4. Interpolation durch Splines

4.1 Algemeines

Interpolation mit Polynomen liefert häufig unerwünschte Oszillationen und eine schlechte Approximationsgüte. Grund: Polynome sind zu starr.

Idee (Schoenberg ~ 1946)

Man suche eine interpolierende Funktion $s(x)$, für die das Funktional

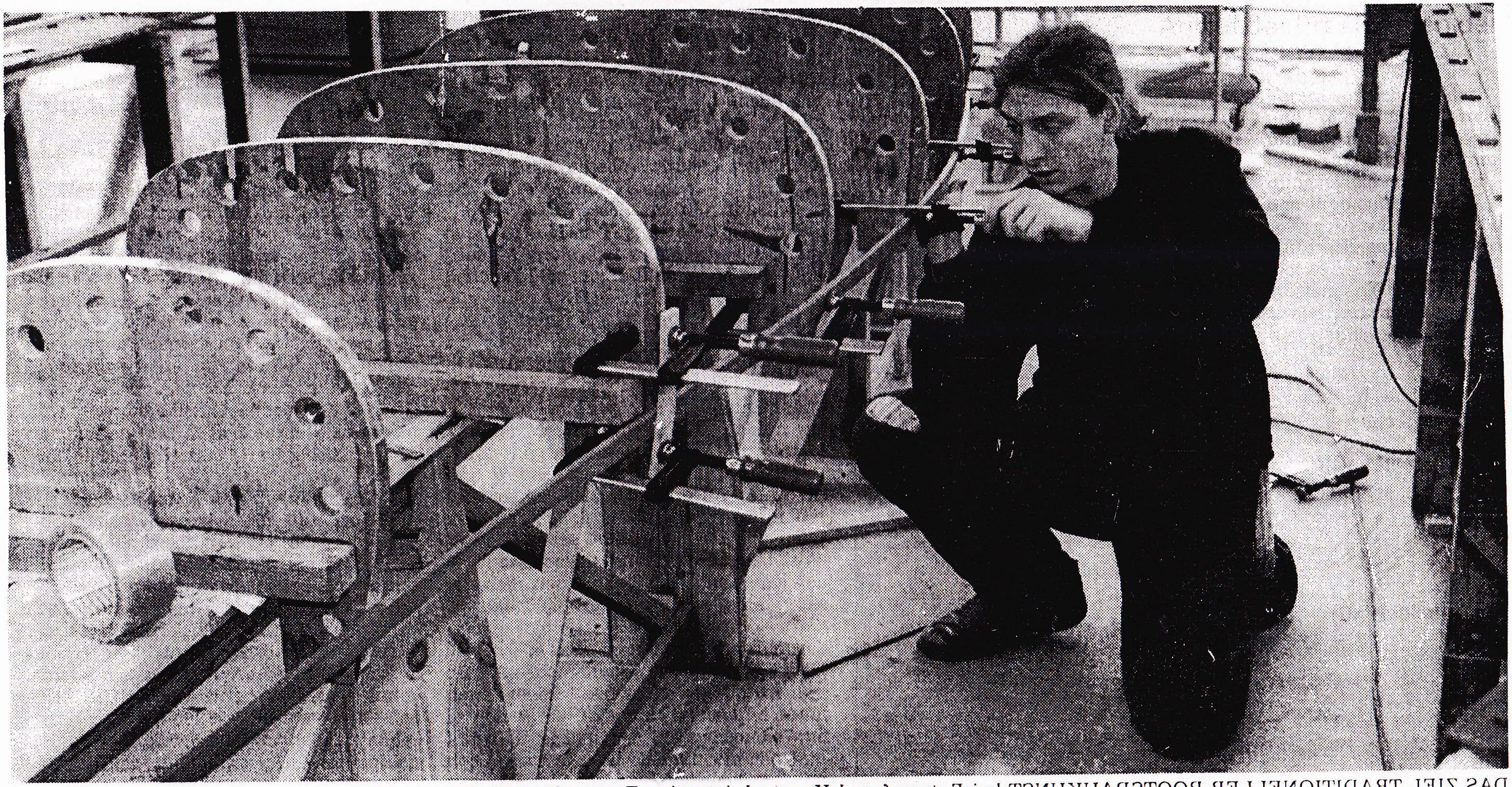
$$I(s) := \int_{x_0}^{x_n} (s''(x))^2 \, dx$$

(Maß für Krümmung)

minimal ist.

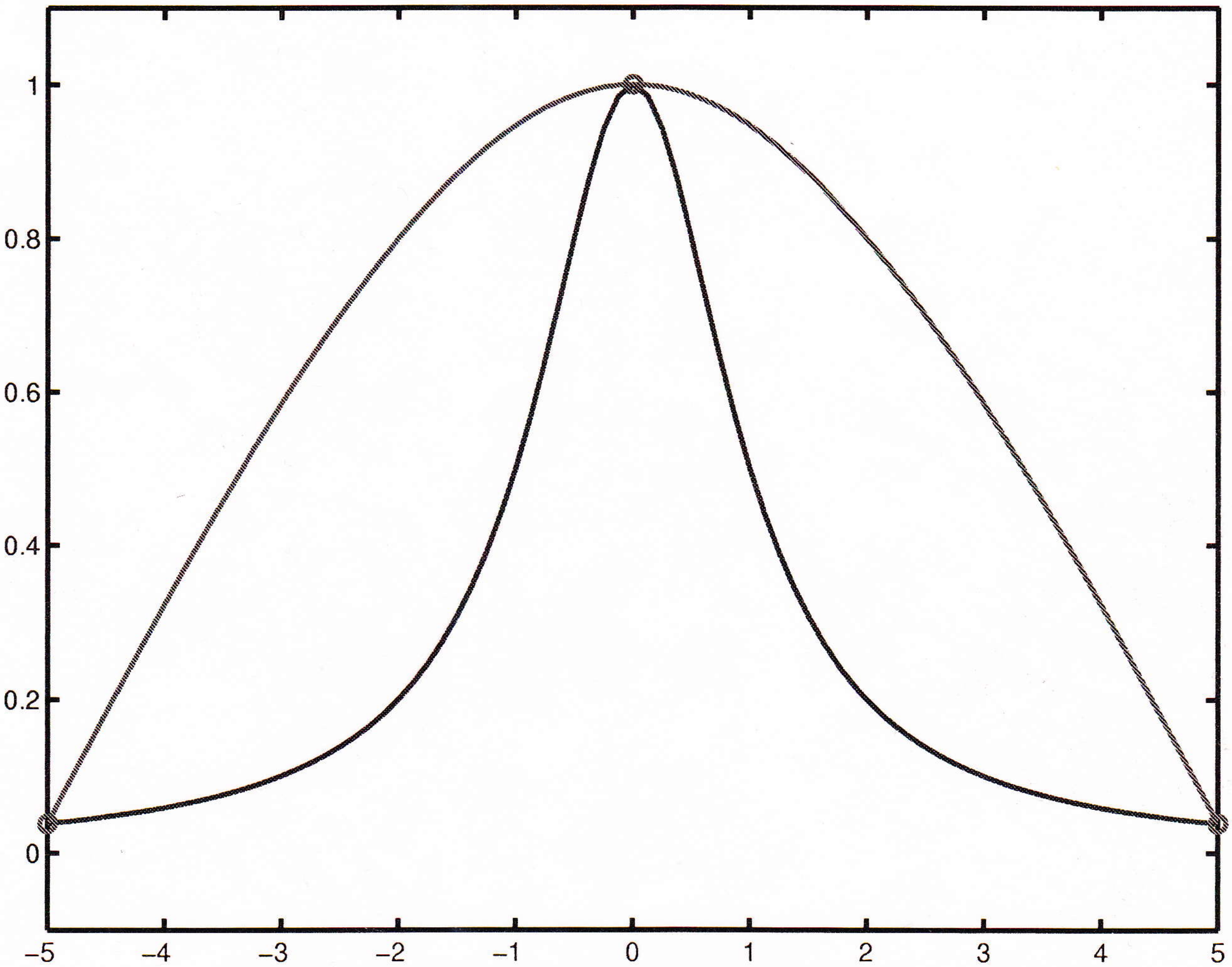
Physikalisches Modell ist die Straklatte (englisch spline), die - an Punkten fixiert - eine „optimale" Form annimmt und vorwiegend im Schiffbau Verwendung findet.

Lösung: $s(x)$ ist glatt (2x stetig differenzierb.) und abschnittsweise kubisches Polynom.



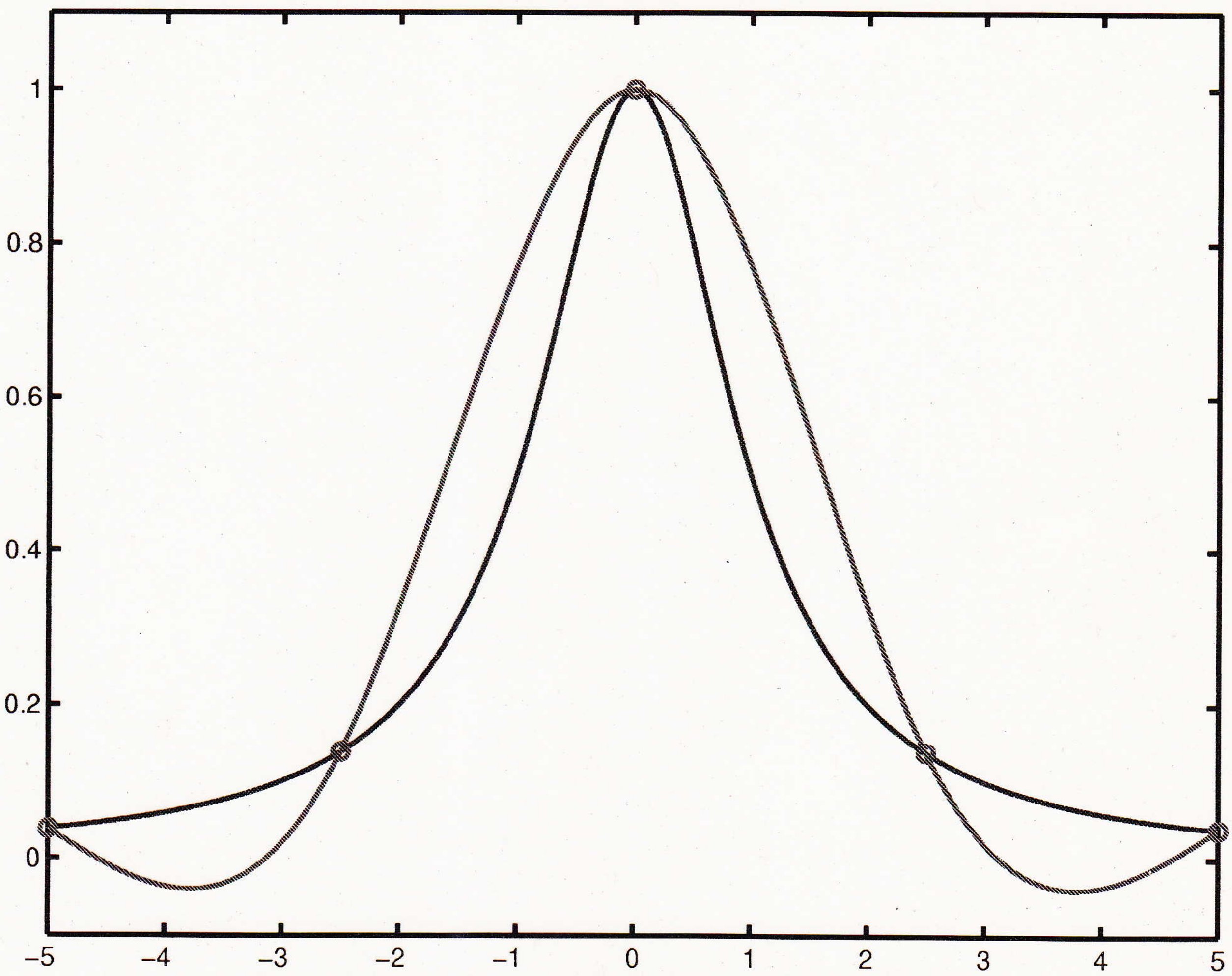
DAS ZIEL TRADITIONELLER BOOTSBAUKUNST bei Entwurf und Konstruktion: eine Form, „die dem Auge gefällt". Photo: Harald Almonat

60c



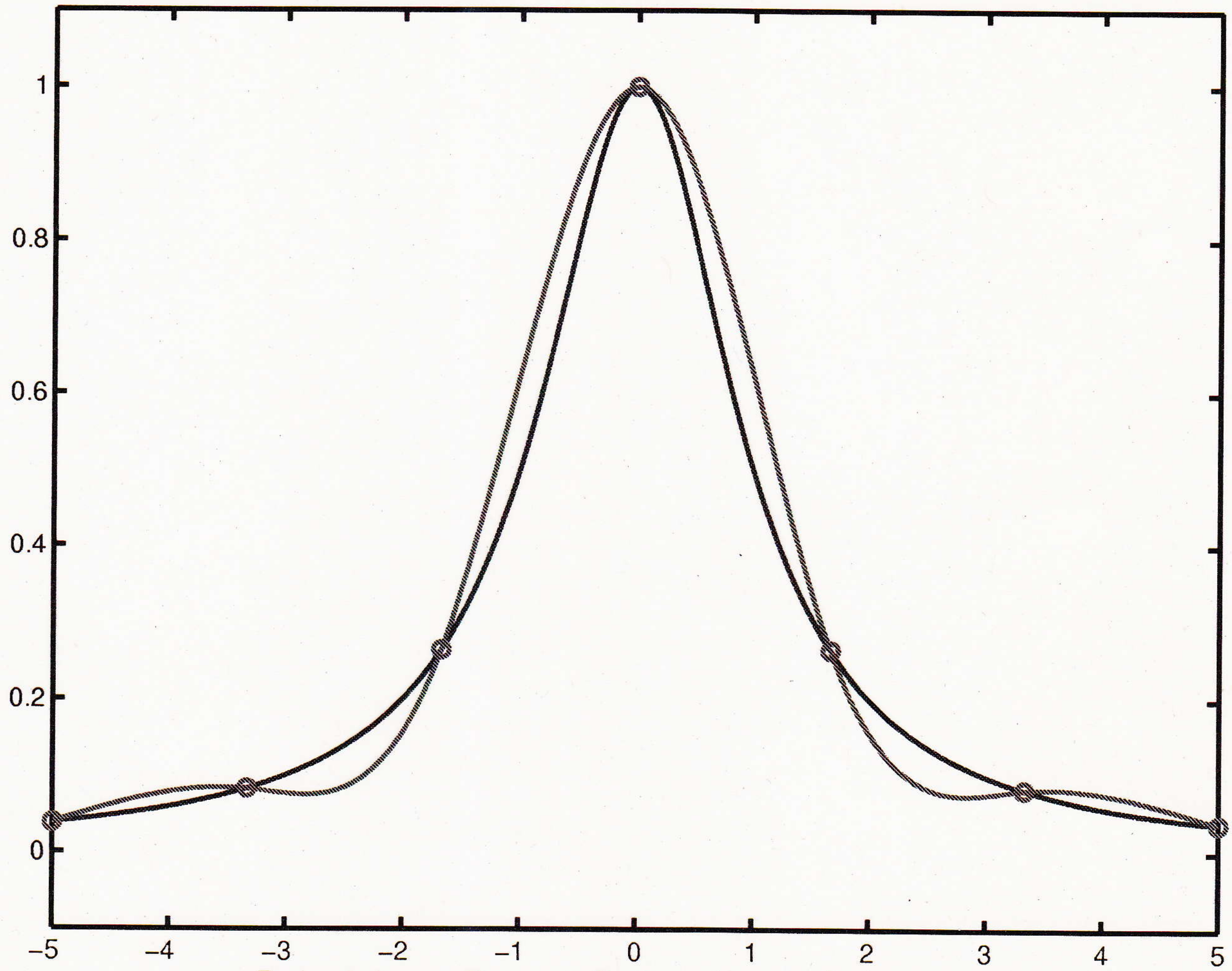
Beispiel von Runge; Spline−Interpolation, n = 2

60d

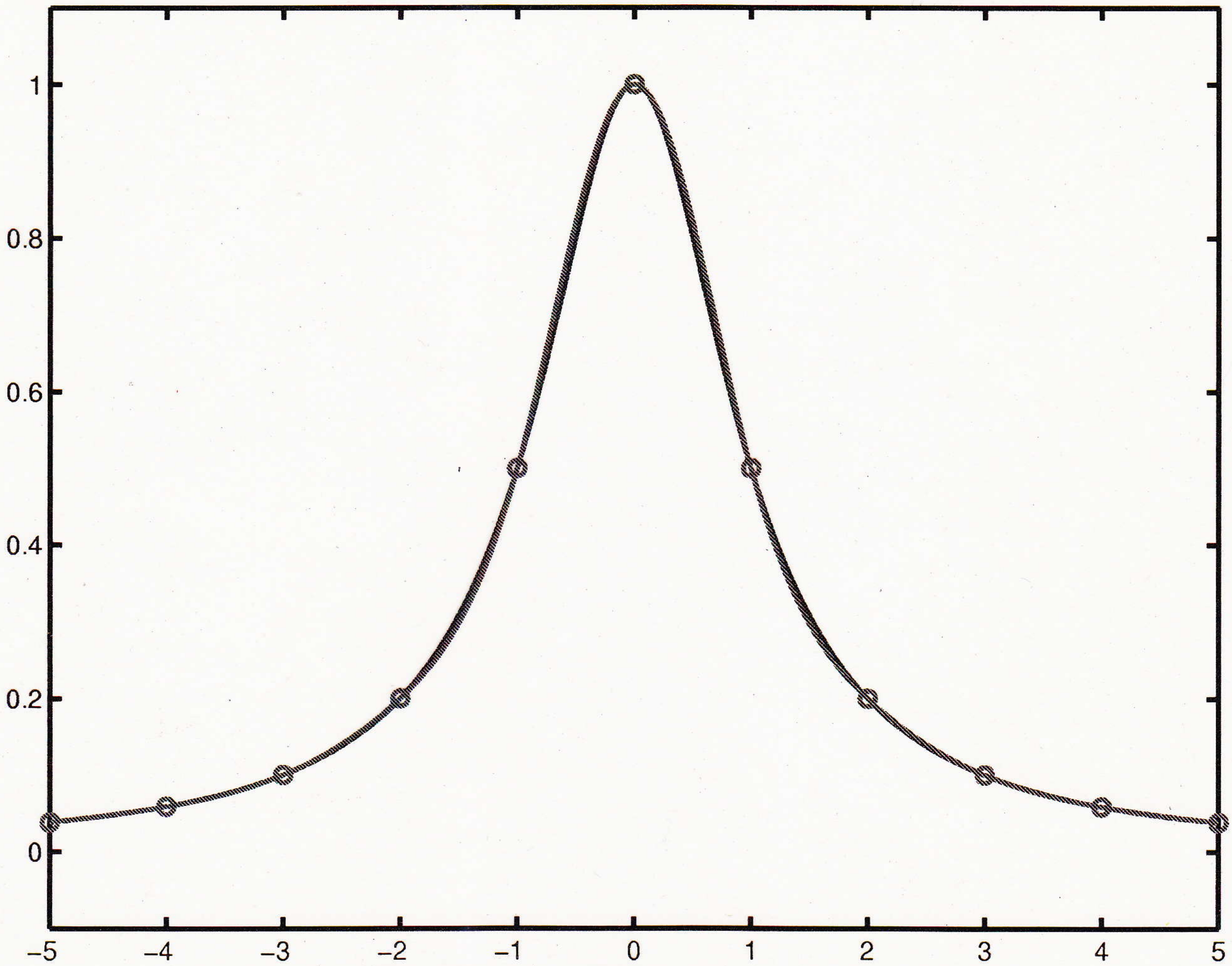


Beispiel von Runge; Spline–Interpolation, n = 4

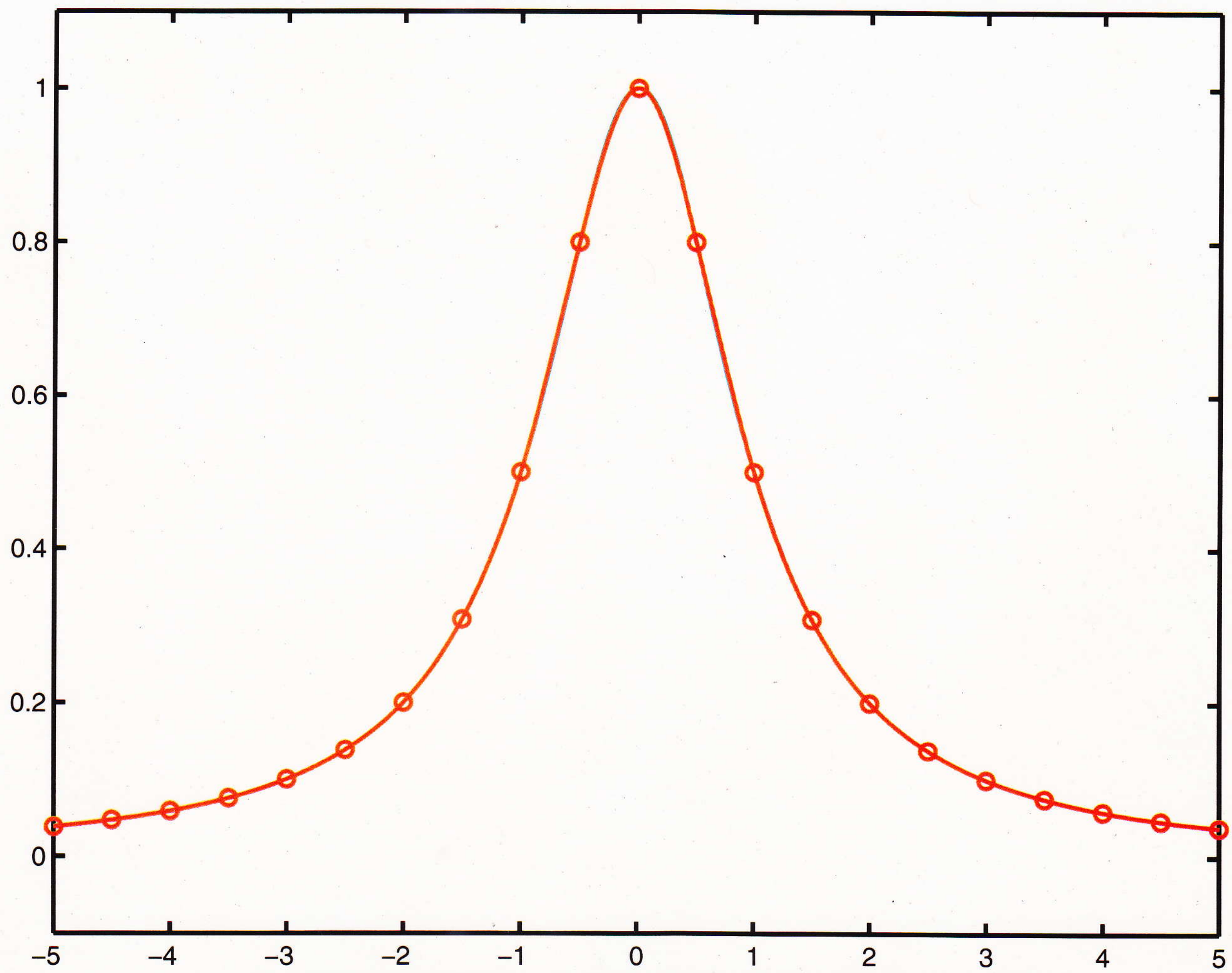
60e



Beispiel von Runge; Spline−Interpolation, n = 6



Beispiel von Runge; Spline−Interpolation, n = 10



Beispiel von Runge; Spline−Interpolation, n = 20

4.2 Matrizenkalkül

Zur Berechnung von Splines sind lineare Gleichungssysteme zu lösen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \underline{(4.1)}$$

a_{ij} : Koeffizienten, b_i : rechte Seiten

Abkürzende Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \underline{(4.2)}$$

$$\boxed{A \quad x = b}$$

A : (m,n) – Matrix

m : Zeilenzahl, n : Spaltenzahl

$\mathbb{R}^{(m,n)}$: Menge der reellen (m,n)-Matrizen

$\mathbb{R}^{(m,n)}$ bildet einen reellen Vektorraum bzgl. der Operationen:

$$A+B = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij}+b_{ij})$$
$$\lambda A = \lambda(a_{ij}) := (\lambda a_{ij})$$

Beachte: Nur Matrizen gleichen Typs lassen sich addieren!

<u>Nullmatrix</u>: $\mathbb{O} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

<u>Einheitsmatrix</u>: $I_n := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

Matrix · Vektor:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{mj} x_j \end{pmatrix} \qquad \underline{(4.3)}$$

<u>Regeln</u>:
$$A(x+y) = Ax + Ay$$
$$A(\lambda x) = (\lambda A)x = \lambda(Ax)$$
$$(A+B)x = Ax + Bx$$

Matrizenmultiplikation:

<u>(i)</u> $y = Bx$, $x \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $y \in \mathbb{R}^m$

<u>(ii)</u> $z = Ay$, $y \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{(\ell,m)}$, $z \in \mathbb{R}^\ell$

Einsetzen von (i) in (ii) ergibt:

$$z = A(Bx) =: Cx$$

wobei $C := A \cdot B \in \mathbb{R}^{(\ell,n)}$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{\ell 1} & \cdots & c_{\ell n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{im}} \\ a_{\ell 1} & \cdots & a_{\ell m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{matrix}} & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}} \qquad (4.4)$$

Beachte: Spaltenzahl der linken Matrix = Zeilenzahl der rechten Matrix!

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 13 \\ 4 & 6 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = 1 \in \mathbb{R}^1$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beachte:

- Matrizenmultipl. ist nicht kommutativ
- $A \cdot B = \mathbb{O} \not\Rightarrow A = \mathbb{O} \vee B = \mathbb{O}$

Regeln:

- $(A+B)C = AC + BC$
  $A(B+C) = AB + AC$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$
- $A \in \mathbb{R}^{(m,n)} \Rightarrow A I_n = A,$
  $I_m A = A.$

Tridiagon. Lin. Gleichungssysteme

Wir betrachten das Problem, ein lineares Gleichungssystem $Ax = r$ mit einer symmetrischen, tridiagonalen Matrix A zu lösen:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Ansatz (Dreieckszerlegung)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ u_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & u_n & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & b_1 & & 0 \\ & v_2 & b_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & b_{n-1} \\ 0 & & & v_n \end{pmatrix}}_{R}$$

Ausmultiplizieren:

$$a_1 = v_1$$

$$a_j = u_j \, b_{j-1} + v_j, \quad j \geq 2$$

$$b_j = v_j \cdot u_{j+1}, \quad j \geq 1$$

Algorithmus: (4.5)

$v_1 := a_1$

für $i = 2, \dots, n$: $\quad u_i = b_{i-1} / v_{i-1}$

$\qquad v_i = a_i - u_i \cdot b_{i-1}$

Ist somit die Dreieckszerlegung berechnet, so kann man $Ax = r$ umschreiben zu

$$(LR)x = r \iff L(Rx) = r$$
$$\iff Ly = r \wedge Rx = y$$

Dies sind zwei lineare Gleichungssysteme, die man aber jeweils leicht durch

<u>Vorwärts- bzw. Rückwärtssubstitution</u>

lösen kann:

$Ly = r$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ u_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & u_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$y_1 := r_1$

$\underline{\text{für } i = 2, \ldots, n}$: $y_i = r_i - u_i y_{i-1}$

$Rx = y$:

$$\begin{pmatrix} v_1 & b_1 & & & 0 \\ & v_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} \\ 0 & & & & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

$x_n := y_n / v_n$

$\underline{\text{für } i = n-1, n-2, \ldots, 1:}$

$x_i := (y_i - b_i x_{i+1}) / v_i$

Algorithmus: (4.6)

$y_1 := r_1$

<u>für $i = 2, .., n$</u>

$y_i := r_i - u_i\, y_{i-1}$.

$x_n := y_n / v_n$

<u>für $i = n-1, n-2, .., 1$</u>

$x_i := (y_i - b_i\, x_{i+1}) / v_i$.

Vorausgesetzt wurde hierbei, daß die v_i (<u>Pivotelemente</u>) nicht verschwinden.

4.3 Berechnung kubischer Splines

<u>Gegeben</u> sei ein Gitter

$$\Delta: \; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

und Interpolationsdaten $f_k = f(x_k)$, $k = 0, .., n$ einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

<u>Gesucht</u> ist $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

<u>i)</u> $s|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \Pi_3 \quad (k = 0, 1, .., n-1)$

<u>ii)</u> $s(x_k) = f_k$

<u>iii)</u> $s \in C^2[a,b]$

Zur Bestimmung von $s(x)$ verwenden wir die **lokale Darstellung**

$$s(x) = a_k + b_k(x-x_k) + c_k(x-x_k)^2 + d_k(x-x_k)^3 =: p_k(x) \quad \text{für } x_k \le x \le x_{k+1} \tag{4.7}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten $a_k, .., d_k$ schreiben wir neben den Funktionswerten auch die ersten Ableitungen vor:

$$\begin{aligned} p_k(x_k) &= f_k \quad, & p_k(x_{k+1}) &= f_{k+1} \\ p_k'(x_k) &= f_k' \quad, & p_k'(x_{k+1}) &= f_{k+1}' \end{aligned} \tag{4.8}$$

Beachte: Die f_j' sind eigentlich nicht bekannt. Sie müssen in einem zweiten Schritt erst bestimmt werden!

Eine leichte Rechnung ergibt die eindeutige Lösung:

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= f_k, \qquad b_k = f_k' \\ c_k &= \frac{3 f[x_k, x_{k+1}] - 2 f_k' - f_{k+1}'}{h_k} \\ d_k &= \frac{f_k' + f_{k+1}' - 2 f[x_k, x_{k+1}]}{h_k^2} \end{aligned}} \tag{4.9}$$

Dabei ist $h_k := x_{k+1} - x_k$ die Gitter-Schritt-weite.

Wären die $f_0', .., f_n'$ bekannt, so könnte man mittels (4.9), (4.7) den Spline $s(x)$ berechnen (eindeutig!). s wäre dann nach Konstruktion eine C^1-Funktion auf $[a,b]$.

Wir haben nun die $f_0', .., f_n'$ so zu bestimmen, dass s sogar eine C^2-Funktion wird:

Forderung:

$$\forall\, k = 1, .., n-1 : \quad p_{k-1}''(x_k) = p_k''(x_k)$$

$\Longrightarrow$

$$2 c_{k-1} + 6 d_{k-1} h_{k-1} = 2 c_k$$

$\underset{(4.9)}{\Longrightarrow} \ldots \Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{h_{k-1}} f_{k-1}' + 2\left(\frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k}\right) f_k' + \frac{1}{h_k} f_{k+1}' = r_k \\ &r_k := 3\left(\frac{f[x_{k-1}, x_k]}{h_{k-1}} + \frac{f[x_k, x_{k+1}]}{h_k}\right) \\ &k = 1, \ldots, n-1 \qquad (4.10) \end{aligned}}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die $f_0', \dots, f_n'$.

In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h_0} & 2\left(\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_1}\right) & \frac{1}{h_1} & & & & 0 \\ & \frac{1}{h_1} & 2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & \frac{1}{h_{n-2}} & 2\left(\frac{1}{h_{n-2}}+\frac{1}{h_{n-1}}\right) & \frac{1}{h_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0' \\ f_1' \\ \vdots \\ f_{n-1}' \\ f_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dies sind $(n-1)$ Gleichungen für $(n+1)$ Unbekannte. $\Longrightarrow$ Zur eindeutigen Festlegung von $f_0', \dots, f_n'$ werden zwei Zusatzbedingungen benötigt.

Typ I: Vorgabe der Randableitungen f_0', f_n'

In obigem lin. Gleichungssystem werden die Terme mit f_0', f_n' auf die rechte Seite gebracht:

$$\begin{bmatrix} 2\left(\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_1}\right) & \frac{1}{h_1} & & & 0 \\ \frac{1}{h_1} & 2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1/h_{n-2} \\ 0 & & & \frac{1}{h_{n-2}} & 2\left(\frac{1}{h_{n-2}}+\frac{1}{h_{n-1}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 - f_0'/h_0 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-2} \\ r_{n-1} - f_n'/h_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \underline{(4.11)}$$

Die Koeffizientenmatrix ist symmetrisch und strikt diagonaldominant.

$\Longrightarrow$ (Später!)
1.) Matrix ist regulär
2.) (4.11) ist eindeutig lösbar
3.) Algorithmus (4.5), (4.6) durchführbar und stabil!

Typ II : Natürlicher Spline

Es werden die natürlichen Randbedingungen gefordert:

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0 \qquad \underline{(4.12)}$$

Diese Randbedingungen werden von der „Straklatte" erfüllt: Die Krümmung verschwindet am Rand!

Mit (4.7) folgt:

$$c_0 = c_{n-1} + 3\, d_{n-1}\, h_{n-1} = 0$$

$$\underset{(4.9)}{\Longrightarrow} \qquad \frac{2}{h_0} f_0' + \frac{1}{h_0} f_1' = 3\, \frac{f[x_0, x_1]}{h_0} =: r_0 \qquad \underline{(4.13)}$$

$$\frac{1}{h_{n-1}} f_{n-1}' + \frac{2}{h_{n-1}} f_{n-1}' = 3\, \frac{f[x_{n-1}, x_n]}{h_{n-1}} =: r_n$$

Zusammen mit dem linearen Gleichungs= system (4.10) ergibt sich ein $(n+1, n+1)$-dim. lin. Gleichungssystem: $\underline{(4.14)}$

$$\begin{bmatrix} 2\frac{1}{h_0} & \frac{1}{h_0} & & & & \\ \frac{1}{h_0} & 2\left(\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_1}\right) & \frac{1}{h_1} & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \\ & 0 & \frac{1}{h_{n-2}} & 2\left(\frac{1}{h_{n-2}}+\frac{1}{h_{n-1}}\right) & \frac{1}{h_{n-1}} \\ & & & \frac{1}{h_{n-1}} & 2\frac{1}{h_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0' \\ f_1' \\ \vdots \\ f_{n-1}' \\ f_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}$$

(4.14) lässt sich analog zu (4.11) mit dem Algorithmus (4.5), (4.6) lösen!

Typ III : Periodischer Spline

Ist die Funktion f periodisch mit Periode $b-a$, so gilt

$$f_0 = f(a) = f(b) = f_n .$$

Es ist dann sinnvoll, zu verlangen, dass auch $s(x)$ periodisch ist und somit

$$s'(x_0) = s'(x_n) \,, \quad s''(x_0) = s''(x_n) \qquad \underline{(4.15)}$$

gilt.

Mit (4.9) und Elimination von f_0' findet man:

$$\frac{f_1'}{h_0} + \frac{f_{n-1}'}{h_{n-1}} + 2\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_{n-1}}\right) f_n' =$$

$$= 3\left(\frac{f[x_0,x_1]}{h_0} + \frac{f[x_{n-1},x_n]}{h_{n-1}}\right) =: r_n$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2\left(\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_1}\right) & \frac{1}{h_1} & & & \frac{1}{h_0} \\ \frac{1}{h_1} & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \frac{1}{h_{n-2}} & 2\left(\frac{1}{h_{n-2}}+\frac{1}{h_{n-1}}\right) & \frac{1}{h_{n-1}} \\ \frac{1}{h_0} & & & \frac{1}{h_{n-1}} & 2\left(\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_{n-1}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \vdots \\ \\ f_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \\ r_n \end{bmatrix}$$

$\underline{(4.16)}$

Die numerische Lösung dieses linearen Gleichungssystems erfolgt mittels so genannter Modifikationstechnik. Dazu schreibt man die Koeffizientenmatrix als $A + uv^T$, wobei A symmetrisch und tridiagonal ist und $u := (1, 0, \dots, 0, 1)^T$, $v := (\frac{1}{h_0}, 0, \dots, 0, \frac{1}{h_0})^T$.

Nach der so genannten Sherman-Morrison-Formel:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$$

lässt sich die Lösung des lin. Gleichungssystems mit

$$(A + uv^T)^{-1} r = A^{-1} r - \frac{v^T (A^{-1} r)}{1 + (A^{-1} u)^T v} (A^{-1} u)$$

reduzieren auf zwei lin. Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrix A.

4.4. Minimaleigenschaft

Definition (4.17)

a) $S_{3,\Delta} := S_3(x_0, \dots, x_n)$

$$:= \left\{ s \in C^2[x_0, x_n] \;\middle|\; \forall i : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3 \right\}$$

bezeichne den $\mathbb{R}$-Vektorraum der kubischen Splinefunktionen zum Gitter

$$\Delta = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}.$$

b) Zu $f \in C^2[a,b]$ bezeichne

$$\mathrm{Int}(f) := \left\{ g \in C^2[a,b] \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i = 0,1,\dots,n : g(x_i) = f_i \\ \forall j = 0,n : g'(x_j) = f_j' \end{array} \right\}$$

die Menge der interpolierenden C^2-Funktionen.

Dabei ist $f_i := f(x_i)$, $f_j' = f'(x_j)$.

Satz (4.18) Typ I

Für den interpolierenden kub. Spline $s_f \in \mathrm{Int}(f) \cap S_{3,\Delta}$ gilt:

a) $\forall g \in \mathrm{Int}(f)$: $\displaystyle\int_a^b s_f''(x)^2\,dx \le \int_a^b g''(x)^2\,dx$

b) $\forall s \in S_{3,\Delta}$:

$$\int_a^b \left(f''(x) - s_f''(x)\right)^2 dx \leq \int_a^b \left(f''(x) - s''(x)\right)^2 dx$$

Interpretation:

a) Unter allen interpolierenden C^2-Funktionen minimiert $s_f(x)$ das Holladay-Funktional

$$I(y) = \int_a^b \left(y''(x)\right)^2 dx$$

(Approximation der Krümmung).

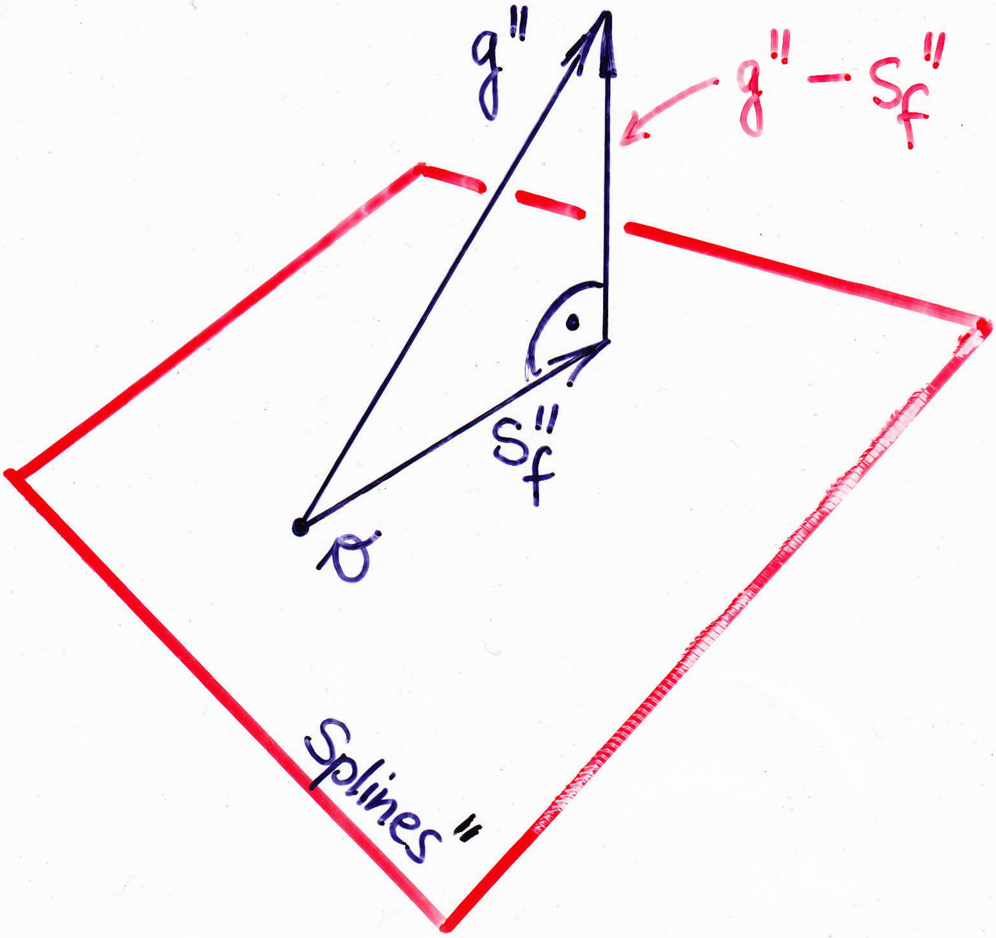
b) Unter allen Splinefunktionen ist $s_f(x)$ diejenige, für die die 2. Ableitung $f''(x)$ am Besten approximiert wird.

c) Analoge Aussagen zu a) gelten auch für die Spline-Interpol. vom Typ II / III.

Beweis zu (4.18):

Wir zeigen zunächst: $\forall s \in S_{3,\Delta}$:

$$\forall g \in \mathrm{Int}(f): \int_a^b s''(x)\left[g''(x) - s_f''(x)\right] dx = 0 \qquad (4.19)$$



Skalarprodukt: $\langle u,v \rangle := \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx$

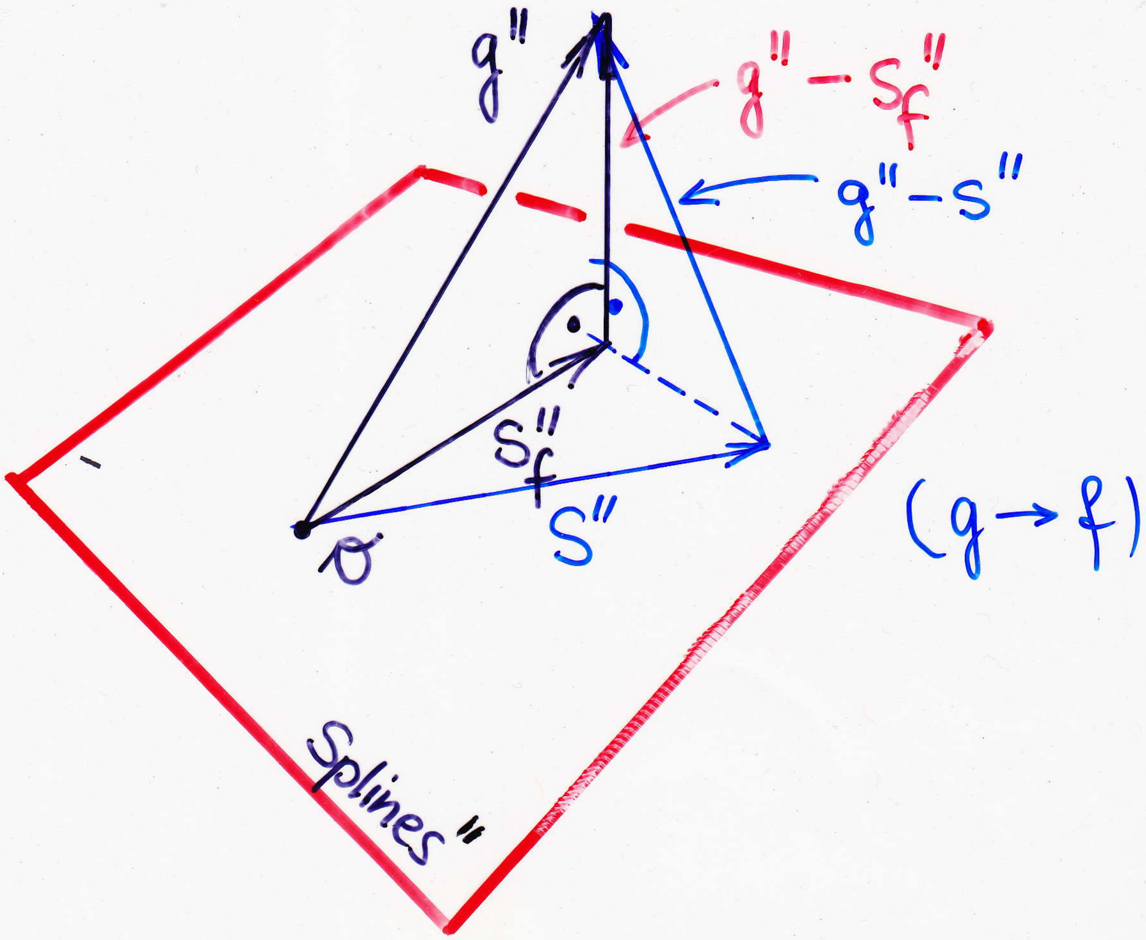
Norm: $\|u\| := \sqrt{\langle u,u \rangle}$

$\Longrightarrow$

1.) $\|s_f''\| \leq \|g''\|$ (Pythagoras)

2.) $\|g'' - s_f''\| \leq \|g'' - s''\|$

(setze dann $g := f$)



Skalarprodukt : $\langle u,v\rangle := \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx$

Norm : $\|u\| := \sqrt{\langle u,u\rangle}$

$\Longrightarrow$

1.) $\|s_f''\| \leq \|g''\|$ (Pythagoras)

2.) $\|g'' - s_f''\| \leq \|g'' - s''\|$

(setze dann $g := f$)

Zweimalige partielle Integration:

$$\int_a^b s''(g''-s_f'')\,dx = \sum_0^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s''(g''-s_f'')\,dx$$

$$= \sum_0^{n-1} \left\{ s''(g'-s_f')\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - s'''(g-s_f)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \right.$$

$$\left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} s^{(4)}(g-s_f)\,dx \right\}$$

Der erste Summand verschwindet wegen der Stetigkeit von $s''(g'-s_f')$ und wegen $g'=s_f'=f'$ in x_0 und x_n.

Der zweite Summand verschwindet wegen $g=s_f=f$ in allen x_i, $i=0,1,\dots,n$.

Der dritte Summand verschwindet wegen $s^{(4)}=0$.

zu a):

$$\int_a^b (g''-s_f'')^2 = \int_a^b (g'')^2 - \int_a^b (s_f'')^2 - 2\int_a^b s_f''(g''-s_f'')$$

$$\underset{(4.19)}{=} \int_a^b (g'')^2 - \int_a^b (s_f'')^2 \geq 0.$$

zu b):

$$\int_a^b (f''-s'')^2 = \int_a^b (f''-s_f''+s_f''-s'')^2$$

$$= \int_a^b (f'' - s_f'')^2 + \int_a^b (s_f'' - s'')^2 +$$

$$+ 2 \int_a^b (f'' - s_f'')\, s_f'' - 2 \int_a^b (f'' - s_f'')\, s''$$

$$\overset{(4.19)}{=} \int_a^b (f'' - s_f'')^2 + \int_a^b (s_f'' - s'')^2$$

$$\geq \int_a^b \left(f''(x) - s_f''(x)\right)^2 dx \qquad \blacktriangle$$

Definition (4.20)

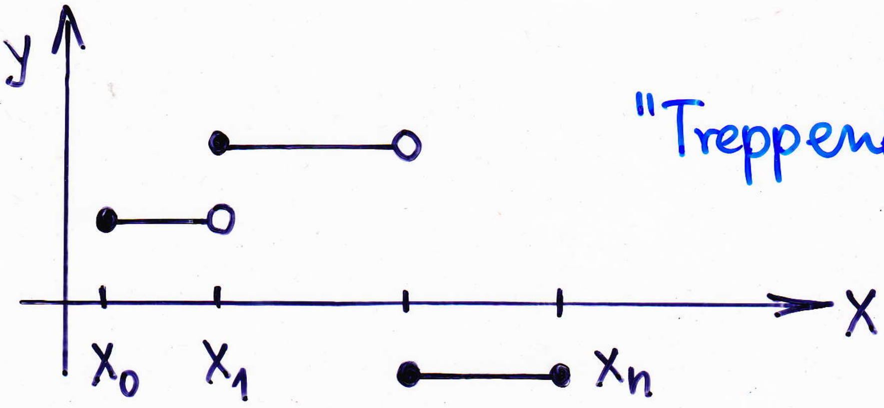
In Verallgemeinerung von (4.17) definiert man für $m \in \mathbb{N}_0$ und Knoten

$$\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

Splinefunktionen vom Grad m durch:

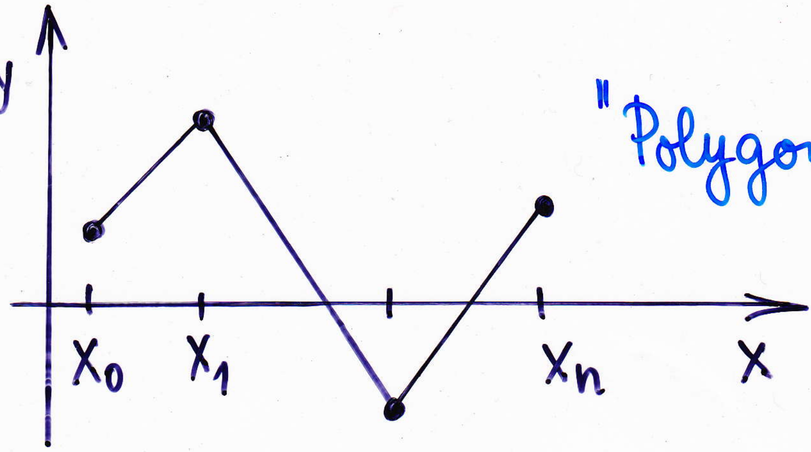
$$S_{m,\Delta} := \Big\{ s \in C^{m-1}[a,b] \;\Big|\; s|_{[x_i, x_{i+1}[} \in \Pi_m \;(i = 0, \ldots, n-2) \text{ und } s|_{[x_{n-1}, x_n]} \in \Pi_m \Big\}$$

$m=0$:



"Treppenfunktion"

$m=1$:



"Polygonzug"

Satz (4.21)

$S_{m,\Delta}$ ist ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^{[a,b]}$ mit der Dimension: $\dim S_{m,\Delta} = m+n$.

Beweis:

Die Vektorraum-Eigenschaft von $S_{m,\Delta}$ ist klar.

Darstellung von $s \in S_{m,\Delta}$:

$$\forall k: \quad s(x) = p_k(x) \in \Pi_m, \quad x_k \le x < x_{k+1}$$

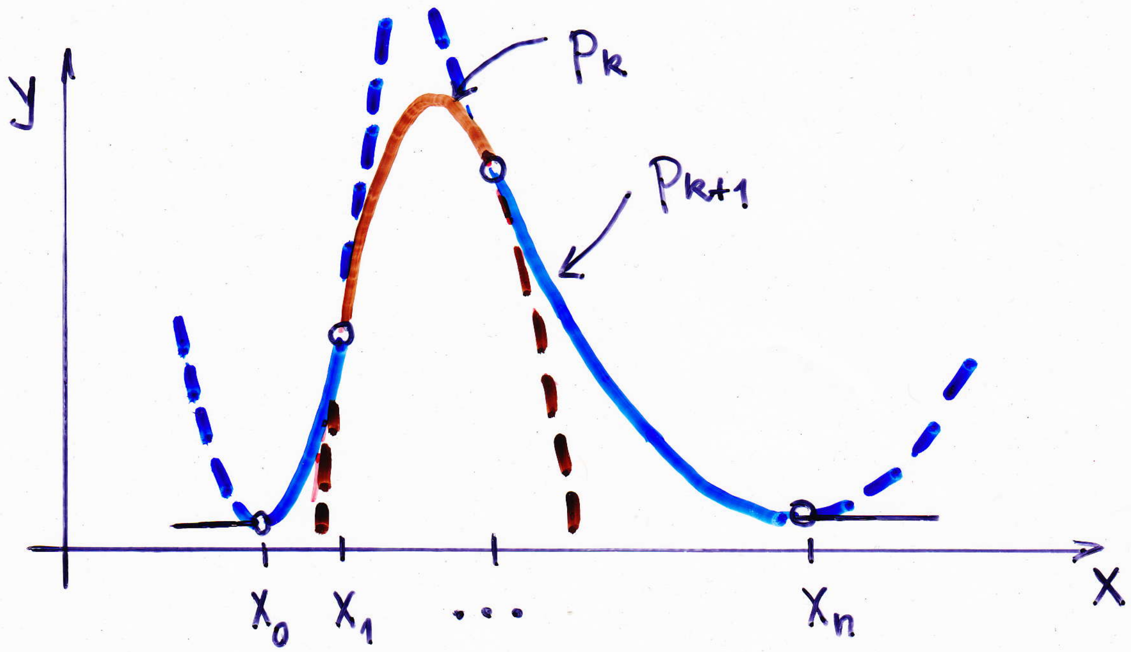
$\Longrightarrow$

$s \in C^{m-1}$

a) $p_0(x) \in \mathrm{Spann}\{1, (x-x_0), \dots, (x-x_0)^m\}$

b) $p_{k+1}(x) - p_k(x) = \beta_{k+1}(x - x_{k+1})^m$

$(x \geq x_{k+1},\ k = 0, 1, \dots, n-2)$



Setzt man also

$$(x - x_k)_+^m := \begin{cases} 0 & : x < x_k \\ (x-x_k)^m & : x \geq x_k \end{cases} \qquad (4.22)$$

so erhält man die Basisdarstellung

$$\boxed{s(x) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j (x-x_0)^j + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k (x-x_k)_+^m} \qquad (4.23)$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten α_j, β_k.

$$\Longrightarrow \quad \dim S_{m,\Delta} = (m+1) + (n-1) = m+n$$

▲

4.5 Darstellung mit B-Splines

Für viele Anwendungen von Splines (u.a. im CAD-Bereich oder bei der Lösung partieller Differentialgln.) wird eine Darstellung verwendet, bei der die Basis-Splines (B-Splines) einen möglichst kleinen, kompakten Träger besitzt.

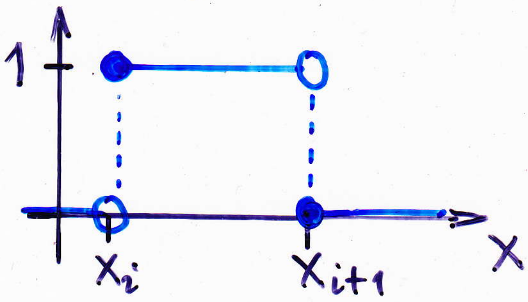
Definition (4.24)

Zu einem erweiterten Gitter

$$\Delta_m' = \{x_{-m} < \ldots < x_{-1} < x_0 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < x_{n+m}\}$$

definieren wir die **B-Splines** $B_{i,m}(x)$, $i = -m, \ldots, n-1$ durch die Rekursion:

$$B_{i,0}(x) := \begin{cases} 1 : & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 : & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\boxed{B_{i,k}(x) := \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x) \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \quad i = -m, \ldots, n+m-k-1}$$

Neville-Schema:

$$\begin{array}{llll}
B_{i,0} & & & \\
B_{i+1,0} & B_{i,1} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \\
B_{i+m,0} & B_{i+m-1,1} & \cdots & B_{i,m}
\end{array}$$

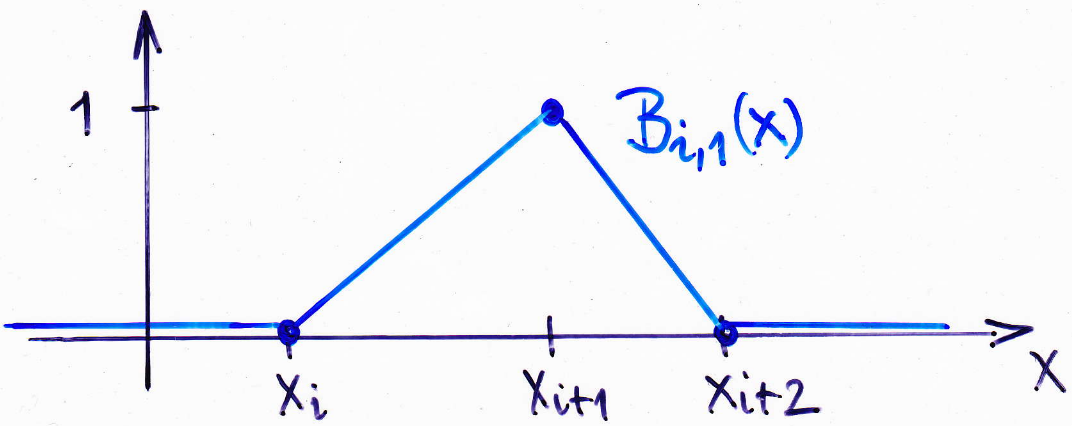
$i = -m, \ldots, n-1$

Beachte: Die $B_{i,k}(x)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, sie verschwinden jedoch außerhalb von $[x_i, x_{i+k+1}]$.

k=1:

$$B_{i,1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} B_{i,0}(x) + \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} B_{i+1,0}(x)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & : \text{für } x_i \le x < x_{i+1} \\[2ex] \dfrac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} & : \text{für } x_{i+1} \le x < x_{i+2} \end{cases}$$



Zur numerischen Auswertung der B-Splines genügt es wiederum, ein eindimensionales Feld zu verwenden und das Tableau – bei zeilenweiser Berechnung folgendermaßen abzuspeichern:

$$\begin{array}{llll} B_0 & & & \\ B_1 & B_0 & & \\ B_2 & B_1 & B_0 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ B_m & B_{m-1} & \dots & B_0 \end{array}$$

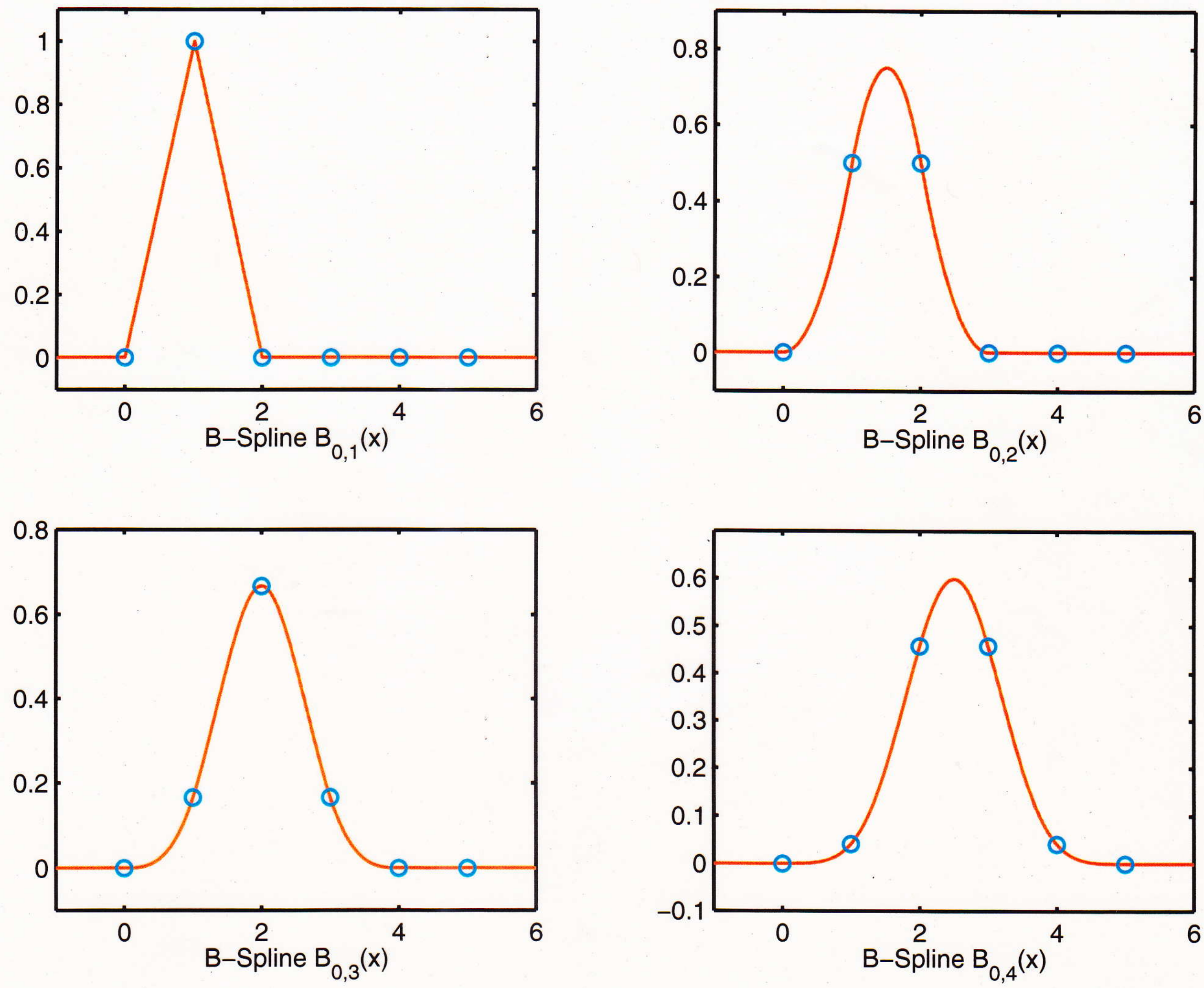
Algorithmus (4.25) (i, m und x gegeben)

für $k = 0, 1, \dots, m$

$$B_k := \begin{cases} 1 : & \text{für } x_{i+k} \le x < x_{i+k+1} \\ 0 : & \text{sonst} \end{cases}$$

für $l = k-1, k-2, \dots, 0$

$$B_l = \frac{x - x_{i+l}}{x_{i+k} - x_{i+l}} B_l + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+l+1}} B_{l+1}$$


B–Spline B0,1(x)
B–Spline B0,2(x)
B–Spline B0,3(x)
B–Spline B0,4(x)

Wir notieren (ohne Beweis) einige Eigenschaften der B-Splines:

Satz (4.26)

a) $B_{i,k}$ ist ein Spline vom Grad k bzgl. des erweiterten Gitters Δ_m' $(k = 0, 1, .., m)$

b) $B_{i,k}$ hat den Träger $[x_i, x_{i+k+1}]$ mit $B_{i,k}(x) > 0$ für $x_i < x < x_{i+k+1}$

c) $\forall x \in [a,b]: \quad \sum_{i=-m}^{n-1} B_{i,k}(x) = 1$

(Zerlegung der Eins)

d) Die Splinefunktionen $B_{i,m}$, $i = -m, .., n-1$ bilden eine Basis von $S_{m,\Delta}$.

(→ de Boor: A practical guide to splines, Springer, 1978)