Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2009**

Anleitungsaufgaben zu

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Von einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge a werden an den Ecken Quadrate mit der Seitenlänge x abgeschnitten. Wie ist x zu wählen, damit der Rest eine Schachtel mit möglichst großem Rauminhalt ergibt?

Aufgabe 2:
Für die Zweige der Asteroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ berechne man Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Monotoniebereiche, Extrema, Konvexitätsbereiche, Wendepunkte und skizziere die beschriebene Kurve

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Gleichung

$$x = \frac{1}{(x+3)^2}\,.$$

a) Man verschaffe sich graphisch durch Zeichnen der Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ einen Überblick über die Anzahl der Schnittpunkte von f und g und begründe anschließend auch theoretisch, warum es nur eine Lösung x^* der obigen Gleichung geben kann.

b) Man gebe ein Intervall D an, so dass die Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = \frac{1}{(x_n+3)^2}$$

für alle Startwerte aus D gegen x^* konvergiert.

c) Wieviele Iterationen N benötigt man ausgehend vom Startwert $x_0 = 0.25$, um den Fixpunkt x^* mit einem absoluten Fehler von höchstens 10^{-5} zu berechnen?

d) Man berechne für das unter c) a priori bestimmte N die Iterierte x_N und überprüfe die Genauigkeit der Iterierten mit Hilfe der A-posteriori-Fehlerabschätzung.

Aufgabe 4:
Man untersuche die Funktionenfolgen

a) $f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \sin^n x$,

b) $g_n : [0, 10] \to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \dfrac{nx^2}{3 + (nx)^2}$,

c) $h_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad h_n(x) = \dfrac{nx}{2 + (nx)^2}$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 5:

a) Man bestimme für folgende Funktionenreihen den maximalen Konvergenzbereich und untersuche welche Art von Konvergenz (punktweise, gleichmäßige) vorliegt.

(i) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k \cdot x^4}{(3 + x^4)^k}$

(ii) $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)^4 \sqrt{2 + 3kx}}$

b) Man zeige, dass für $x \in \left] -\frac{1}{2}, \infty \right[$

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(2x + k^2)(2x + k^2 + 2k + 1)}$$

gleichmäßig gegen $h(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ konvergiert.

Aufgabe 6:
Man bestimme die Konvergenzradien und Konvergenzintervalle der folgenden Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^{n+1} - 2^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 + 2x + 1)^n}{\sqrt{2n - 1}}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{n^2} (x - 1)^n$.

und untersuche für a) und b) das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{7}{6-5x}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man beweise über vollständige Induktion, dass für $k \geq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{7 \cdot 5^k \cdot k!}{(6-5x)^{k+1}} \,.$$

c) Man berechne die Taylorreihe von f allgemein zum Entwicklungspunkt $x_0 \neq \dfrac{6}{5}$ und bestimme den Konvergenzradius.

d) Welche Konvergenzintervalle ergeben sich für $x_0 = 1$ und $x_0 = 2$? Liegt Konvergenz in den Randpunkten vor?

Aufgabe 8:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{7}{6-5x}$ definierte Funktion.

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für f zum Entwicklungspunkt $z_0 = i$ und bestimme deren Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.

c) Konvergiert die Potenzreihe aus b) in den Randpunkten des Konvergenzintervalls?

Aufgabe 9:

a) Man beweise die Funktionalgleichungen der Hyperbelfunktionen:

(i) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$,

(ii) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

b) Man beweise: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

c) Man zeige, die folgende Identität für $n \in \mathbb{N}$:

$$(\sinh(x) + \cosh(x))^n = \sinh(nx) + \cosh(nx).$$

Aufgabe 10:

a) Man berechne die Ableitung von $\arctan x$.

b) Man zeige, dass für $k \geq 0$ gilt: $\binom{-1}{k} = (-1)^k$.

c) Man berechne die Potenzreihe von $\arctan x$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

d) Man bestimme den Konvergenzradius zu der unter c) berechneten Potenzreihe und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten.

Aufgabe 11:

a) Von der Funktion $\cos(x)$ erinnert man nur die Stützstellen

x_i	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$\cos x_i$	0	1	0 .

Man berechne das zugehörige Interpolationspolynom $p_2(x)$.

b) Man berechne $p_2(\pi/5)$ als Näherungswert für $\cos(\pi/5)$. Wie groß ist der Fehler höchstens? (Man berechne zum Vergleich den tatsächlichen Fehler.)

c) Man zeichne $\cos(x)$ und $p_2(x)$ im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$.

d) Nun erinnert man sich noch, dass $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ gilt. Mit dieser Information führe man a) bis c) bzgl. $p_3(x)$ durch.

Aufgabe 12:
Man berechne den natürlichen kubischen Interpolationsspline $s(x)$ zu folgenden Daten

k	0	1	2	3
x_k	0	2	3	4
f_k	4	0	1	4 .

Diese Daten wurden durch die Funktion $f(x) = (x-2)^2$ erzeugt. Man zeichne die Funktionsgraphen von $s(x)$ und $f(x)$. Warum kann $s(x)$ nicht mit $f(x)$ übereinstimmen?

Aufgabe 13:
Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 4$.

a) Man berechne für die äquidistante Zerlegung

$$Z_n = \left\{-1, \frac{2-n}{n}, \frac{4-n}{n}, \frac{6-n}{n}, \cdots, 1\right\}$$

des Intervalls $I = [-1, 1]$ Unter- und Obersumme, also $U_f(Z_n)$ und $O_f(Z_n)$, zu f.

b) Man weise die Integrierbarkeit von f nach.

c) Man berechne $\int\limits_{-1}^{1} 3x + 4\, dx$ über den Hauptsatz.

Aufgabe 14:
Man berechne

a) den Flächeninhalt F_1, der durch die Teilmenge $M_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben ist, sowie

b) den Flächeninhalt F_2, der Menge des $\mathbb{R}^2$, die von den Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \cos x$ und $g(x) = 1 - 2x/\pi$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 15:
Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

$$\text{a)} \int \frac{z^4 - z^2 - 3}{\sqrt[3]{z}}\, dz\,, \qquad \text{b)} \int \frac{e^{3z}}{e^{3z} + 4}\, dz\,, \qquad \text{c)} \int (t-1)\cos 2t\, dt\,,$$

$$\text{d)} \int \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx, \qquad \text{e)} \int \cos t \sinh t\, dt\,, \qquad \text{f)} \int \cos y \sin y\, dy\,.$$

Aufgabe 16:
Man berechne die folgenden bestimmten Integrale

$$\text{a)} \int\limits_0^1 u^3 e^u\, du\,, \qquad \text{b)} \int\limits_1^2 \frac{\ln s}{s^2}\, ds\,, \qquad \text{c)} \int\limits_2^3 x^2\sqrt{x-2}\, dx\,,$$

$$\text{d)} \int\limits_0^{\ln 2} \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\, dt\,, \qquad \text{e)} \int\limits_{-1/3}^{0} \frac{x^3 + x^2}{3x + 2}\, dx.$$

Aufgabe 17:
Man berechne die folgenden Integrale

$$\text{a)} \int \frac{-5x^4 + 34x^3 - 70x^2 + 47x - 27}{x^3 - 6x^2 + 9x}\, dx\,,$$

$$\text{b)} \int \frac{-8x^2 - 8x + 6}{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}\, dx\,,$$

$$\text{c)} \int \frac{1}{(4x^2 + 25)^2}\, dx\,.$$

Aufgabe 18:
Man berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{4e^{2x}+9}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{8\sin x + 6\cos x}$.

Aufgabe 19:
Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x-\sin x}\,dx$.

Aufgabe 20:
Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. deren Cauchyschen Hauptwerte, falls diese existieren

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{|x-1|}}$,

b) $\displaystyle\int_{-4}^4 \frac{dx}{(x+3)^5}$,

c) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^4}$.

Aufgabe 21:
Gegeben sei die Funktion

$$f \;:\; [0,\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sin x \,.$$

a) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $y-$Achse rotiert.

c) Man berechne die Mantelfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

d) Man zeichne die Mantelfächen der Rotationskörper aus a) und b).

Bemerkung: Die Integrale sollen elementar, d.h. ohne Formelsammlung gelöst werden.

Aufgabe 22:

a) Man berechne die Bogenlänge der Kurve $\mathbf{c} : [0,2] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} .$$

Man zeichne die Kurve.

b) Man berechne den Flächeninhalt der von der gewöhnlichen Hypozykloide

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 8\cos t + \cos(8t) \\ 8\sin t - \sin(8t) \end{pmatrix}$$

umschlossenen Fläche. Man zeichne die Kurve.

Aufgabe 23:
Durch

$$r(\varphi) = \sqrt{1 + \sin(7\varphi)}$$

ist eine siebenblättrige Kurve in Polarkoordinaten gegeben.

a) Man zeichne die Kurve.

b) Man berechne alle Tangentenvektoren, für die $r(\varphi)$ maximal wird.

c) Man berechne die überstrichene Fläche.

Aufgabe 24:
Gegeben sei ein Draht mit konstanter Dichtefunktion ρ. Die Form des Drahtes werde beschrieben durch die Kurve $\mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2/2 \end{pmatrix} .$$

Man zeichne die Form des Drahtes, berechne seine Gesamtmasse, bestimme seinen Schwerpunkt und ermittle sein Trägheitsmoment bzgl. der y-Achse.

Aufgabe 25
Gegeben sei die Funktion $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - 2|x|$.

a) Man zeichne die 1-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f.

b) Man berechne die Fourier-Reihe dieser 1-periodischen Fortsetzung.

c) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Aufgabe 26
Gegeben sei die 4π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2\pi \le x \le 0 \quad , \\ (x-\pi)^2 - \pi^2 & , \quad 0 \le x \le 2\pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die 4π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion im Intervall $[-4\pi, 6\pi]$.

b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \dots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Aufgabe 27
Gegeben sei die Funktion $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$.

a) Man zeichne die ungerade (2-periodische) Fortsetzung der Funktion f im Intervall $[-2, 2]$.

b) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe dieser ungeraden Fortsetzung.

c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten der Reihe aus b) an und

d) Man zeichne f, sowie die Partialsummen $S_{2m-1}(x)$ für $m = 1, \dots, 7$ der berechneten Fourier-Reihe im Intervall $[-1, 1]$.

Aufgabe 28

a) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten der 1-periodischen direkten Fortsetzung für folgende Funktionen an:

(i) $$g_1(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad -\frac{1}{2} < x < 0 \\ -2 & ; \quad 0 < x < \frac{1}{2} \, , \end{cases}$$

(ii) $g_2(x) = \begin{cases} -2 & ; \quad -\dfrac{1}{2} < x < 0 \\ 2 & ; \quad 0 < x < \dfrac{1}{2}, \end{cases}$

(iii) $g_3(x) = \begin{cases} -2 & ; \quad -\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{4} \\ 2 & ; \quad \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Dabei verwende man das Ergebnis aus Aufgabe 25 und die Rechenregeln über Fourier-Reihen für die Ableitung, Linearität und Verschiebung.

b) Man bestimme die Fourier-Koeffizienten der folgenden 2π-periodischen Funktion:

$$\cos^4(x/2) \sin x .$$

Tipp: Die Theoreme für trigonometrische Funktionen führen hier zu Vereinfachungen.