Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2007**

Anleitungsaufgaben zu

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Am Morgen um 6 Uhr macht ein Wanderer sich auf den Weg, eine hoch in den Bergen gelegene Hütte zu erreichen. Obwohl er einige Pausen einlegt, sitzt er bereits um 12 Uhr in der Stube dieser Hütte bei einer wohlverdienten Suppe.

Am Morgen des darauf folgenden Tages beginnt er - wiederum um 6 Uhr - den Abstieg ins Tal. Dabei wählt er genau den selben Weg wie beim Aufstieg. Während der einsamen Wanderung fragt er sich nun, ob es wohl einen Ort auf dem Weg gibt, den er am Tag zuvor zum selben Zeitpunkt passiert hat.

Wie lautet die Antwort?

Aufgabe 2:
Gegeben sei eine Kugel vom Radius R. Wie groß ist das maximale Volumen eines der Kugel einbeschriebenen Zylinders?

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Gleichung

$$x = 6 - 3\sqrt[3]{x} \quad \text{für} \quad x \geq 0\,.$$

a) Man verschaffe sich graphisch durch Zeichnen der Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = 6-3\sqrt[3]{x}$ einen Überblick über die Anzahl der Schnittpunkte von f und g und begründe anschließend auch theoretisch, warum es nur eine Lösung x^* der obigen Gleichung geben kann.

b) Man gebe ein Intervall D an, so dass die Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = 6 - 3\sqrt[3]{x_n}$$

für alle Startwerte aus D gegen x^* konvergiert.

c) Wieviele Iterationen N benötigt man ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$, um den Fixpunkt x^* mit einem absoluten Fehler von höchstens 10^{-3} zu berechnen?

d) Man berechne für das unter c) a priori bestimmte N die Iterierte x_N und überprüfe die Genauigkeit der Iterierten mit Hilfe der A-posteriori-Fehlerabschätzung.

Aufgabe 4:
Man untersuche die Funktionenfolgen

a) $f_n : [0,\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx},$

b) $g_n : [0,2] \to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \dfrac{nx}{e^{nx}},$

c) $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad h_n(x) = 1-(1-x)^n$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 5:

a) Gegeben seien die folgenden Funktionenreihen

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x^3-1)(2-x^3)^k\,, \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}\,.$$

Man bestimme den maximalen Konvergenzbereich D und untersuche die Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in D.

b) Man zeige, dass für $x \in]0,\infty[$

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{(x+k)(x+k+2)}$$

gleichmäßig gegen $h(x) = \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$ konvergiert.

Aufgabe 6:
Man bestimme die Konvergenzradien und Konvergenzintervalle der folgenden Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^{n+1}-2^n},$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+2x+1)^n}{\sqrt{2n-1}},$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}(x-1)^n.$

und untersuche für a) und b) das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

Aufgabe 7:
Gegeben sei die durch $\quad f(x) = \dfrac{2}{3x+4} \quad$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man berechne die Taylorreihe von f allgemein zum Entwicklungspunkt $x_0 \neq -4/3$ und bestimme den Konvergenzradius.

c) Welche Konvergenzintervalle ergeben sich für $x_0 = \pm 1$?

d) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1 + i$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 8:

Gegeben sei die durch $\quad f(x) = \dfrac{2}{3x+4} \quad$ definierte Funktion.

a) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.

b) Konvergiert die Potenreihe aus a) in den Randpunkten des Konvergenzintervalls?

Aufgabe 9:

a) Man berechne die Ableitung von $\arctan x$.

b) Man zeige, dass für $k \geq 0$ gilt: $\quad \begin{pmatrix} -1 \\ k \end{pmatrix} = (-1)^k$.

c) Man berechne die Potenzreihe von $\arctan x$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

d) Man bestimme den Konvergenzradius zu der unter c) berechneten Potenzreihe und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten.

Aufgabe 10:

Gegeben sei $\quad y(t) = \sqrt{e^{-4t} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{t}{2}}$. $\quad$ Man bestätige die Gültigkeit der Differentialgleichung

$$y(t) \cdot y'(t) + 2y^2(t) + t = 0 \, .$$

Aufgabe 11:

a) Von der Funktion $\sinh(x)$ sind nur die Stützstellen

x_i	0	3	6
$\sinh x_i$	0	10	201.7 .

gegeben. Man berechne das zugehörige Interpolationspolynom $p_2(x)$.

b) Man berechne $p_2(4)$ als Näherungswert für $\sinh(4)$. Wie groß ist der Fehler höchstens? (Man berechne zum Vergleich den tatsächlichen Fehler.)

c) Man zeichne $\sinh(x)$ und $p_2(x)$ im Intervall $[0, 6.5]$.

d) Zusätzlich sei noch $\sinh(5) = 74.2$ gegeben. Mit dieser Information führe man a) bis c) bzgl. $p_3(x)$ durch.

Aufgabe 12:
Man berechne zur Funktion $f(x) = x^3$ den natürlichen kubischen Interpolationsspline $s(x)$ zu den Knoten $x_j = j$ für $j = 0, 1, 2, 3$ und zeichne die Funktionsgraphen von $s(x)$ und $f(x)$. Warum kann $s(x)$ nicht mit $f(x)$ übereinstimmen?

Aufgabe 13:
Gegeben sei die Funktion $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5 - 2x$.

a) Man berechne für die äquidistante Zerlegung

$$Z_n = \left\{1, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \cdots, 2\right\}$$

des Intervalls $I = [1, 2]$ Unter- und Obersumme zu f.

b) Man weise die Integrierbarkeit von f nach.

c) Man berechne $\int\limits_1^2 5 - 2x\,dx$ über den Hauptsatz.

Aufgabe 14:
Man berechne den Flächeninhalt F der durch

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - 1 \le y \le 1 - x^2\right\}$$

gegebenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und zeichne M.

Aufgabe 15:
Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^3 + x + 1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$, b) $\displaystyle\int \tan x\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}\,dx$, e) $\displaystyle\int e^x \cosh x\,dx$, f) $\displaystyle\int x \sin x\,dx$.

Aufgabe 16:
Man berechne die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int\limits_0^4 x\sqrt{2x + 1}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{4+2x-7x^2-14x^3}{2x+1}\,dx$.

Aufgabe 17:
Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{8x^3-3x^2+40x-7}{x^2+5}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{-17x^3+8x^2+67x-8}{x^4-2x^3-2x^2+6x+5}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx$.

Aufgabe 18:
Man berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+3\cos x}$,

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$.

Aufgabe 19:
Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x-1}{x^3+1}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x^6+4x^2+11}}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+1)}\,dx$.

Aufgabe 20:
Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. deren Cauchyschen Hauptwerte, falls diese existieren

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|}}$,

b) $\displaystyle\int_{-1}^{7} \frac{dx}{(x-5)^3}$,

c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+1)^2}$.

Aufgabe 21:
Gegeben sei die Funktion

$$f \;:\; [0,2] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^3\,.$$

a) Man berechne das Volumen und die Oberfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die x-Achse rotiert und skizziere den Rotationskörper.

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die y-Achse rotiert und skizziere den Rotationskörper.

Aufgabe 22:

a) Man zeichne eine der Schraubenlinien $\mathbf{c}_k : [0, k\pi] \to \mathbb{R}^3\,,\; k \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbf{c}_k(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t/k \end{pmatrix}$$

und berechne die Bogenlänge von $\mathbf{c}_k$.

b) Man zeichne das cartesische Blatt $\mathbf{c} : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{t^3+1} \\ \dfrac{t^2}{t^3+1} \end{pmatrix}$$

und berechne den Flächeninhalt der im 1. Quadranten umschlossenen Fläche.

Aufgabe 23:
Durch

$$r(\varphi) = 1/\varphi$$

ist eine hyperbolische Spirale in Polarkoordinaten gegeben.

a) Man zeichne die Kurve mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezplot'.

b) Man berechne den Tangentenvektor der Kurve für $\varphi = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$.

c) Man berechne die von der Spirale für $\varphi \in [2k\pi, (2k+2)\pi]$ überstrichene Fläche mit $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 24:

a) Man zeige, dass sich die Krümmung κ der Kurve $\mathbf{c}$ in der Parametrisierung $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^T$ berechnen lässt durch

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|}{\left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right)^{3/2}} .$$

b) Für $t > 0$ sei die Hyperbel gegeben:

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix} .$$

(i) Man zeichne die Kurve.

(ii) Man berechne $\kappa(t)$ und $\lim\limits_{t\to 0} \kappa(t)$.

(iii) Durch $\mathbf{c}(t)$ mit $1/2 \le t \le 2$ werde ein Draht parametrisiert mit der Massendichte $\rho(x, y) = x/\sqrt{1 + y^4}$. Man berechne die Gesamtmasse des Drahtes.

Aufgabe 25
Gegeben sei die 4-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & , \quad -2 \le x \le 0 \quad , \\ x(2-x) & , \quad 0 \le x \le 2 \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Intervall $[-2, 2]$,

b) berechne ihre Fourier-Reihe und

c) zeichne die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$ im Intervall $[-2, 2]$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

Aufgabe 26
Gegeben sei die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & , \quad -\pi \le x \le 0 \quad , \\ 0 & , \quad 0 \le x \le \pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Intervall $[-\pi, 4\pi]$ und

b) berechne ihre Fourier-Reihe.

c) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 27

Gegeben sei die Funktion $f\,:\,[0,1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$.

a) Man zeichne die ungerade (2-periodische) Fortsetzung der Funktion f im Intervall $[-2,2]$ und

b) berechne die komplexe Fourier-Reihe dieser ungeraden Fortsetzung.

c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten der Reihe aus b) an und

d) zeichne f, sowie $S_m(x)$ für $m = 1,3,5,7,9,11,13$ im Intervall $[-1,1]$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

Aufgabe 28

Man berechne das bestimmte Integral $\displaystyle\int_1^2 \ln x\, dx$ näherungsweise mit Hilfe

a) der Trapezregel,

b) der Simpson-Regel,

c) der Trapezsumme ($n = 4, 10, 100, 1000$ Intervalle) und

d) der Simpson-Summe ($n = 4, 10, 100, 1000$ Intervalle).

Die Auswertung der Quadraturformeln soll dabei über ein MATLAB-Programm erfolgen.

Anschließend schätze man den entstehenden Fehler jeweils nach oben ab und vergleiche die Abschätzung mit dem tatsächlichen Fehler.