Anleitungsaufgaben zu

Analysis I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

a) Man gebe für folgende Aussage die Wahrheitswerttafel an:

(i) $B \Leftrightarrow \neg C$,

(ii) $\neg A \Rightarrow (A \vee B)$.

b) Man zeige, dass folgende Aussage eine Tautologie ist:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) .$$

Aufgabe 2:

a) Man beweise: für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

(i) indirekt,

(ii) direkt.

b) Man beweise indirekt, dass $\log_2 6$ irrational ist.

Aufgabe 3:
Man stelle die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente dar

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 - 3x^2 - x + 3 \geq 0\}$,

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \;\middle|\; \frac{1}{(x-3)^2} + 7 = 2x\right\}$,

c) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{1}{27} \leq 3^x < 243\right\}$.

d) Man bilde die Mengen $A \setminus C,\ B \setminus C,\ B \cup C,\ A \cap C$.

Aufgabe 4:
Gegeben seien die Mengen

a) $A = [-2, 2] \times [0, 1]$,

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

Man stelle folgende Mengen graphisch dar: $A,\ B,\ A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B$.

Aufgabe 5:

a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt: $x^2 \leq |3 - 2|x||$.

b) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i) $f_1 : [-4, 4] \to [0, 5]\,, \quad f_1(x) = |3 - 2|x||$,

(ii) $f_2 : [1, \infty[\to [0, \infty[\,, \quad f_2(x) = \ln x$,

(iii) $f_3 : [-\pi/4, \pi/4] \to [-1, 1]\,, \quad f_3(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,

(iv) $f_4 :]-1, 1[\to [-1, 1]\,, \quad f_4(x) = x^3$.

c) Eine Funktion heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt, bzw. *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade (man zeichne die Funktionsgraphen):

(i) $f_5(x) = \cos x + 2^x + 2^{-x}$,

(ii) $f_6(x) = (x - 2)^3 + 4$.

Aufgabe 6:
Man beweise die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

a) Für $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$,

b) die Bernoullische Ungleichung $(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N})$,

c) $a_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar.

Aufgabe 7:

a) Zur Berechnung von
$$\prod_{k=1}^{n}\left(2+\frac{2}{k+1}\right)$$
finde man eine Formel (notfalls durch Probieren) und beweise diese (ggf. durch vollständige Induktion).

b) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$ weise man folgende Beziehungen nach:
$$\binom{n}{m}\cdot\frac{n+1}{m+1}=\binom{n+1}{m+1}\,.$$

Aufgabe 8:

a) Man bestimme für die Zahlen 119301 und 43010 den ggT und das kgV

(i) unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus,

(ii) mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

b) Man überprüfe, ob folgende Mengen nach unten bzw. oben beschränkt sind und bestimme gegebenenfalls Infimum und Supremum

(i) $M_1 = [0,20[\, \cap\, [10,\infty[\,$,

(ii) $M_2 = [1,7[\, \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{n^2}{3n+1}\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}\,.$

Aufgabe 9:
Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$a_n = \sqrt{4n^2+11n}-\sqrt{4n^2-3}\,, \qquad b_n = \sqrt[3]{\frac{n^3+3n^2+3n+2}{8n^3+4n^2+2}}\,,$$

$$c_n = \frac{n^2+3}{n-1}-\frac{n^3+2}{n^2+4n}\,, \qquad d_n = \left(\frac{4n+5}{4n}\right)^{3n}\,,$$

$$e_n = \frac{(-1)^n+15\cdot 7^{n-1}}{10\cdot 4^{n+2}-3\cdot 7^{n+1}}\,, \qquad f_n = \frac{n+i^n}{3n} \quad (\in \mathbb{C})\,.$$

Aufgabe 10:
Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = 1\,, \quad a_{n+1} = \dfrac{5 - 3a_n}{4}\,,$

b) $b_1 = 3,\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2 + 8}{6}\,,$

c) $c_1 = 2,\ c_{n+1} = \dfrac{13}{6 - c_n}\,,$

d) $d_1 = 2,\ d_{n+1} = \sqrt{6 + d_n}\,.$

Aufgabe 11
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\quad f(x) = x^2 - x - 6, \quad$ sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \geq 3$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit
$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2\,.$$

Aufgabe 12:
Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = b\,, \quad x_n = 9x_{n-1} - 20x_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

folgende explizite Darstellung für $n \in \mathbb{N}$ besitzt:

$$x_n = (5a - b)4^n + (b - 4a)5^n\,.$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Aufgabe 13:
Man untersuche die Konvergenz folgender Folgen

a) $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} n^2/2^n \\ 1 + 1/n \end{pmatrix}\,, \quad n \in \mathbb{N},$

b) $\boldsymbol{a}_{n+1} := \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_n - y_n)/\sqrt{3} \\ (x_n + y_n)/\sqrt{3} \end{pmatrix}\,, \quad n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{a}_1 \in \mathbb{R}^2$

Tipp: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 14:
Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+3k^2+3k+1}{2^k}$,

c) $\displaystyle 2+\frac{4}{5}+\frac{8}{25}+\frac{16}{125}+\frac{32}{625}+\cdots$,

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1}$.

Aufgabe 15

a) Man stelle die reelle Zahl $x = 2.71\overline{82}$ unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe als Bruch dar.

b) Man zeige, dass die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+3\cdot(-1)^n}{n+1}$$
alterniert und dass für $b_n := \dfrac{2+3\cdot(-1)^n}{n+1}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

Aufgabe 16:
Gegeben sei die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+\sqrt{k}} .$$

a) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

b) Ab welchem Index n unterscheiden sich die Partialsummen
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+\sqrt{k}}$$
vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.01?

c) Wie lauten die ersten beiden Nachkommastellen des Grenzwertes S?

Aufgabe 17:

a) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$D_1 = \,]7,10[\;, \quad D_2 = [-4,4] \cup \left\{ \frac{9n}{1-2n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le 1 - x^2 \right\}.$$

Für jede Menge gebe man die Menge ihrer Häufungspunkte D' bzw. inneren Punkte D^0 an, und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist?

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| - e^x$,

(ii) $\lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$.

Aufgabe 18:

a) Man zeichne die durch

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

gegebene Funktion und überprüfe, ob sie in $x_0 = 0$ stetig ergänzt werden kann.

b) Man zeichne die durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & \text{für} \quad x < -1 \\ 2 & \text{für} \quad x \ge -1 \end{cases}$$

gegebene Funktion und untersuche mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, ob sie in $x_0 = -1$ stetig ist.

Aufgabe 19:

a) Gesucht ist eine für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, für die gilt:

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \quad , \\ f'(x) &= -1 \quad \text{für} \quad -\infty < x < -3\,, \\ f'(x) &= 0 \quad \text{für} \quad -3 < x < 1\,, \\ f'(x) &= 2 \quad \text{für} \quad 1 < x < \infty\,. \end{aligned}$$

b) Gegeben sei die durch

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c\,, & x \le 0 \\ \cos x\,, & 0 < x \end{cases}$$

definierte Funktion g. Man bestimme $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass g in $\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar wird und zeichne g, g' und g''.

Aufgabe 20:

a) Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen und vereinfache die sich ergebenden Ausdrücke:

$$\text{i) } f(x) = 2x\sin x - (x^2-2)\cos x\,, \qquad \text{ii) } g(x) = x\tan x + \ln(\cos x)\,.$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)\,, \qquad \text{ii) } k(x) = (2x)^x\,.$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

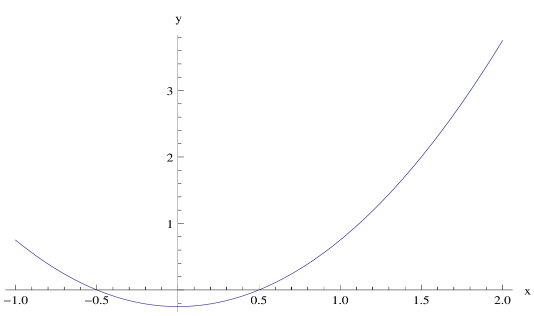
$$\text{i) } u(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,, \qquad \text{ii) } v(x) = x\sinh^2 x\,.$$

Aufgabe 21:
Gegeben sei die durch $f(x) = \cos(x^2 - \pi^2)$ definierte Funktion.

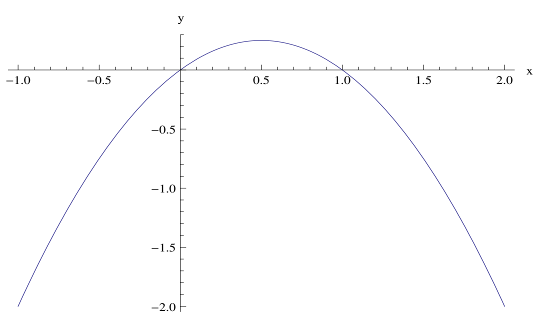
a) Man berechne das Taylor-Polynom $T_2(x;x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$.

b) Man schätze den Fehler zwischen $f\,(3)$ und $T_2\,(3;\pi)$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange nach oben ab.

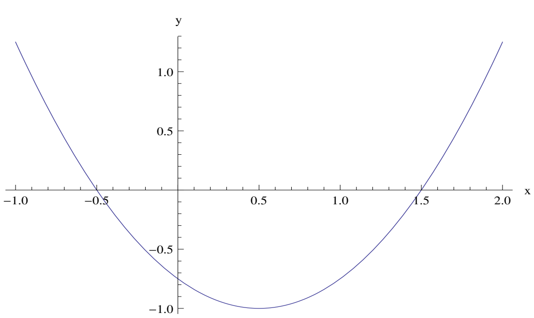
Aufgabe 22:
Von der reellwertigen Funktion f ist nur die Ableitung $f'(x) = 1 - 2x$ bekannt. Man gebe die Monotoniebereiche von f an und klassifiziere alle Extremwerte. Anschließend begründe man, welcher der unten angegebenen Funktionsgraphen f_i mit dem von f übereinstimmt.



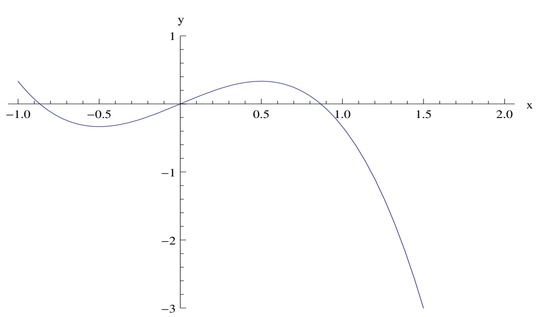
Funktion f_1



Funktion f_2



Funktion f_3



Funktion f_4

Aufgabe 23:
Man berechne die folgenden Grenzwerte

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\,, \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln(5x+6)}\,, \qquad \text{c)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{\arctan(x)}{x^3}\,.$$

Aufgabe 24:
Gegeben sei die durch

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

definierte reellwertige Funktion. Dazu untersuche man im Einzelnen:

a) Definitionsbereich,

b) Symmetrien,

c) Pole,

d) Verhalten im Unendlichen und Asymptoten,

e) Nullstellen,

f) lokale Extrema und Monotonie,

g) Wendepunkte und Konvexität.

h) Abschließend skizziere man den Graphen von $f(x)$.