Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2005**
©Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Gegeben sei eine Kugel vom Radius R. Wie groß ist das maximale Volumen eines der Kugel einbeschriebenen Zylinders?

Aufgabe 2:

Für die Zweige der Asteroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ berechne man Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Monotoniebereiche, Extrema, Konvexitätsbereiche, Wendepunkte und skizziere die beschriebene Kurve.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Gleichung

$$x = \frac{1}{(x+3)^2} .$$

a) Man verschaffe sich graphisch durch Zeichnen der Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ einen Überblick über die Anzahl der Schnittpunkte von f und g und begründe anschließend auch theoretisch, warum es nur eine Lösung x^* der obigen Gleichung geben kann.

b) Man gebe ein Intervall D an, so dass die Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = \frac{1}{(x_n+3)^2}$$

für alle Startwerte aus D gegen x^* konvergiert.

c) Wieviele Iterationen N benötigt man ausgehend vom Startwert $x_0 = 0.25$, um den Fixpunkt x^* mit einem absoluten Fehler von höchstens 10^{-5} zu berechnen?

d) Man berechne für das unter c) a priori bestimmte N die Iterierte x_N und überprüfe die Genauigkeit der Iterierten mit Hilfe der A-posteriori-Fehlerabschätzung.

Aufgabe 4:

Man untersuche die Funktionenfolgen

a) $f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \sin^n x$,

b) $g_n : [0, 10] \to \mathbb{R}, \qquad h_n(x) = \dfrac{nx^2}{3 + (nx)^2}$,

c) $h_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \dfrac{nx}{2 + (nx)^2}$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 5:

a) Gegeben seien die folgenden Funktionenreihen

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^3 - 1)(2 - x^3)^k , \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3 (x^{2k} + 1)} .$$

Man bestimme den maximalen Konvergenzbereich D und untersuche die Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in D.

b) Man zeige, dass für $x \in]0, \infty[$

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(x+k)(x+k+2)}$$

gleichmäßig gegen $h(x) = \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$ konvergiert.

Aufgabe 6:

Man bestimme die Konvergenzradien und Konvergenzintervalle der folgenden Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^{n+1} - 2^n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2 + 2x + 1)^n}{\sqrt{2n - 1}}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{n^2} (x - 1)^n$.

und untersuche für a) und b) das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{2}{3x + 4}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man berechne die Taylorreihe von f allgemein zum Entwicklungspunkt $x_0 \neq -4/3$ und bestimme den Konvergenzradius.

c) Welche Konvergenzintervalle ergeben sich für $x_0 = \pm 1$?

d) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1 + i$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 8:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{2}{3x+4}$ definierte Funktion.

a) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.

b) Konvergiert die Potenreihe aus a) in den Randpunkten des Konvergenzintervalls?

Aufgabe 9:

a) Man berechne die Ableitung von $\arctan x$.

b) Man zeige, dass für $k \geq 0$ gilt: $\begin{pmatrix} -1 \\ k \end{pmatrix} = (-1)^k$.

c) Man berechne die Potenzreihe von $\arctan x$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

d) Man bestimme den Konvergenzradius zu der unter c) berechneten Potenzreihe und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten.

Aufgabe 10:

Gegeben sei $y(t) = \sqrt{e^{-4t} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{t}{2}}$. Man bestätige die Gültigkeit der Differentialgleichung

$$y(t) \cdot y'(t) + 2y^2(t) + t = 0 .$$

Aufgabe 11:

a) Von der Funktion $g(x) = \ln x$ seien nur die Stützstellen

x_i	0.5	1	2
$\ln x_i$	-0.693	0	0.693

bekannt. Man stelle das Interpolationspolynom p niedrigsten Grades auf.

b) Man berechne $p(1.5)$ als Näherungswert für $\ln 1.5$. Wie groß ist der Fehler höchstens und wie groß mindestens?

Aufgabe 12:

Man berechne den natürlichen kubischen Interpolationsspline $s(x)$ zu folgenden Daten

k	0	1	2	3
x_k	0	2	3	4
f_k	4	0	1	4 .

Diese Daten wurden durch die Funktion $f(x) = (x-2)^2$ erzeugt. Man zeichne die Funktionsgraphen von $s(x)$ und $f(x)$. Warum kann $s(x)$ nicht mit $f(x)$ übereinstimmen?

Aufgabe 13:

Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 4$.

a) Man berechne für die äquidistante Zerlegung

$$Z_n = \left\{-1, \frac{2-n}{n}, \frac{4-n}{n}, \frac{6-n}{n}, \cdots, 1\right\}$$

des Intervalls $I = [-1, 1]$ Unter- und Obersumme zu f.

b) Man weise die Integrierbarkeit von f nach.

c) Man berechne $\displaystyle\int_1^2 3x + 4\,dx$ über den Hauptsatz.

Aufgabe 14:

Man berechne die Flächeninhalte der drei endlichen Teilflächen zwischen
$y = x^2 - 1$ und $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 15:

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^3 + x + 1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$, b) $\displaystyle\int \tan x\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$, e) $\displaystyle\int e^x \cosh x\,dx$, f) $\displaystyle\int x \sin x\,dx$.

Aufgabe 16:

Man berechne die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{4+2x-7x^2-14x^3}{2x+1}\,dx$.

Aufgabe 17:

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{8x^3-3x^2+40x-7}{x^2+5}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{-17x^3+8x^2+67x-8}{x^4-2x^3-2x^2+6x+5}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx$.

Aufgabe 18:

Man berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{4e^{2x}+9}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{4e^{4x}-6e^{2x}}{2e^{2x}-5}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+2\sin x}$,

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{8\sin x+6\cos x}$.

Aufgabe 19:

Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x-\sin x}\,dx$.

Aufgabe 20:

Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. deren Cauchyschen Hauptwerte, falls diese existieren

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{|x-1|}}$,

b) $\displaystyle\int_{-4}^4 \frac{dx}{(x+3)^5}$,

c) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^4}$.

Aufgabe 21:

Gegeben sei die Funktion

$$f \; : \; [0,2] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^3 .$$

a) Man berechne das Volumen und die Oberfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die x-Achse rotiert und skizziere den Rotationskörper.

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die y-Achse rotiert und skizziere den Rotationskörper.

Aufgabe 22:

a) Man zeichne eine der Schraubenlinien $\mathbf{c}_k : [0, k\pi] \to \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbf{c}_k(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t/k \end{pmatrix}$$

und berechne die Bogenlänge von $\mathbf{c}_k$.

b) Man zeichne das cartesische Blatt $\mathbf{c} : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{t^3+1} \\ \dfrac{t^2}{t^3+1} \end{pmatrix}$$

und berechne den Flächeninhalt der im 1. Quadranten umschlossenen Fläche.

Aufgabe 23:

Durch

$$r(\varphi) = \sqrt{\cos(2\varphi)}$$

ist die Lemniskate in Polarkoordinaten gegeben.

a) Man bestimme den Definitionsbereich $D \subset [0, 2\pi]$ und skizziere die Kurve.

b) Man berechne den Tangenteneinheitsvektor der Kurve im Punkt $(0, 0)$.

c) Man berechne die von der Lemniskate auf der rechten Halbebene überstrichene Fläche.

Aufgabe 24:

a) Man zeichne und parametrisiere die Ellipse $2x^2 + 3y^2 = 4$. Anschließend berechne man für die durch $f(x, y) = xy^2$ definierte Funktion das Kurvenintegral 1. Art von f längs der Ellipse.

b) Die Parametrisierung eines Drahtes sei durch

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0, 1]$$

gegeben. Er besitze die Massendichte $\rho(\mathbf{c}(t)) = e^{2t}$. Man zeichne den Draht und berechne seine Gesamtmasse.

Aufgabe 25

Gegeben sei die 4-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & , \quad -2 \leq x \leq 0 \quad , \\ x(2-x) & , \quad 0 \leq x \leq 2 \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Intervall $[-2, 2]$,

b) berechne ihre Fourier-Reihe und

c) zeichne die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$ im Intervall $[-2, 2]$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

Aufgabe 26

Gegeben sei die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & , \quad -\pi \leq x \leq 0 \quad , \\ 0 & , \quad 0 \leq x \leq \pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Intervall $[-\pi, 4\pi]$ und

b) berechne ihre Fourier-Reihe.

c) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 27

a) Man bestimme die Fourier-Koeffizienten der folgenden 2π-periodischen Funktionen:

(i) $\sin^2(3x)$,

(ii) $\cos^4(x/2)\sin x$,

(iii) $4\cos^3 x - 3\cos x + \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

Tipp: Die Theoreme für trigonometrische Funktionen (Produkte, Potenzen) führen hier zu Vereinfachungen.

b) Man bestimme mit Hilfe des Fourierreihenansatzes

$$y(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = y(x) + \cos(x)$.

Aufgabe 28

Gegeben sei die Funktion $f \, : \, [0,1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$.

a) Man zeichne die ungerade (2-periodische) Fortsetzung der Funktion f im Intervall $[-2,2]$ und

b) berechne die komplexe Fourier-Reihe dieser ungeraden Fortsetzung.

c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten der Reihe aus b) an und

d) zeichne f, sowie $S_m(x)$ für $m = 1,3,5,7,9,11,13$ im Intervall $[-1,1]$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.