-Fehlerabschätzung.

**Aufgabe 5:**
Man untersuche die Funktionenfolgen

a) $f_n : [-2,2] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \dfrac{1}{1+ne^{x^2}}$ ,

b) $g_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = 1 + x^n$ ,

c) $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

**Aufgabe 6:**

a) Man bestimme für folgende Funktionenreihen den maximalen Konvergenzbereich und untersuche welche Art von Konvergenz (punktweise, gleichmäßige) vorliegt.

(i) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k \cdot x^4}{(3+x^4)^k}$

(ii) $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4\sqrt{2+3kx}}$

b) Man zeige, dass für $x \in \left]-\frac{1}{2}, \infty\right[$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(2x+k^2)(2x+k^2+2k+1)}$$

gleichmäßig gegen $h(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ konvergiert.

**Aufgabe 7:**

a) Man bestimme den Entwicklungspunkt, den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihen

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^{n+1} - 2^n} \quad , \quad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2+2x+1)^n}{\sqrt{2n-1}} \; .$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

b) Für folgende Potenzreihe bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2} (x-1)^n$$

**Aufgabe 8:**

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{7}{6-5x}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion $f$.

b) Man beweise über vollständige Induktion, dass für $k \geq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{7 \cdot 5^k \cdot k!}{(6-5x)^{k+1}} \, .$$

c) Man berechne die Taylorreihe von $f$ allgemein zum Entwicklungspunkt $x_0 \neq \dfrac{6}{5}$ und bestimme den Konvergenzradius.

d) Welche Konvergenzintervalle ergeben sich für $x_0 = 1$ und $x_0 = 2$? Liegt Konvergenz in den Randpunkten vor?

**Aufgabe 9:**

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{2}{3x+4}$ definierte Funktion.

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für $f$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1 + i$ und bestimme deren Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von $f$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.

c) Konvergiert die Potenzreihe aus b) in den Randpunkten des Konvergenzintervalls?

**Aufgabe 10:**

a) Man berechne die Ableitung von $\arctan x$.

b) Man zeige, dass für $k \geq 0$ gilt: $\displaystyle \binom{-1}{k} = (-1)^k \, .$

c) Man berechne die Potenzreihe von $\arctan x$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

d) Man bestimme den Konvergenzradius zu der unter c) berechneten Potenzreihe und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten.

**Aufgabe 11:**

a) Von der Funktion $\sinh(x)$ sind nur die Stützstellen

| $x_i$ | 0 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|
| $\sinh x_i$ | 0 | 10 | 201.7 |

gegeben. Man berechne das zugehörige Interpolationspolynom $p_2(x)$.

b) Man berechne $p_2(4)$ als Näherungswert für $\sinh(4)$. Wie groß ist der Fehler höchstens? Man berechne zum Vergleich den tatsächlichen Fehler.

c) Man zeichne $\sinh(x)$ und $p_2(x)$ im Intervall $[0, 6.5]$.

d) Zusätzlich sei noch $\sinh(5) = 74.2$ gegeben. Mit dieser Information führe man a) bis c) bzgl. $p_3(x)$ durch.

**Aufgabe 12:**
Man berechne den natürlichen kubischen Interpolationsspline $s(x)$ zu folgenden Daten

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 0 | 2 | 3 | 4 |
| $f_k$ | 4 | 0 | 1 | 4 . |

Diese Daten wurden durch die Funktion $f(x) = (x-2)^2$ erzeugt. Man zeichne die Funktionsgraphen von $s(x)$ und $f(x)$. Warum kann $s(x)$ nicht mit $f(x)$ übereinstimmen?

**Aufgabe 13:**
Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 4$.

a) Man berechne für die äquidistante Zerlegung

$$Z_n = \left\{-1, \frac{2-n}{n}, \frac{4-n}{n}, \frac{6-n}{n}, \cdots, 1\right\}$$

des Intervalls $I = [-1, 1]$ Unter- und Obersumme, also $U_f(Z_n)$ und $O_f(Z_n)$, zu $f$.

b) Man weise die Integrierbarkeit von $f$ nach.

c) Man berechne $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x + 4\, dx$ über den Hauptsatz.

**Aufgabe 14:**
Man berechne

a) den Flächeninhalt $F_1$, der durch die Teilmenge $M_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^3 \le y \le \sqrt{x}\right\}$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben ist, sowie

b) den Flächeninhalt $F_2$, der Menge des $\mathbb{R}^2$, die von den Graphen der Funktionen $f$ und $g$ mit $f(x) = \cos x$ und $g(x) = 1 - 2x/\pi$ eingeschlossen wird.

**Aufgabe 15:**
Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

$$\text{a)} \int \frac{z^4 - z^2 - 3}{\sqrt[3]{z}}\,dz\,, \qquad \text{b)} \int \frac{e^{3z}}{e^{3z}+4}\,dz\,, \qquad \text{c)} \int (t-1)\cos 2t\,dt\,,$$

$$\text{d)} \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx, \qquad \text{e)} \int \cos t \sinh t\,dt\,, \qquad \text{f)} \int \cos y \sin y\,dy\,.$$

**Aufgabe 16:**
Man berechne die folgenden bestimmten Integrale

$$\text{a)} \int_0^1 u^3 e^u\,du\,, \qquad \text{b)} \int_1^2 \frac{\ln s}{s^2}\,ds\,, \qquad \text{c)} \int_2^3 x^2\sqrt{x-2}\,dx\,,$$

$$\text{d)} \int_0^{\ln 2} \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\,dt\,, \qquad \text{e)} \int_{-1/3}^{0} \frac{x^3+x^2}{3x+2}\,dx.$$

**Aufgabe 17:**
Man berechne die folgenden Integrale

$$\text{a)} \int \frac{-5x^4 + 34x^3 - 70x^2 + 47x - 27}{x^3 - 6x^2 + 9x}\,dx\,,$$

$$\text{b)} \int \frac{-8x^2 - 8x + 6}{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}\,dx\,,$$

$$\text{c)} \int \frac{1}{(4x^2+25)^2}\,dx\,.$$

**Aufgabe 18:**
Man berechne die folgenden Integrale

$$\text{a)} \int \frac{e^x}{4e^{2x}+9}\,dx\,,$$

$$\text{b)} \int \frac{dx}{8\sin x + 6\cos x}\,.$$

**Aufgabe 19:**
Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

a) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$ ,

b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$ ,

c) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x-\sin x}\,dx$ .

**Aufgabe 20:**
Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. deren Cauchyschen Hauptwerte, falls diese existieren

a) $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{|x-1|}}$ ,

b) $\displaystyle\int\limits_{-4}^4 \frac{dx}{(x+3)^5}$ ,

c) $\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{dx}{(x-2)^4}$ .

**Aufgabe 21:**
Gegeben sei die Funktion

$$f \;:\; [0,\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sin x\,.$$

a) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von $f$ um die $x-$Achse rotiert.

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von $f$ um die $y-$Achse rotiert.

c) Man berechne die Mantelfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von $f$ um die $x-$Achse rotiert.

d) Man zeichne die Mantelfächen der Rotationskörper aus a) und b).

*Bemerkung:* Die Integrale sollen elementar, d.h. ohne Formelsammlung gelöst werden.

**Aufgabe 22:**

a) Man berechne die Bogenlänge der Kurve $\mathbf{c} : [0,2] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} .$$

Man zeichne die Kurve.

b) Man berechne den Flächeninhalt der von der gewöhnlichen Hypozykloide

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 8\cos t + \cos(8t) \\ 8\sin t - \sin(8t) \end{pmatrix}$$

umschlossenen Fläche. Man zeichne die Kurve.

**Aufgabe 23:**
Durch

$$r(\varphi) = \sqrt{1 + \sin(7\varphi)}$$

ist eine siebenblättrige Kurve in Polarkoordinaten gegeben.

a) Man zeichne die Kurve.

b) Man berechne alle Tangentenvektoren, für die $r(\varphi)$ maximal wird.

c) Man berechne die überstrichene Fläche.

**Aufgabe 24:**
Gegeben sei ein Draht mit konstanter Dichtefunktion $\rho$. Die Form des Drahtes werde beschrieben durch die Kurve $\mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2/2 \end{pmatrix} .$$

Man zeichne die Form des Drahtes, berechne seine Gesamtmasse, bestimme seinen Schwerpunkt und ermittle sein Trägheitsmoment bzgl. der $y$-Achse.

**Aufgabe 25:**
Gegeben sei die Funktion $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - 2|x|$ .

a) Man zeichne die 1-periodische direkte Fortsetzung der Funktion $f$.

b) Man berechne die Fourier-Reihe dieser 1-periodischen Fortsetzung.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_5(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

**Aufgabe 26:**
Gegeben sei die $4\pi$-periodische direkte Fortsetzung der Funktion $f$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2\pi \le x \le 0 \quad , \\ (x-\pi)^2 - \pi^2 & , \quad 0 \le x \le 2\pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die $4\pi$-periodische direkte Fortsetzung der Funktion im Intervall $[-4\pi, 6\pi]$.

b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Aufgabe 27:**
Gegeben sei die Funktion $f \; : \; [0, \pi[ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ .

a) Man zeichne die gerade ($2\pi$-periodische) Fortsetzung der Funktion im Intervall $[-3\pi, 5\pi]$.

b) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe dieser geraden Fortsetzung.

c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten dieser Fourier-Reihe an.

d) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_4(x)$ der berechneten Fourier-Reihe.

**Aufgabe 28:**

a) Man bestimme mit Hilfe des Fourierreihenansatzes

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = y(x) + \cos(x)$.

b) Man bestimme die Fourier-Koeffizienten der folgenden $2\pi$-periodischen Funktion:

$$\sin(2x)\sin(3x) \; .$$

*Tipp:* Die Theoreme für trigonometrische Funktionen führen hier zu Vereinfachungen.