Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**

Hörsaalübungsaufgaben zu
Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

a) Man zeige, dass folgende Aussage eine Tautologie ist

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)\,.$$

b) Man beweise:
Für reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}\,,$$

(i) indirekt und

(ii) direkt.

Aufgabe 2:

Man stelle die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente dar

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 9 < 0\}$,

b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \sqrt{4x+20} \leq 6\right\}$,

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq \ln x < 3\}$,

d) Man bilde die Mengen $A \cup B,\ A \cap C,\ C \setminus B,\ (C \setminus B) \cap A$.

Aufgabe 3:

Man beweise durch vollständige Induktion

a) für $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$,

b) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \geq \frac{1}{n+1}$,

c) $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar.

Aufgabe 4:

a) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$ weise man folgende Beziehungen nach:
$$\binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m+1} .$$

b) Man bestimme für die Zahlen 96135 und 84854 die Primfaktorzerlegung, den ggT und das kgV.

c) Man wandle die rationale Zahl r mit der periodischen Zifferndarstelllung $r = 4.\overline{321}$ um in einen Bruch.

d) Man beweise indirekt, dass $\sqrt{14}$ irrational ist.

Aufgabe 5:

Für folgende Funktionen f berechne man alle $x \in \mathbb{R}$ für die $f(x) \geq 0$ gilt und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen

a) $f(x) = 1 - 2||x-2| - 1|$,

b) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Aufgabe 6:

a) Für die Funktion f mit
$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x$$
zeichne man den Funktionsgraphen und berechne alle Nullstellen $x \in \mathbb{C}$.

b) Man berechne die folgenden Ausdrücke und gebe sie in kartesischer Darstellung an

(i) $z_1 = 3 - 4i - (5 + 6i)$,

(ii) $z_2 = 3i^7 - 2i^5 + 6i^4 + 5i^2 + 4$,

(iii) $z_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$,

(iv) $z_4 = (3 - 4i)(5 + 6i)$,

(v) $z_5 = \dfrac{3 - 4i}{5 + 6i}$.

Aufgabe 7:

a) Mit Hilfe der Eulerschen Formel und unter Verwendung von $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ bestätige man die Gültigkeit der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x \,, \\ \sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x \,. \end{aligned}$$

b) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i \,, \quad z_2 = -1 + i \,, \quad z_3 = i \,.$$

(i) Man berechne

$$\bar{z}_1 + z_2 \,, \quad \mathrm{Re}\,(\bar{z}_2 + 3z_3) \,, \quad \mathrm{Im}\,(2z_1 + z_2) \,, \quad |z_1 + z_3| \,.$$

(ii) Man bestimme die Polarkoordinatendarstellung von

$$z_1 \,, \quad z_2 \,, \quad z_3 \,, \quad \bar{z}_1^6 \,, \quad z_2^{12} \,, \quad \frac{\bar{z}_1^6 z_3}{z_2^{12}} \,.$$

Aufgabe 8:

a) Für die Funktion

$$f :]-\infty, c] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y = f(x) := x^2 + 8x + 15$$

bestimme man die größte Zahl c, so dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt. Man berechne die Umkehrfunktion, gebe deren Definitions- und Wertebereich an und zeichne den Funktionsgraphen von f^{-1}.

b) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i) $f_1 : [-5, 5] \to [-2, 2]$, $f_1(x) = 1 - |2 - |x||$,

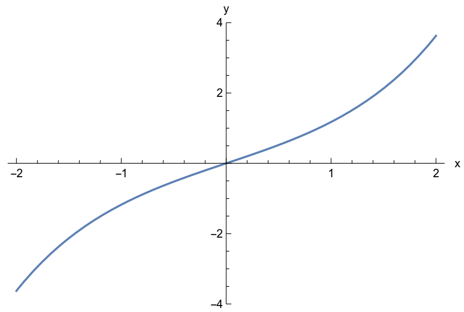
(ii) $f_2 : [0, 1] \to [0, 2]$, $f_2(x) = x^4$,

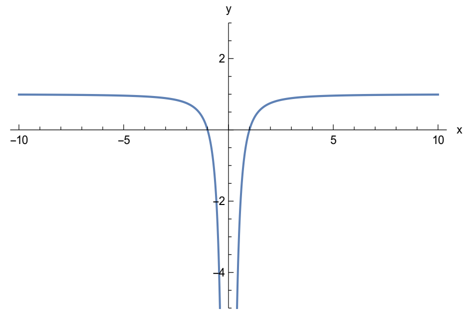
(iii) $f_3 : [0, \pi/2] \to [0, 1/2]$, $f_3(x) = \sin x \cos x$,

(iv) $f_4 : \mathbb{R} \to]0, \infty[$, $f_4(x) = e^x$.

Aufgabe 9:

Zu den Abbildungsvorschriften $f(x)$ und $g(x)$ seien die folgenden Funktionsgraphen gegeben:





$f(x) = ?$ $\qquad$ $g(x) = ?.$

a) Man begründe, welche der Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = x + x^3\,, \quad f_2(x) = 1 - \frac{1}{x^2}\,, \quad f_3(x) = \sinh x\,, \quad f_4(x) = \ln(|x|)$$

mit $f(x)$ und welche mit $g(x)$ übereinstimmt.

b) Man untersuche, ob es sich bei f und g um gerade, ungerade oder beschränkte Funktionen handelt.

c) Anhand der Funktionsgraphen von f und g gebe man die Bereiche an, in denen die Funktion monoton wächst oder fällt und konkav oder konvex (von unten) ist.

Aufgabe 10:

a) Man vereinfache die folgende Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \ln\frac{x^2 + 4x + 4}{x} - \ln(x+2) + \ln(x)\,.$$

b) Für die unecht gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 31}{x^2 + 6x + 11}\,.$$

spalte man den polynomialen Anteil durch Polynomdivision ab.

c) Für das Polynom

$$p_3(x) = x^3 - 3x^2 - 33x + 35$$

bestimme man die Linearfaktorzerlegung unter Verwendung der Methode der Polynomdivision.

Aufgabe 11:

a) Unter Verwendung der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen, zeige man, dass für $t = \tan\frac{x}{2}$ gilt

$$\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}\,.$$

b) Mit Hilfe der Definitionen von sinh und cosh weise man die Gültigkeit des folgenden Additionstheorems nach

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

c) Die Funktion $y = \cosh(x)$ besitzt für $x \in [0, \infty[$ eine Umkehrfunktion. Diese wird mit $\operatorname{arcosh}(y)$ bezeichnet. Man zeige, dass gilt

$$\operatorname{arcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

Aufgabe 12:

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3-n+2n^2}{6n^2+1}\,, & b_n &= \left(\frac{3n^2+1}{2n^2-n-7}\right)^3\,, \\ c_n &= \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\,, & d_n &= \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{4n^2+3}}{n}\,, \\ e_n &= \left(1-\frac{2}{3n}\right)^{17n}\,, & f_n &= \frac{2^{n+1}+3^n}{3^{n+1}+2^n}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 13:

Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = 0\,,\quad a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{3}\,,$

b) $b_1 = \frac{1}{2},\ b_{n+1} = \frac{b_n^2+3}{4}\,,$

c) $c_1 = 1,\ c_{n+1} = 2c_n + 1\,,$

d) $d_1 = 3\,,\quad d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2}\,.$

Aufgabe 14:

a) Man bestimme für folgende Mengen die Menge aller Häufungspunkte M' und aller inneren Punkte M^0, und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist.

$$\begin{aligned} M_1 &= (]-3,5] \cap]2,8]) \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = \frac{1}{n}\ , \ n \in \mathbb{N} \right\} , \\ M_2 &= \{0\} \ \cup \ [3,4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \frac{1}{2n}\ , \ n \in \mathbb{N} \right\} , \\ M_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ 0 < y < |x| < 1 \right\} . \end{aligned}$$

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x \tan x$,

(ii) $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$,

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} (2 - \cosh x + \sinh x)$.

Aufgabe 15:

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Abbildungsvorschrift

$$f(x) = x^4 + \frac{113}{44} x^3 - \frac{5}{2} x^2 - \frac{113}{22} x + 1$$

berechne man mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens Näherungen $\tilde{x}$ für alle Nullstellen x^* bis auf einen absoluten Fehler von $|\tilde{x} - x^*| \leq 0.001$.

Aufgabe 16:

a) Für die Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \quad x \neq 0 \\ 2 & , \quad x_0 = 0 \end{cases} \quad , \quad f_2(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x \leq 1 = x_0 \\ e^x & , \quad 1 < x \end{cases} \quad ,$$

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} \ , \ x_0 = 5 \quad , \quad f_4(x) = \begin{cases} 2x/\pi & , \quad x \leq \pi/2 = x_0 \\ \sin x & , \quad \pi/2 < x \end{cases}$$

zeichne man die Funktionsgraphen und berechne in x_0 links- und/oder rechtsseitige Grenzwerte und überprüfe damit, ob Stetigkeit oder stetige Ergänzbarkeit in x_0 vorliegt oder sich eine Unstetigkeit in x_0 beheben lässt.

b) Für die Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - a & , \quad x < 1 \\ \ln x & , \quad 1 \le x \end{cases}$$

bestimme man, falls dies möglich ist, $a \in \mathbb{R}$, so dass f in $x_0 = 1$ stetig wird.

Aufgabe 17:

a) Man berechne die für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, für die gilt

$$\begin{array}{rcll} f(0) & = & 0 & , \\ f'(x) & = & -2 & \text{für} \quad -\infty < x < -1\,, \\ f'(x) & = & 2x & \text{für} \quad -1 < x < 2\,, \\ f'(x) & = & 1 & \text{für} \quad 2 < x < \infty \end{array}$$

und zeichne die Funktion. Ist f auch differenzierbar?

b) Für die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\,, & x < 1 \\ \ln x\,, & 1 \le x \end{cases}$$

bestimme man $a, b \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = 1$ stetig differenzierbar wird und zeichne f.

c) Man berechne die Tangentengleichung zu $f(x) = \cos x$ im Punkt $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ und fertige eine Zeichnung an.

Aufgabe 18:

a) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{i) } f(x) = \frac{x + \sin x \cos x}{2}\,, \qquad \text{ii) } g(x) = (2x+1)^{\sin x}\,.$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \frac{x+2}{x^3+8}\,, \qquad \text{ii) } k(x) = \ln(x^2-1)\,.$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = 2(1-3x)^2 + 4(5x-2) - 7\,, \qquad \text{ii) } v(x) = \sqrt[3]{(5x+1)^2}\,.$$

Aufgabe 19:

a) Gegeben sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^3 - x - \frac{4}{5} + \cos x\,. \end{aligned}$$

(i) Man zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion f mindestens drei Nullstellen besitzt.

(ii) Man zeige mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass f höchstens drei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.

(iii) Man berechne die drei Nullstellen x^* mit Hilfe des Bisektionsverfahrens aus Aufgabe 15 bis auf einen absoluten Fehler von $|\tilde{x} - x^*| \leq 10^{-10}$.

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0\,, \\ x^2 & \text{für} \quad 0 < x\,. \end{cases}$$

(i) Man berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.

(ii) Ist der Mittelwertsatz

$$g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad \text{mit} \quad x_0 \in]a, b[$$

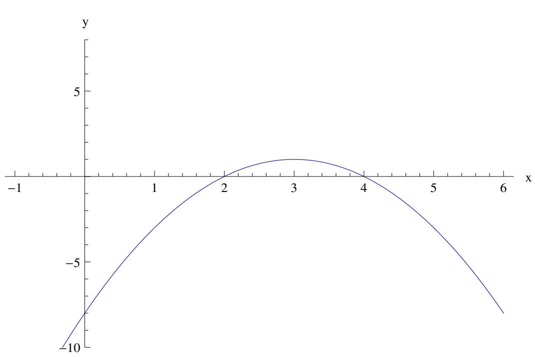
für $a = -1$ und $b = 1$ auf $f(x)$ und $f'(x)$ anwendbar?
Man bestimme gegebenenfalls die Zwischenstelle(n) x_0.

Aufgabe 20:

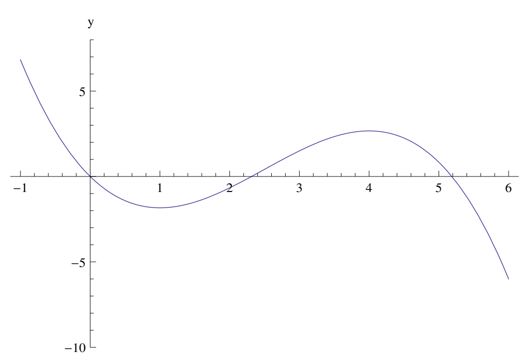
a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

$$\text{(i)} \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1}{x^2}\,, \qquad \text{(ii)} \lim_{x \to 0} \frac{3}{x} - \frac{6}{e^{2x} - 1}\,.$$

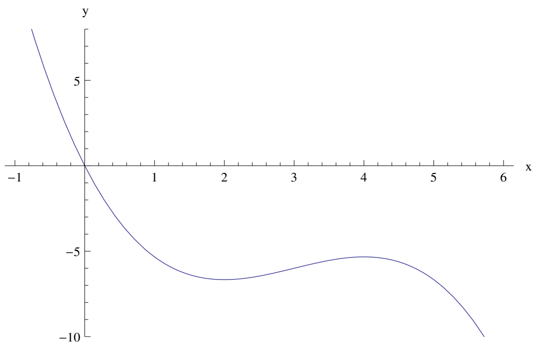
b) Nur die Ableitung $g'(x) = -x^2 + 6x - 8$ ist von der reellwertigen Funktion g bekannt. Man gebe die Monotoniebereiche von g an und klassifiziere alle Extremwerte. Anschließend begründe man, welcher der unten angegebenen Funktionsgraphen g_i mit dem von g übereinstimmt.



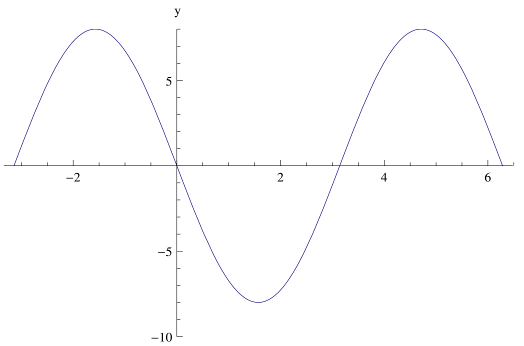
Funktion g_1



Funktion g_2



Funktion g_3



Funktion g_4

Aufgabe 21:

a) Für das Polynom $p_2(x) = 5x^2 - 16x + 6$ berechne man das Taylor-Polynom $T_2(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ unter Verwendung

(i) des Horner-Schemas und

(ii) der Ableitungsregeln für die Koeffizienten.

b) Man berechne das Taylor-Polynom vom Grad 3 für die durch

$$f(x) = e^{(x-\pi/2)} \sin x$$

gegebene Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ und schätze den maximalen Approximationsfehler $|f(x) - T_3(x)|$ für $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange nach oben ab.

Aufgabe 22:

a) Für die durch $f(x) = (x-1)^2\sqrt{x}$ gegebene Funktion gebe man im maximalen Definitionsbereich das Monotonieverhalten an, bestimme und klassifiziere alle Extremwerte und zeichne den Funktionsgraphen von f.

b) Man bestimme für die durch

$$g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$$

gegebene Funktion im Intervall $[-4, 4]$ alle Wendepunkte und die Bereiche in denen g konvex bzw. konkav ist und zeichne den Funktionsgraphen von g.

Aufgabe 23:

Gegeben sei die durch $\Phi(x) = e^{-x^2}$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass Φ genau einen Fixpunkt x^* besitzt.

b) Man gebe ein Intervall D an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)\ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für jeden Startwert $x_0 \in D$ auf Grund des Fixpunktsatzes gegen x^* konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte n werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ höchstens benötigt?

c) Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von $|x_n - x^*| < 10^{-3}$.

Aufgabe 24:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x(2 - x)\ ,$$

sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \leq 0$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2\ .$$