

12. Die Fourier-Transformation

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist die bekannte **Fourier-Entwicklung** einer T -periodischen, stückweise stetigen bzw. stückweise stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nach Analysis II gelten die folgenden Darstellungen

A. Komplexe Darstellung (12.1)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{i k \omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$
$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-i k \omega \tau} d\tau$$

B. Reelle Darstellung (12.2)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k \omega t) + b_k \sin(k \omega t)]$$

$$a_k = 2 \operatorname{Re} \gamma_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos(k \omega \tau) d\tau$$

$$b_k = -2 \operatorname{Im} \gamma_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin(k \omega \tau) d\tau$$

- Unter den entsprechenden Voraussetzungen konvergieren die jeweiligen Reihen – mit denen aus f berechneten Fourier-Koeffizienten – punktweise und in kompakten Intervallen, in denen f stetig ist, auch gleichmäßig gegen f .

In Unstetigkeitsstellen von f konvergieren die Reihen gegen den Mittelwert $(f(t^-) + f(t^+))/2$.

Die **Grundidee der Fourier-Transformation** besteht nun darin, die obigen Darstellungen durch Grenzwertbildung $T \rightarrow \infty$ auf nichtperiodische Funktionen zu übertragen.

Setzt man die Fourier-Koeffizienten in (12.1) ein, so erhält man

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau \right) \Delta\omega, \quad (12.3)$$

wobei $\Delta\omega := \omega := 2\pi/T$ und $\omega_k := k\Delta\omega$, $k \in \mathbb{Z}$.

(12.3) lässt sich als **Riemann-Summe** der Funktion $e^{i\omega t} F_T(\omega)$

mit $F_T(\omega) := \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau$ zur Zerlegung $\{\omega_k : k \in \mathbb{Z}\}$

interpretieren (t fest).

Für $T \rightarrow \infty$ erhalten wir formal (d.h. ohne Konvergenzaussage) die folgende Darstellung

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 \text{(b)} \quad F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau
 \end{aligned}
 \tag{12.4}$$

- Die in (12.4) b) definierte Funktion $F(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$ heißt (sofern existent) die **Fourier-Transformierte** oder **Spektralfunktion** von f . Sie lässt sich interpretieren als Dichtefunktion der in f enthaltenen harmonischen Schwingungen. (12.4) a) heißt **Fourier-Integral** oder **spektrale Zerlegung** von f . Beide uneigentlichen Integrale sind im Sinn des **Cauchyschen Hauptwertes** zu berechnen.

- Andere Schreibweisen: $\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) = F(\omega)$, dabei bezeichnet \mathcal{F} den *Operator der Fourier-Transformation*.

Reelle Darstellung. Durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil erhalten wir aus (12.4)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) (\cos(\omega \tau) - i \sin(\omega \tau)) d\tau =: a(\omega) - i b(\omega)$$

sowie

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) (\cos(\omega \tau) + i \sin(\omega \tau)) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (a(\omega) - i b(\omega)) (\cos(\omega \tau) + i \sin(\omega \tau)) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega \tau) + b(\omega) \sin(\omega \tau)) d\omega \end{aligned}$$

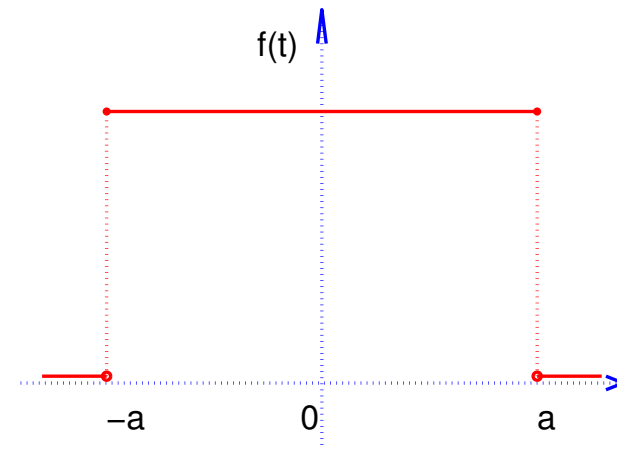
Zur letzten Umformung beachte man, dass $a(\omega)$ eine gerade und $b(\omega)$ eine ungerade Funktion ist.

Zusammengefasst ergibt sich das Sinus-, Cosinus Spektrum:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega \tau) + b(\omega) \sin(\omega \tau)) d\omega \\ a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau \\ b(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega \tau) d\tau \end{aligned} \quad (12.5)$$

Beispiel (12.6) Rechteckimpuls

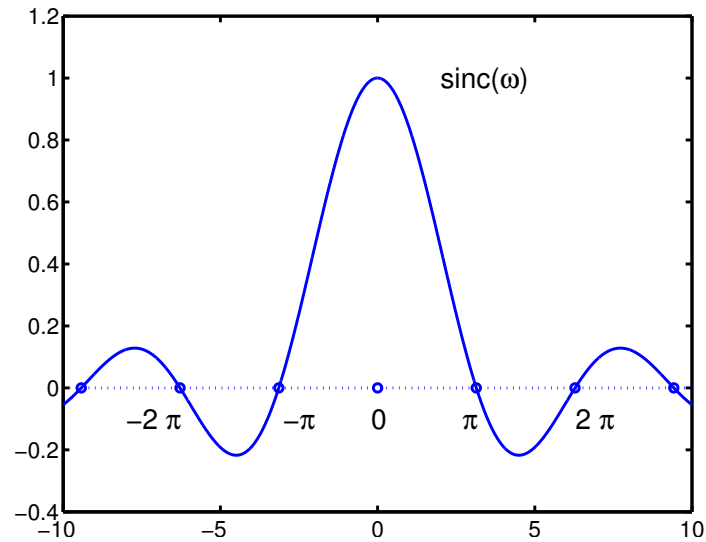
$$f(t) = \begin{cases} 1 & : -a \leq t \leq a, \\ 0 & : |t| > a. \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt \\
&= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-a}^a = -\frac{1}{i\omega} [e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}] \\
&= \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin(\omega a) & : \text{für } \omega \neq 0, \\ 2a & : \text{für } \omega = 0 \end{cases} \\
&= 2a \operatorname{sinc}(\omega a).
\end{aligned}$$

Dabei wird die **sinc-Funktion** definiert durch

$$\operatorname{sinc}(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} \sin(z) & : \text{für } z \neq 0, \\ 1 & : \text{für } z = 0. \end{cases} \quad (12.7)$$

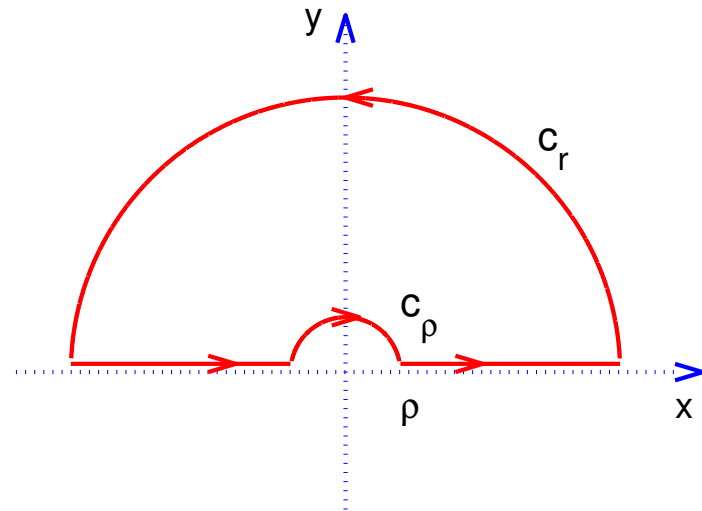


Umkehrung:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a) \cos(\omega t)}{\omega} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega (a + t)) + \sin(\omega (a - t))}{\omega} d\omega.
 \end{aligned}$$

Es sind somit zwei Integrale vom Typ CHW $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$ zu berechnen. Hierzu lässt wieder der Residuensatz verwenden; vgl. Abschnitt 11. Wir integrieren - analog zu (11.9) - über den folgenden stkw. C^1 -Weg.

$$\text{CHW} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx \quad (\alpha > 0)$$



Mit einer analogen Abschätzung wie in (11.5) finden wir

$$\int_{C_r} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

Ferner folgt mittels Laurent-Entwicklung $e^{i\alpha z}/z = 1/z + h(z)$, wobei h holomorph auf \mathbb{C} ist. Somit folgt

$$\int_{C_\rho} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz = \int_{C_\rho} \frac{1}{z} dz + \int_{C_\rho} h(z) dz,$$

mit $\int_{C_\rho} h(z) dz \rightarrow 0$ für $\rho \downarrow 0$ und

$$\int_{C_\rho} \frac{1}{z} dz = - \int_0^\pi \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \rho i e^{i\phi} d\phi = -\pi i.$$

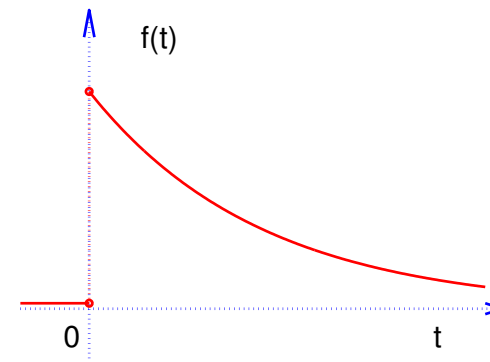
Insgesamt ist also $\int_{C_\rho} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \rightarrow -\pi i$ ($\rho \downarrow 0$), und damit

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \begin{cases} \pi, & \text{für } \alpha > 0, \\ 0, & \text{für } \alpha = 0, \\ -\pi, & \text{für } \alpha < 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[F](t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| < a, \\ 1/2, & \text{für } |t| = a, \\ 0, & \text{für } |t| > a. \end{cases}$$

Beispiel (12.8) Kondensator Entladung

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & : t \geq 0, \\ 0 & : t < 0. \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt &= \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\
&= -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} &= \frac{1}{a+i\omega} \quad (a > 0).
\end{aligned}$$

Umkehrung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a+i\omega} e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega t - iat} t d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - iat} dx,
\end{aligned}$$

wobei $x := \omega t$, $dx = t d\omega$.

Für $t \neq 0$ lässt sich das Integral mit Satz (11.5) berechnen.

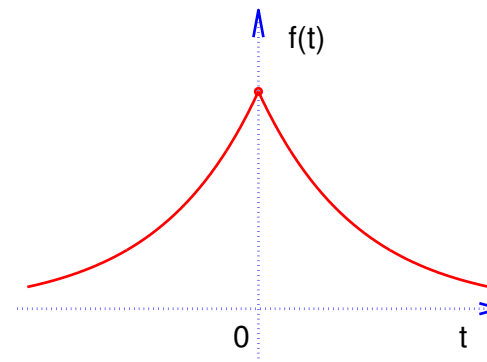
Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z - i a t}; z_k \right) \\ &= \begin{cases} e^{-a t}, & \text{für } t > 0, \\ 0, & \text{für } t < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Für $t = 0$ ergibt sich durch direkte Berechnung des (ersten) Integrals $\mathcal{F}^{-1}[F](0) = 1/2$ (Mittelwertesigenschaft).

Beispiel (12.9)

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0.$$



$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\
&= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.
\end{aligned}$$

Satz (12.10) (Existenz, Eindeutigkeit)

a) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stkw. stetig und absolut integrierbar, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$, so existiert die Fourier-Transformierte

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$. Das Integral konvergiert gleichmäßig und $F = \mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig auf \mathbb{R} .

b) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stkw. C^1 -Funktion und absolut integrabel, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die folgende Umkehrformel

$$\frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)) = \text{CHW} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

c) Sind $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stkw. C^1 -Funktionen und absolut integrabel und besitzen diese die gleiche Fourier-Transformierte, also $F_1(\omega) = F_2(\omega)$, ($\forall \omega \in \mathbb{R}$), so folgt $f_1(t) = f_2(t)$ in allen Punkten $t \in \mathbb{R}$, in denen f_1 und f_2 stetig sind.

Es sei angemerkt, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stkw. stetig, bzw. eine stkw. C^1 -Funktion genannt wird, wenn sie dies auf jedem kompakten Teilintervall von \mathbb{R} ist.

Rechenregeln.

Im Folgenden sein $f, g, \dots : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stkw. stetig differenzierbar und absolut integrabel. Mit $F(\omega), G(\omega), \dots$ werden ihre Fourier-Transformierten bezeichnet.

(1) Linearität.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f + g](\omega) &= F(\omega) + G(\omega) \\ \mathcal{F}[\alpha f](\omega) &= \alpha F(\omega)\end{aligned}\tag{12.11}$$

(2) Konjugation.

$$\mathcal{F}[\overline{f}](\omega) = \overline{F(-\omega)}\tag{12.12}$$

Denn: $\mathcal{F}[\overline{f}](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t) e^{-i(-\omega)t}} dt.$

(3) Streckung.

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|} F(\omega/c)\tag{12.13}$$

$$\text{Denn: } \int_{-\infty}^{\infty} f(ct) e^{-i\omega t} dt = \text{sign}(c) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau/c} \frac{1}{c} d\tau.$$

(4) Verschiebungssätze.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t - a)](\omega) &= e^{-i\omega a} F(\omega) \\ \mathcal{F}[e^{i a t} f(t)](\omega) &= F(\omega - a) \end{aligned} \tag{12.14}$$

$$\begin{aligned} \text{Denn: } \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega(\tau+a)} d\tau, \text{ sowie} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i a t} f(t) e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega-a)t} dt. \end{aligned}$$

(5) Faltungssätze.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(f * g)(t)](\omega) &= F(\omega) G(\omega), \\ \mathcal{F}[f(t) g(t)](\omega) &= \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega). \end{aligned} \tag{12.15}$$

Dabei bezeichnet $(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau$ die **Faltung** der Funktionen f und g .

$$\text{Denn: } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-i\omega(t-\tau)} dt g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Beispiel (12.16)

Für die Faltung $g = f * f$ des Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : -1 \leq t \leq 1, \\ 0 & : |t| > 1. \end{cases}$$

erhält man nach leichter Rechnung die „Dachfunktion“

$$g(t) = \int_{\max\{-1, t-1\}}^{\min\{1, t+1\}} 1 d\tau = \begin{cases} 2 - |t| & : -2 \leq t \leq 2, \\ 0 & : |t| > 2. \end{cases}$$

Mit (12.6) und dem Faltungssatz ergibt sich damit für die Fourier-Transformierte von g : $G(\omega) = 4 \operatorname{sinc}^2(\omega)$.

(6) Differentiation.

Ist f eine stückweise C^1 -Funktion mit nur *endlich* vielen Unstetigkeitsstellen t_1, \dots, t_m und sind f und f' absolut integrierbar, so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega F(\omega) - \sum_{k=1}^m \left(f(t_k^+) - f(t_k^-) \right) e^{-i\omega t_k} \quad (12.17)$$

Beweis: (o.E.d.A. für eine Unstetigkeitsstelle)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{t_1} f'(t) e^{-i\omega t} dt + \int_{t_1}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= [f(t) e^{-i\omega t}] \Big|_{-\infty}^{t_1} + [f(t) e^{-i\omega t}] \Big|_{t_1}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \left(f(t_1^-) - f(t_1^+) \right) e^{-i\omega t_1} + i\omega F(\omega) \quad \square \end{aligned}$$

Ist f sogar stetig, so folgt $\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega F(\omega)$.

Entsprechend erhält man für die höheren Ableitungen unter Stetigkeitsvoraussetzungen

$$\mathcal{F}[f^{(s)}](\omega) = (i\omega)^s F(\omega), \quad s \in \mathbb{N}. \quad (12.18)$$

Beispiel (12.19)

Wir suchen eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = c(t),$$

die den Wachstumsbedingungen $\lim_{|t| \rightarrow \infty} y(t) = 0$ und $\lim_{|t| \rightarrow \infty} y'(t) = 0$ genügt. Die Fourier-Transformation ergibt mit (12.18)

$$(-\omega^2 + i\omega a + b) Y(\omega) = C(\omega),$$

wobei Y die Fourier-Transformierte von y und C diejenige von c bezeichnet.

Damit ist also

$$Y(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega a + b} C(\omega)$$

und die Rücktransformation liefert mittels Faltungssatz (12.15) die folgende Lösungsdarstellung

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega$$

Beispiel (12.20) (RC - Tiefpass)

Bei vorgegebenem Spannungsverlauf $u_1(t)$ ist eine Lösung $u(t)$ der Differentialgleichung

$$RC u'(t) + u(t) = u_1(t)$$

gesucht (R : Ohmscher Widerstand, C : Kapazität).

Sind u_1 und u Fourier-transformierbar (mit Fourier-Transformierten U_1 und U), so folgt aus obiger Differentialgleichung

$$U(\omega) = \frac{U_1(\omega)}{1 + i\omega RC}.$$

Die **Übertragungsfunktion** $H(\omega) := 1/(1 + i\omega RC)$ ist nun nach Beispiel (12.8) die Fourier-Transformierte von

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} & : t > 0, \\ 0 & : t < 0. \end{cases}$$

Damit ergibt sich nun aus dem Faltungssatz die Darstellung

$$u(t) = (h * u_1)(t) = \frac{1}{RC} \int_0^{\infty} u_1(\tau) e^{-(t-\tau)/(RC)} d\tau.$$

Es sei angemerkt, dass dies die einzige Lösung der Differentialgleichung ist, die die Wachstumsbedingung $u(t) \rightarrow 0$, für $|t| \rightarrow \infty$, erfüllt.

Anwendungen.

Wir betrachten noch zwei Anwendungen der Fourier-Transformation auf partielle Differentialgleichungen.

Beispiel (12.21) (Wärmeleitung)

Wir untersuchen die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung für einen unendlich langen Stab.

$$\begin{aligned}u_t(t, x) &= c u_{xx}(t, x), & -\infty < x < \infty, & \quad t \geq 0, \\u(x, 0) &= u_0(x).\end{aligned}$$

Bilden wir die Fourier-Transformation bzgl. der Variablen x , also $U(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx$, so folgt

$$\begin{aligned}U_t(\omega, t) &= c (i\omega)^2 U(\omega, t), & U(\omega, 0) &= U_0(\omega), \\ \Rightarrow U(\omega, t) &= U_0(\omega) e^{-c\omega^2 t},\end{aligned}$$

wobei U_0 die Fourier-Transformierte der Anfangsfunktion u_0 bezeichnet. Zur Rücktransformation verwenden wir wieder den Faltungssatz und bestimmen dazu zunächst das Urbild der Funktion $e^{-ct\omega^2}$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}[e^{-ct\omega^2}] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct\omega^2} e^{i\omega x} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-([\sqrt{ct}\omega]^2 - ix/\sqrt{ct}[\sqrt{ct}\omega] - \frac{x^2}{4ct})} e^{-\frac{x^2}{4ct}} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4ct}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-([\sqrt{ct}\omega] - \frac{ix}{2\sqrt{ct}})^2} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} e^{-\frac{x^2}{4ct}}.
 \end{aligned}$$

Die Anwendung des Faltungssatzes ergibt nunmehr

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}} u_0(\xi) d\xi \quad (12.22)$$

Man beachte, dass die obige Herleitung nur formal ist, da wir die Existenz der Fourier-Transformationen nicht nachgewiesen haben. Der in (12.22) auftretende Faktor

$$G(x, \xi, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}}, \quad t > 0,$$

heißt wie früher *Greensche Funktion*.

Beispiel (12.23) (Potentialgleichung)

Wir betrachten das folgende Potentialproblem auf der Halbebene

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x \in \mathbb{R}, & y \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Die Fourier-Transformation bzgl. der Variablen x ergibt

$$U_{yy}(\omega, y) = -(i\omega)^2 U(\omega, y) = \omega^2 U(\omega, y)$$

und somit $U(\omega, y) = C_1 e^{|\omega|y} + C_2 e^{-|\omega|y}$.

Da wir nur Lösungen betrachten, die für $|y| \rightarrow \infty$ verschwinden, muss $C_1 = 0$ sein und somit

$$U(\omega, y) = U_0(\omega) e^{-|\omega|y}.$$

Zur Rücktransformation liefert zunächst das Beispiel (12.9)

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\omega|y}] = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2 + x^2}$$

und hiermit und dem Faltungssatz

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} u_0(\xi) d\xi. \quad (12.24)$$

(12.24) heißt die **Poissonsche Integralformel für die Halbebene**.

Das Abtastproblem.

Von einer hinreichend glatten Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien nur die Werte auf einem äquidistanten Gitter $t_k = k \Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$, bekannt. Wir fragen, ob sich hieraus die Funktion f auch zwischen den Knoten rekonstruieren lässt. Allgemein wird sich nur etwas aussagen lassen, wenn man voraussetzt, dass f zu einer bestimmten Funktionenklasse gehört.

Beispiel: Ist f etwa ein Polynom vom Höchstgrad n , so braucht man nur $n + 1$ Stützstellen $(t_k, f_k)_{k=0, \dots, n}$ zu kennen, um hieraus f mittels Polynom-Interpolation rekonstruieren zu können.

Beispiel: Sei f eine T -periodische Funktion mit der Fourier-Entwicklung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Fordern wir, dass die Amplituden γ_k nur für endlich viele Frequenzen $\omega_k = k\omega$ nicht verschwinden, so ist f ein trigonometrisches Polynom $f(t) = \sum_{k=-m}^m \gamma_k e^{ik\omega t}$. Die $(2m + 1)$ Unbekannten γ_k , $k = -m, \dots, m$ lassen sich mittels *trigonometrischer Interpolation* aus den f_k -Werten bestimmen; vgl. Lehrbuch (16.3.11). Hierzu braucht man wenigstens die Knoten

$$t_k = k \Delta t, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad \Delta t = \frac{T}{N}, \quad N = 2m + 1.$$

Man fordert also weiterhin für die Abtastrate

$$\Delta t \leq \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{(2m + 1)\omega} =: \frac{\pi}{\Omega},$$

wobei $\Omega := \frac{2m+1}{2} \omega \approx m\omega$ die *Bandbreite* bezeichnet.

Wir übertragen das letzte Beispiel nun auf den aperiodischen Fall.

Dazu lauten die entsprechenden Forderungen an eine (Fouriertransformierbare) Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die so genannten **Nyquist-Bedingungen**

- I. f besitzt endliche Bandbreite, d.h. es gibt ein $\Omega > 0$ mit $F(\omega) = 0$ für alle $|\omega| > \Omega$.
- II. Die Abtastfrequenz $2\pi/\Delta t$ ist mindestens doppelt so groß wie die Bandbreite, also $\Delta t \leq \pi/\Omega$.

Satz (12.25) (Abtasttheorem von Shannon)

Unter den genannten Voraussetzungen lässt sich f aus den Daten $f(t_k)$, $t_k := k \Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$ rekonstruieren.

Beweis: (ohne Konvergenzuntersuchungen) Aufgrund der Voraussetzung I lässt sich f folgendermaßen schreiben

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (12.26)$$

Wir setzen $F(\omega)$, $\omega \in [-\Omega, \Omega]$, 2Ω -periodisch auf \mathbb{R} fort und betrachten die zugehörige Fourier-Reihe

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{i k (\pi/\Omega) \omega}, \quad -\Omega \leq \omega \leq \Omega. \quad (12.27)$$

Für die Fourier-Koeffizienten gilt nun nach Lehrbuch (16.1.11) und (12.26)

$$\gamma_k = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{-i k (\pi/\Omega) \omega} d\omega = \frac{\pi}{\Omega} f(-t_k). \quad (12.28)$$

Dabei haben wir o.E.d.A. $\Delta t = \pi/\Omega$ angenommen (andernfalls würde man Ω entsprechend vergrößern).

Setzt man nun (12.27) in (12.26) ein, so lässt sich umformen

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{i(t+k(\pi/\Omega))\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i(t+k(\pi/\Omega))\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \frac{1}{i(t+k(\pi/\Omega))} e^{i(t+k(\pi/\Omega))\omega} \Big|_{\omega=-\Omega}^{\Omega} \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \frac{\sin(\Omega t + k\pi)}{(t+k(\pi/\Omega))} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) \frac{\sin(\Omega t - k\pi)}{(\Omega t - k\pi)},
\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus (12.28) ergibt. Damit ist f allein durch die Werte $f(t_k)$ dargestellt worden. \square