

Anleitungsaufgaben zu Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die in Klammern angegebenen Nummern beziehen sich
auf den Aufgabenband 3 von Oberle, Rothe, Sonar

Aufgabe 1:

a) Man zeige, dass folgende Aussagen Tautologien sind:

- (i) $\neg(A \wedge \neg A)$,
- (ii) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$.

b) Man gebe für folgende Aussageform die Wahrheitstafel an:

$$(A \implies B) \wedge (B \vee C).$$

Aufgabe 2: (vgl. 1.1.3 c) + 1.1.4 a)

a) Man beweise:

Für reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a},$$

- (i) direkt und
- (ii) indirekt.

b) Man beweise indirekt, dass für ungerade Zahlen a, b und c

$$ax^2 + bx + c = 0$$

keine rationale Lösung x besitzt.

Aufgabe 3:

Man berechne die Lösungsmengen von

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$,
 b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$,
 c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$,
 d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq e^x \leq 27\}$

und bestimme $A \cup D$, $D \setminus C$ sowie $B \cap D$.

Aufgabe 4: (vgl. 1.2.2 + 1.2.4)

In der x - y -Ebene skizziere man die folgenden Mengen

- a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y - 2| \leq x \wedge |y - 2| < 1\}$,
 b) $B = \bigcup_{j=0}^3 [2j, 2j + 1[\times \bigcup_{j=1}^4]2(j - 1), 2j - 1[$.

Aufgabe 5:

- a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|4 - |x|| \leq x$.
 b) Man bestimme die Teilmenge des \mathbb{R}^2 für die gilt: $|y| \leq \sqrt{|4 - x^2|}$.

Aufgabe 6: (vgl. 2.1.3)

Man beweise die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

- a) $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n + 1)! - 1$,
 b) die Bernoullische Ungleichung $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ ($\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N}$),
 c) $a_n = 5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.

Aufgabe 7:

- a) Man entscheide und begründe ohne Verwendung eines Taschenrechners, welche der beiden Zahlen $\sqrt{7} + \sqrt{11}$ und $\sqrt{8} + \sqrt{10}$ größer ist.
 b) Welche Endziffern sind bei $n!$ möglich?

Aufgabe 8:

- a) Für die Zahlen 2210 und 2145 bestimme man ggT und kgV .

b) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m \in \mathbb{N}$ weise man folgende Beziehungen nach:

$$(i) \quad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m},$$

$$(ii) \quad \binom{n}{m} \cdot \frac{n-m}{m+1} = \binom{n}{m+1}.$$

Aufgabe 9: (vgl. 8.2.1)

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}, & b_n &= \left(\frac{5n}{2n+1}\right)^4, \\ c_n &= \frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}, & d_n &= \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{7n}, \\ e_n &= \sqrt{n(n+3)} - n, & f_n &= \frac{\ln(1+r) + 7 - 3r^n}{2r^n + 5}, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 10: (vgl. 8.2.3)

Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte:

$$\begin{aligned} a) \quad a_1 &:= 0, & a_{n+1} &:= \frac{1}{4}(a_n - 3), \quad n \geq 1, \\ b) \quad b_1 &:= 0, & b_{n+1} &:= \sqrt{2 + b_n}, \quad n \geq 1, \\ c) \quad c_1 &:= 2, & c_{n+1} &:= \frac{3}{4 - c_n}, \quad n \geq 1, \\ d) \quad d_1 &:= 0, & d_{n+1} &:= 3d_n + 2, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 11:

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x(2-x),$$

sowie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \leq 0$ ergibt.

- Man zeige, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.
- Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2.$$

Aufgabe 12:

Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(16x_n - 5x_{n-1})$$

folgende explizite Darstellung besitzt:

$$x_n = \frac{15(1 - 15^{n-1})a + 3(15^n - 1)b}{14 \cdot 3^n}.$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Aufgabe 13:

Man untersuche die Konvergenz folgender Folgen

a) $\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} n^2/2^n \\ 1 + 1/n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},$

b) $\mathbf{a}_{n+1} := \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_n - y_n)/\sqrt{3} \\ (x_n + y_n)/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}^2$

Tipp: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 14: (vgl. 8.4.1)

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1},$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1},$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{4^k},$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-9k - 10}{10k} \right)^k.$

Aufgabe 15:

a) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + 3 \cdot (-1)^n}{n+1}$$

alterniert und dass für $b_n := \frac{2 + 3 \cdot (-1)^n}{n+1}$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

b) Warum konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \right) ?$$

Ab welchem Index N unterscheiden sich die Partialsummen s_N vom Grenzwert der Reihe um weniger als 0.003?

Aufgabe 16: (vgl. 9.1.1)

a) Man gebe für die folgenden Mengen D_k die Menge aller Häufungspunkte D'_k und die Menge aller inneren Punkte D_k^0 an:

$$D_1 = \left\{ \frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup [0, 1], \quad D_2 =]-\infty, 0[, \quad D_3 = [1, 2[\times [0, \infty[.$$

Welche der Mengen D_k sind abgeschlossen bzw. offen?

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1},$

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{|x|+|y|}.$

c) Man zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

nicht existiert und berechne alle Häufungspunkte.

Aufgabe 17: (vgl. 9.1.5)

a) Man untersuche mit der ε - δ -Charakterisierung die folgenden reellen Funktionen auf Stetigkeit im Punkt x_0 :

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x_0 = 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$(ii) \quad g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{für } x \geq 1 \\ x-1 & \text{für } x < 1 \end{cases} \quad \text{mit } x_0 = 1$$

$$(iii) \quad h(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ x & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{mit } x_0 = 0 \quad .$$

b) Gesucht ist eine für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, für die gilt:

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \quad , \\ f'(x) &= -1 \quad \text{für} \quad -\infty < x < -3, \\ f'(x) &= 0 \quad \text{für} \quad -3 < x < 1, \\ f'(x) &= 2 \quad \text{für} \quad 1 < x < \infty. \end{aligned}$$

Aufgabe 18: (vgl. 9.2.2)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \notin [-1, 1], \\ a \sin(\pi x) + b \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{für } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Man bestimme die reellen Konstanten a und b so, dass f auf \mathbb{R} differenzierbar wird.

Aufgabe 19:

Man stelle für die folgenden Funktionen im Punkte x_0 die Gleichung der Tangente auf:

- a) $f(x) = \tan x$ mit $x_0 = \frac{\pi}{4}$,
- b) $g(x) = \left| \begin{array}{cc} x & 1 \\ -1 & x-2 \end{array} \right|$ mit $x_0 = 0$,
- c) $h(x) = \begin{pmatrix} x - 2 \sin x \\ 1 - 2 \cos x \end{pmatrix}$ mit $x_0 = \frac{5\pi}{3}$.

Aufgabe 20:

a) Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } f(x) = 10^{x^2-1}, \quad \text{ii) } g(x) = -x + \tan x.$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \tan \sqrt{x}, \quad \text{ii) } k(x) = \ln(x^3 + 2x + 1).$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = \cosh^3 x - \sinh^2 x \cosh x, \quad \text{ii) } v(x) = \sqrt[3]{x^4 - 5}.$$

Aufgabe 21: (vgl. 10.1.1)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Ist der Mittelwertsatz

$$g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad \text{mit } x_0 \in]a, b[$$

für $a = -1$ und $b = 1$ auf f bzw. f' anwendbar? Man bestimme gegebenenfalls die Zwischenstelle(n) x_0 .

Aufgabe 22: (vgl. 10.1.3)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = (4x + 5)^{-1/3}$ und $x \neq -\frac{5}{4}$.

- Man berechne die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.
- Man zeichne f und die Taylor-Polynome $T_i(x; 1)$ für $i = 0, 1, 2, 3$.
- Man schätze den absoluten Fehler zwischen $f\left(\frac{3}{2}\right)$ und dem Näherungswert $T_3\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ ab.
- Man berechne $T_3\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ und vergleiche den Wert mit $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Aufgabe 23:

Man berechne gegebenenfalls mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital die Grenzwerte:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2x + 3)}{\ln(5x + 6)}$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x}$,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x$.

Aufgabe 24:

Man diskutiere die reellwertige Funktion $f(x) = x + \frac{x}{|x| - 2}$.

Dazu untersuche man im Einzelnen: Definitionsbereich, Symmetrien, Pole, Verhalten im Unendlichen und Asymptoten, Nullstellen, Extrema und Monotonie, Wendepunkte und Konvexität. Abschließend zeichne man den Graphen von $f(x)$.