Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 1999/00**
©Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Analysis I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die in Klammern angegebenen Nummern beziehen sich auf den Aufgabenband 3 von Oberle, Rothe, Sonar

Aufgabe 1: (vgl. 1.1.2)

a) Man gebe für folgende Aussageform die Wahrheitswerttafel an:

$$((A \wedge B) \vee \neg A) \;\wedge\; ((A \wedge B) \vee \neg B)\ .$$

b) Man zeige, dass folgende Aussagen Tautologien sind:

$$(A \Longleftrightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad ((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A))\ ,$$
$$A \vee (B \wedge C) \quad \Longleftrightarrow \quad (A \vee B) \wedge (A \vee C)\ .$$

Aufgabe 2: (vgl. 1.1.3, 1.1.6)

a) Man beweise indirekt:

(i) Ist p eine Primzahl, so ist $\sqrt{p}$ irrational.

(ii) Für alle reelle Zahlen a und b gilt

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}\ .$$

b) Man beweise direkt, dass für $n \geq 9$ gilt: $\quad n! \geq 4^n$.

Aufgabe 3: (vgl. 1.2.2, 1.2.5)

a) Man bestimme alle reellen Werte x, für die gilt:

(i) $\sqrt{x+2} = x$,

(ii) $|\,2-|1-|x||\,| \;\leq\; 3$.

b) In der x,y-Ebene skizziere man den Lösungsbereich von:

(i) $|x-2|+2 \leq |y|$,

(ii) $\max\{|x|,|y|\} \leq 1$,

sowie die Mengen

(iii) $\bigcup_{j=0}^{3} [\,2j, 2j+1\,[\quad \times \quad \bigcup_{j=1}^{4} \,]\,2(j-1), 2j-1\,]$.

Aufgabe 4: (vgl. 1.3.2)

a) Für reelles x seien die folgenden Funktionsvorschriften $y = f(x)$ gegeben:

a) $y = \ln(\sqrt{x+a}) \quad a \in \mathbb{R}$, b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$,

c) $y = \dfrac{x-4}{-x^2+5x-4}$, d) $y = \sqrt{(x-3)\,(2-x)}$,

e) $y = n$, für $n < x \leq n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, f) $y = \sqrt{\dfrac{5x-1}{3x+1} - 1}$.

Man gebe jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich D und den zugehörigen Bildbereich $f(D)$ an.

b) Eine Funktion heißt gerade Funktion, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt, sie heißt ungerade Funktion wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade:

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2}\ , \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ , \quad h(x) = x + \sin x \quad ?$$

Aufgabe 5:

Man beweise mittels vollständiger Induktion:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

b) $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{j+1}\right) = \frac{1}{n+1} \qquad$ für $n \geq 1$,

c) Ist $x_0 = a$, $x_1 = b$ und $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$ für $n \geq 1$, so gilt

$$x_n = \frac{1}{3}\left((a+b)2^n + (2a-b)(-1)^n\right) \quad \text{für} \quad n \geq 0\ .$$

Aufgabe 6: (vgl. 2.1.4)

Man weise die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach:

a) $a_n = 6^n - 5n + 4$ ist durch 5 teilbar,

b) $b_n = \dfrac{1}{6}\left(n + 3n^2 + 2n^3\right)$ ist eine natürliche Zahl.

Aufgabe 7: (vgl. 2.2.2)

a) Man bestimme den ggT von $m = 1044$ und $n = 396$ und stelle ihn als $\mathbb{Z}$-Kombination von m und n dar.

b) Man gebe für $(973)_{10}$ die 5-adische Darstellung an.

c) Man wandle die folgenden periodischen Zifferndarstellungen der rationalen Zahlen r_k in die Form $r_k = \frac{(n_k)_{10}}{(m_k)_{10}}$, n_k, $m_k \in \mathbb{N}$ (teilerfremd) um:

$$r_1 = (3.\overline{12})_4\,, \quad r_2 = (4.\overline{121})_5\,, \quad r_3 = (41.\overline{69})_{10}\,.$$

Aufgabe 8:

Man untersuche die Menge

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \frac{n}{n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

auf Beschränkheit und bestimme ggf. Infimum und Supremum.

Aufgabe 9: (vgl. 8.2.1)

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. die Grenzwerte

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}, \quad & b_n &= \left(\frac{5n}{2n+1}\right)^4, \\ c_n &= \frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}, \quad & d_n &= \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{5n}, \\ e_n &= \sqrt{n(n+3)} - n. \end{aligned}$$

Aufgabe 10: (vgl. 8.2.4)

a) Man untersuche die Folge

$$a_n = n^3 + 2 - \sqrt{n^6 + 5n^3}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Man untersuche die rekursiv definierte Folge

$$b_1 = 1\,, \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}\,, \quad n \geq 1$$

auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 11:

Man untersuche die angegebenen Folgen im $\mathbb{R}^2$ bzw. im $\mathbb{R}^3$ auf Konvergenz und berechne, falls möglich die Grenzwerte:

a) $\boldsymbol{x}_n = \left(\frac{1+(-1)^n}{n}, \quad \sin(n\pi) \right)^T$,

b) $\boldsymbol{y}_n = \left(\frac{1}{n}, \quad 1, \quad n \right)^T$.

Aufgabe 12:

Warum konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n}{(2n-7)(n+2)} \quad ?$$

Von welchem Index N an, gilt für die Partialsumme S_N und den Grenzwert S der Reihe

$$|\, S - S_N| \,<\, \frac{1}{100} \quad ?$$

Aufgabe 13: (vgl. 8.4.2)

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k+1}{k^2-k-2}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ d) $\displaystyle\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \frac{16}{243} + \cdots$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

Aufgabe 14: (vgl. 9.1.2)

a) Man berechne für die folgenden Mengen D_j die Menge aller Häufungspunkte D_j' und die Menge aller inneren Punkte D_j^0. Welche der Mengen D_j sind abgeschlossen bzw.

offen?

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup [-1, 0]\,, \\
D_2 &= \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \,]1, \infty[\,, \\
D_3 &= \left\{ \frac{n}{n^2+1} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}
\end{aligned}$$

b) Man berechne für folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, falls dies möglich ist:

$$\text{(i)} \quad f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{für} \quad x > 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad x_0 = 0$$

$$\text{(ii)} \quad f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für} \quad x < 1 \\ x & \text{für} \quad 1 < x < 2 \\ e^x & \text{für} \quad 2 < x \end{cases} \qquad \text{mit} \quad x_0 = 1$$

$$\text{(iii)} \quad f(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{für} \quad x < \pi \\ 1 & \text{für} \quad \pi < x \end{cases} \qquad \text{mit} \quad x_0 = \pi \quad .$$

Aufgabe 15:

Man untersuche direkt mit der $\varepsilon - \delta-$Charakterisierung die folgenden reellen Funktionen f auf Stetigkeit im Punkt x_0:

a) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{für} \quad x < 1 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad x_0 = 1$$

b) $$g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x_0 = 0 \end{cases} \qquad .$$

Aufgabe 16:

a) Man bestimme die folgenden Funktionsgrenzwerte, falls sie existieren

$$\text{(i)} \quad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \quad , \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x + y^2}{x^2 + y^2} \quad .$$

b) Kann die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 4x + 5y \sin \left(\frac{1}{|x| + |y|} \right)$$

stetig in $(0, 0)$ fortgesetzt werden?

Aufgabe 17:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{für} \quad x \le 0\,, \\ e^{ax} + b & \text{für} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Man bestimme die reellen Konstanten a und b so, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar wird.

Aufgabe 18:

Man stelle für die folgenden Funktionen im Punkte x_0 die Gleichung der Tangente auf:

a) $f(x) \;=\; a^x \quad \text{mit} \quad x_0 = 1\,,$

b) $g(x) \;=\; \begin{vmatrix} \tan x & \ln x \\ x^2 & \cos x \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad x_0 = \pi\,,$

c) $\boldsymbol{h}(x) \;=\; \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x_0 = 0 \quad .$

Aufgabe 19: (vgl. 9.2.5)

Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen und vereinfache die sich ergebenden Ausdrücke:

a) $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,,$ b) $g(x) = \arctan \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\,,$

c) $h(x) = \ln(\tan x) - \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\,,$ d) $p(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2+3x}}{3x}\,,$

e) $q(x) = \ln(\ln x)\,,$ f) $r(x) = \ln(\sin x) - x \cot x\,.$

Aufgabe 20:

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + x^2 & \text{für} \quad x \ge 0 \\ x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \quad .$$

Ist der Mittelwertsatz

$$g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad \text{mit} \quad x_0 \in]a, b[$$

für $a = -\frac{\pi}{2}$ und $b = -\frac{\pi}{2}$ auf f bzw. f' anwendbar?

b) Man zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad h(x) = \ln x + 2 - x$$

mindestens zwei Nullstellen besitzt und mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass sie höchstens zwei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.

Aufgabe 21: (vgl. 10.1.6)

Man bestimme das Taylorpolynom dritten Grades für die Funktion

$$g(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.

Man schätze den Approximationsfehler im Intervall $\left[\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right]$ mit Hilfe der Restgliedformel nach Cauchy ab.

Aufgabe 22:

Man berechne mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$,

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(2x+3)}{\ln(5x+6)}$,

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln^2(1+3x) - 2\sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$.

Aufgabe 23: (vgl. 10.3.2)

Man diskutiere die reellwertige Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Aufgabe 24: (vgl. 10.3.6)

Man diskutiere die reellwertige Funktion $f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$.