Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2003**

Anleitungsaufgaben zu

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die in Klammern angegebenen Nummern beziehen sich auf den Aufgabenband 3 von Oberle, Rothe, Sonar

Aufgabe 1:

Gegeben sei eine Kugel vom Radius R. Wie groß ist das maximale Volumen eines der Kugel einbeschriebenen Zylinders?

Aufgabe 2:

Für die Zweige der Asteroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ berechne man Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Monotoniebereiche, Extrema, Konvexitätsbereiche, Wendepunkte und skizziere die beschriebene Kurve.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion

$$\Phi(x) = \ln(x) + 2 \,.$$

a) Man berechne einen Fixpunkt von Φ bis auf einen absoluten Fehler von 10^{-3} mit dem Fixpunktverfahren und einem geeigneten Startwert.

b) Man berechne den Fixpunkt aus a) mit Hilfe des Newton-Verfahrens unter Verwendung des gleichen Startwertes.

Aufgabe 4: (vgl. 11.1.1)

Man untersuche die Funktionenfolgen

a) $g_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \dfrac{(nx)^2}{1 + (nx)^3}$,

b) $h_n : [1, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad h_n(x) = \dfrac{(nx)^2}{1 + (nx)^3}$,

c) $k_n :]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\to \mathbb{R}, \qquad k_n(x) = x + \frac{\cos(nx)}{n^2}$,

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 5:

Gegeben seien die folgenden Funktionenreihen

a) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^3 - 1)(2 - x^3)^k$,

b) $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}$.

Man bestimme den maximalen Konvergenzbereich D und untersuche die Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in D.

Aufgabe 6: (vgl. 11.2.3)

Man bestimme die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 - 4n^3)\, z^n \quad ,$$

$$\text{b)} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{5\nu}}{(4 + (-1)^{\nu})^{3\nu}} \, ,$$

$$\text{c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{(\ln k/k)} z^k \quad .$$

Aufgabe 7:

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \frac{2}{3x+4}$$

definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man berechne die Taylorreihe von f allgemein zum Entwicklungspunkt $x_0 \neq -4/3$ und bestimme den Konvergenzradius.

c) Welche Konvergenzintervalle ergeben sich für $x_0 = \pm 1$?

d) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenreihe für f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1 + i$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 8:

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \frac{2}{3x + 4}$$

definierte Funktion (vgl. Aufgabe 7).

a) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.

b) Man begründe, warum das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 6 übereinstimmt.

c) Konvergiert die Potenreihe aus a) in den Randpunkten des Konvergenzintervalls?

Aufgabe 9: (vgl. 11.3.1)

a) Man berechne die Ableitung von $g(x) = \text{arsinh} x$.

b) Man zeige, dass für $k \geq 1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} -1/2 \\ k \end{pmatrix} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k \cdot k!} \quad .$$

c) Man berechne die Potenzreihe von g zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

d) Man bestimme den Konvergenzradius zu der unter c) berechneten Potenzreihe.

Aufgabe 10:

Gegeben seien die folgenden Potenzreihen mit $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} , \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} .$$

Man bestätige die folgenden Identitäten:

a) $\cos z = \frac{1}{2} \left(e^{iz} + e^{-iz} \right)$,

b) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad$ mit $z = x + iy$ und $x, y \in \mathbb{R}$,

c) $\cos(w + z) = \cos w \cos z - \sin w \sin z \quad$ mit $w, z \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Es gilt die Funktionalgleichung $e^{w+z} = e^w e^z$ (vgl. Lehrbuch 11.3.3).

Aufgabe 11:

Gegeben seien die komplexwertigen Funktionen ($z \in \mathbb{C}$)

$$\sinh z := \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) , \quad \cosh z := \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) , \quad \coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z} .$$

a) Man beweise: $\coth z = 1 + \dfrac{2}{e^{2z} - 1}$,

b) Mit Hilfe von a) und unter Verwendung der Potenreihe von $\dfrac{z}{e^z - 1}$ (vgl. Lehrbuch 11.2.15) berechne man die (Laurent-) Reihenentwicklung von

$$h(z) := \frac{\coth z}{z}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Welchen Singularitätstyp besitzt h in $z_0 = 0$.

Aufgabe 12: (vgl. 12.2.3)

a) Von der Funktion $g(x) = \ln x$ seien nur die Stützstellen

x_i	0.5	1	2
$\ln x_i$	-0.693	0	0.693

bekannt. Man stelle das Interpolationspolynom p niedrigsten Grades auf.

b) Man berechne $p(1.5)$ als Näherungswert für $\ln 1.5$ mit Hilfe des Newton-Polynoms.

c) Man berechne $p(1.5)$ als Näherungswert für $\ln 1.5$ mit Hilfe des Schemas von Aitken-Neville.

d) Wie groß ist der Fehler höchstens und wie groß mindestens?

Aufgabe 13: (vgl. 13.3.1)

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x+1}}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^3+x+1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,dx$, e) $\displaystyle\int (x^2+1)e^{2x}\,dx$, f) $\displaystyle\int \sin x \cos^3 x\,dx$.

Aufgabe 14:

Man berechne die Flächeninhalte der drei endlichen Teilflächen zwischen $y = x^2 - 1$ und $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 15:

Man berechne die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{4+2x-7x^2-14x^3}{2x+1}\,dx$.

Aufgabe 16:

a) Man weise die Gültigkeit der folgenden Formel beispielsweise mit partieller Integration nach:

$$\int_{t_0}^{t_1} h(t)\,dt \;=\; (t_1-t_0)h(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} (t-t_0)h'(t)\,dt\,.$$

b) Mit Hilfe von a) und unter Verwendung des Mittelwertsatzes zeige man, dass es ein $\tau \in]t_0, t_1[$ gibt mit

$$\int_{t_0}^{t_1} h(t)\,dt \;=\; (t_1-t_0)h(t_1) - h'(\tau)\frac{(t_1-t_0)^2}{2}\,.$$

Aufgabe 17:

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$,

b) $\displaystyle\int e^{3x-1}\sin\left(e^{3x+1}\right)\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^3+7x^2+10x+8}{x^3+2x^2+3x+4}\,dx$,

d) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\cos\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)\,dx$.

Aufgabe 18:

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{8x^3-3x^2+40x-7}{x^2+5}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{-17x^3+8x^2+67x-8}{x^4-2x^3-2x^2+6x+5}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx\,.$

Aufgabe 19:

Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Existenz:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4+x^2}\,dx\,,$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{x}\cot x\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1-\cos x}\,dx\,.$

Aufgabe 20:

Man begründe, dass für $s > 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$F(s) \;=\; \int_0^\infty \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt$$

existiert und berechne es anschließend. $F(s)$ wird als Laplace-Transformierte zu $f(t) = \cos(\gamma t)$ bezeichnet.

Aufgabe 21: (14.1.3)

Die Parabeln $p(x) = 3 - x^2$ und $q(x) = x^2 + 1$ schließen im Intervall $[-1, 1]$ eine Fläche ein.

a) Man berechne das Volumen und

b) die Oberfläche und

c) fertige eine Zeichnung an,

des Körpers, der entsteht, wenn diese Fläche um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 22:

a) Man zeichne eine der Schraubenlinien $\mathbf{c}_k : [0, k\pi] \to \mathbb{R}^3\,,\ k \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbf{c}_k(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t/k \end{pmatrix}$$

und berechne die Bogenlänge von $\mathbf{c}_k$.

b) Man zeichne das cartesische Blatt $\mathbf{c} : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{t^3+1} \\ \dfrac{t^2}{t^3+1} \end{pmatrix}$$

und berechne den Flächeninhalt der im 1. Quadranten umschlossenen Fläche.

Aufgabe 23:

Durch

$$r(\varphi) = \sqrt{\cos(2\varphi)}$$

ist die Lemniskate in Polarkoordinaten gegeben.

a) Man bestimme den Definitionsbereich $D \subset [0, 2\pi]$ und skizziere die Kurve.

b) Man berechne den Tangenteneinheitsvektor der Kurve im Punkt $(0,0)$.

c) Man berechne die von der Lemniskate auf der rechten Halbebene überstrichene Fläche.

Aufgabe 24:

a) Man zeichne und parametrisiere die Ellipse $2x^2 + 3y^2 = 4$. Anschließend berechne man für die durch $f(x,y) = xy^2$ definierte Funktion das Kurvenintegral 1. Art von f längs der Ellipse.

b) Die Parametrisierung eines Drahtes sei durch

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0,1]$$

gegeben. Er besitze die Massendichte $\rho(\mathbf{c}(t)) = e^{2t}$. Man zeichne den Draht und berechne seine Gesamtmasse.

Aufgabe 25:

Gegeben sei die 4-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & , \quad -2 \le x \le 0 \quad , \\ x(2-x) & , \quad 0 \le x \le 2 \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion,

b) berechne ihre Fourier-Reihe und

c) zeichne die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

Aufgabe 26:

Gegeben sei die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & , \quad -\pi \leq x \leq 0 \quad , \\ 0 & , \quad 0 \leq x \leq \pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion und

b) berechne ihre Fourier-Reihe.

c) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 27:

a) Man bestimme die Fourier-Koeffizienten der folgenden 2π-periodischen Funktionen:

(i) $\sin^2(3x)$,

(ii) $\cos^4(x/2)\sin x$,

(iii) $4\cos^3 x - 3\cos x + \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

Tipp: Die Theoreme für trigonometrische Funktionen (Produkte, Potenzen) führen hier zu Vereinfachungen.

b) Man bestimme mit Hilfe des Fourierreihenansatzes

$$y(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = y(x) + \cos(x)$.

Aufgabe 28:

Gegeben sei die Funktion $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$.

a) Man zeichne die ungerade (2-periodische) Fortsetzung der Funktion f im Intervall $[-2, 2]$ und

b) berechne die komplexe Fourier-Reihe dieser ungeraden Fortsetzung.

c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten der Reihe aus b) an und

d) zeichne f, sowie $S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ im Intervall $[-1, 1]$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.