

3. Möbius-Transformationen

A. Die stereographische Projektion

Bei der Untersuchung rationaler Funktionen auf \mathbb{C} erweist es sich als zweckmäßig, die Lücken des Definitionsbereiches (= Nullstellen des Nenners) dadurch zu schließen, dass man der Funktion dort den Wert ∞ zuordnet (sofern nicht zugleich der Zähler verschwindet). Man definiert

Definition:

∞ : unendlich ferner Punkt

$$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Rechenregeln:

$$a + \infty := \infty, \quad a \cdot \infty := \infty \quad (a \neq 0), \quad a/\infty := 0$$

Warnung: $0 \cdot \infty$ und $\infty \pm \infty$ lassen sich nicht sinnvoll definieren.

\mathbb{C}^* ist ein topologischer Raum, eine Umgebungsbasis von ∞ ist durch die Komplemente von ε -Kugeln gegeben.

Es gilt dann für eine Folge $z_n \in \mathbb{C}$, $z_n \neq 0$:

$$z_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \iff 1/z_n \rightarrow 0.$$

\mathbb{C}^* ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in \mathbb{C}^* besitzt einen Häufungspunkt. Man nennt \mathbb{C}^* daher auch die **Einpunkt-Kompaktifizierung** von \mathbb{C} .

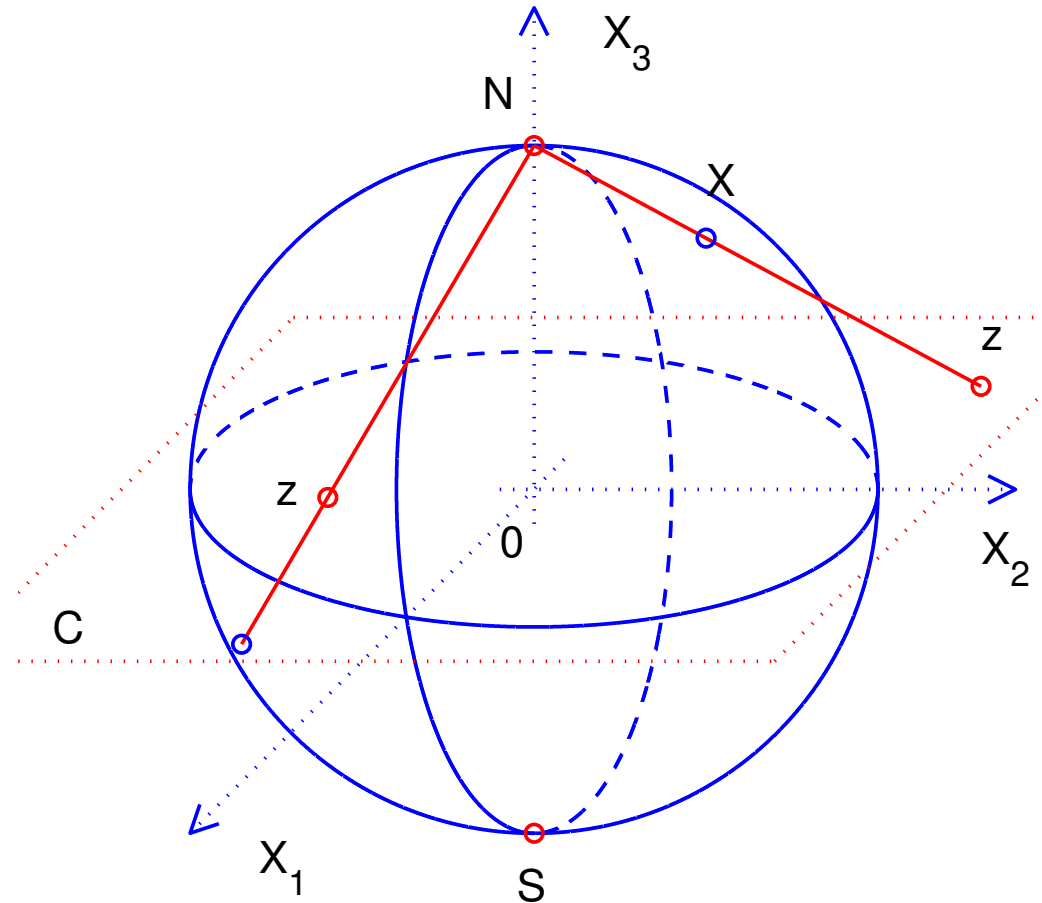


Abb 3.1. Stereographische Projektion

Die stereographische Projektion ist eine Abbildung der Riemannschen Zahlenkugel $S^2 := \{X \in \mathbb{R}^3 : \|X\| = 1\}$ auf die erweiterte komplexe Ebene \mathbb{C}^* . Sie ordnet einem Punkt $X \in S^2$, $X \neq N$ den Durchstoßpunkt der Geraden durch X und N durch die $z = (x, y)$ -Ebene zu. Ferner: $P(N) := \infty$.

Analytische Darstellung (3.1):

$$z = P(X) = \frac{X_1 + iX_2}{1 - X_3}$$

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T$$

Die stereographische Projektion $P : S^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist **bijektiv**. Die obere Kugelhälfte wird auf $|z| > 1$ abgebildet, die untere auf $|z| < 1$. Der Äquator bleibt fest.

Satz (3.2) (Kreistreue)

- Das sphärische Bild (= Urbild unter der stereographischen Projektion) einer Geraden in \mathbb{C}^* (einschließlich des Punktes ∞) ist ein Kreis auf S^2 , der durch N geht. Und umgekehrt!
- Das sphärische Bild eines Kreises in \mathbb{C} ist ein Kreis auf S^2 , der nicht durch N geht. Und umgekehrt!

Beweis: Durch direktes Nachrechnen mittels (3.1). \square

Kreise und Geraden in \mathbb{C}^* werden als **verallgemeinerte Kreise** in \mathbb{C}^* bezeichnet. Nach obigem Satz gehen also verallgemeinerte Kreise in \mathbb{C}^* unter der (inversen) stereographischen Projektion in Kreise der Riemannschen Zahlenkugel über.

B. Möbius-Transformationen.

Rationale Abbildungen der Form

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad \neq bc. \quad (3.3)$$

heißen Möbius-Transformationen.

- Zähler und Nenner haben verschiedene Nullstellen.
- T wird als Abbildung $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ interpretiert. Dabei ist $T(-d/c) := \infty$, $T(\infty) := a/c$.
- $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist bijektiv mit der Umkehrung:

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Merke:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} !$$

- Die Hintereinanderausführung von Möbius-Transformationen ist wieder eine Möbius-Transformation:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad \neq cb$$

$$u = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \quad \alpha\delta \neq \gamma\beta$$

$$\Rightarrow u = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Satz (3.4) (Kreistreue)

Möbius-Transformationen sind kreistreu, d.h. verallgemeinerte Kreise in \mathbb{C}^* gehen durch eine Möbius-Transformation wieder in verallgemeinerte Kreise über.

Beweis: Für $c = 0$ ist die Aussage klar, da T dann eine lineare Abbildung ist. Für $c \neq 0$ zerlegen wir die Abbildung wie folgt

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \frac{1}{cz + d}.$$

Da lineare Abbildungen aber kreistreu sind, genügt es zu zeigen, dass die Inversion $f(z) := 1/z$ kreistreu ist. Hierzu unterziehen wir f der stereographischen Projektion (die ja nach (3.2) kreistreu ist), d.h. wir untersuchen, welche Abbildung $F(X)$ der Riemannschen Zahlenkugel in sich der Abbildung f entspricht.

Nach (3.1) gilt

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T.$$

Für das Bild von $1/z$ folgt genauso

$$\begin{aligned}
 X' &= F(X) = P^{-1}(1/z) \\
 &= \left(\frac{1/z + 1/\bar{z}}{1 + (1/z)(1/\bar{z})}, \frac{1/z - 1/\bar{z}}{i(1 + (1/z)(1/\bar{z}))}, \frac{(1/z)(1/\bar{z}) - 1}{1 + (1/z)(1/\bar{z})} \right)^T \\
 &= \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, -\frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, -\frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T \\
 &= (X_1, -X_2, -X_3)^T
 \end{aligned}$$

$F(X)$ beschreibt also die Drehung der Sphäre um 180° um die X_1 -Achse. Diese Abbildung ist aber offensichtlich kreistreu und damit ist es auch die Inversion, da ja $f = P \circ F \circ P^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc}
 z & \xrightarrow{P^{-1}} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow F \\
 1/z & \xleftarrow{P} & X'
 \end{array}$$

Bemerkungen (3.5)

Es sei wieder $w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad \neq bc$.

- Verallgemeinerte Kreise durch den Punkt $-(d/c)$ werden durch die Möbius-Transformation (3.3) in Geraden der w -Ebene abgebildet.
- Alle Geraden der z -Ebene werden in verallgemeinerte Kreise der w -Ebene durch den Punkt (a/c) abgebildet.
- Kreise, die nicht durch den Punkt $-(d/c)$ gehen werden in Kreise abgebildet, die nicht durch den Punkt (a/c) gehen.

Satz (3.6) (Doppelverhältnis)

Gegeben seien zweimal drei paarweise verschiedene Punkte z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 in \mathbb{C}^* .

Dann gibt es genau eine Möbius-Transformation (3.3) $w = T(z)$ mit $\forall j = 1, 2, 3 : w_j = T(z_j)$ (Interpolation!).

Diese ist gegeben durch die Dreipunkteformel

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Bemerkung (3.7) Der Ausdruck

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

heißt das **Doppelverhältnis** der Punkte $z_k, k = 0, \dots, 3$.

Beispiel (3.8) Gesucht ist eine Möbius-Transformation mit der folgenden Abbildungseigenschaft

$$\begin{array}{c|ccc} z_k & 1 & i & 0 \\ \hline w_k & i & -i & 0 \end{array}$$

Nach der Dreipunkteformel ergibt sich

$$\frac{w - i}{w + i} \cdot \frac{0 - i}{0 + i} = \frac{z - 1}{z - i} \cdot \frac{0 - 1}{0 - i}.$$

Die Auflösung dieser Beziehung nach w liefert dann

$$w = T(z) = \frac{(1 + i)z}{(1 + i)z - 2i}.$$

Man überprüfe die Interpolationsbedingungen!

Definition (3.9) Liegen die Punkte z und z' wie in der folgenden Abbildung, so sagt man, sie liegen **symmetrisch zum Kreis C**: $|z - z_0| = R$.

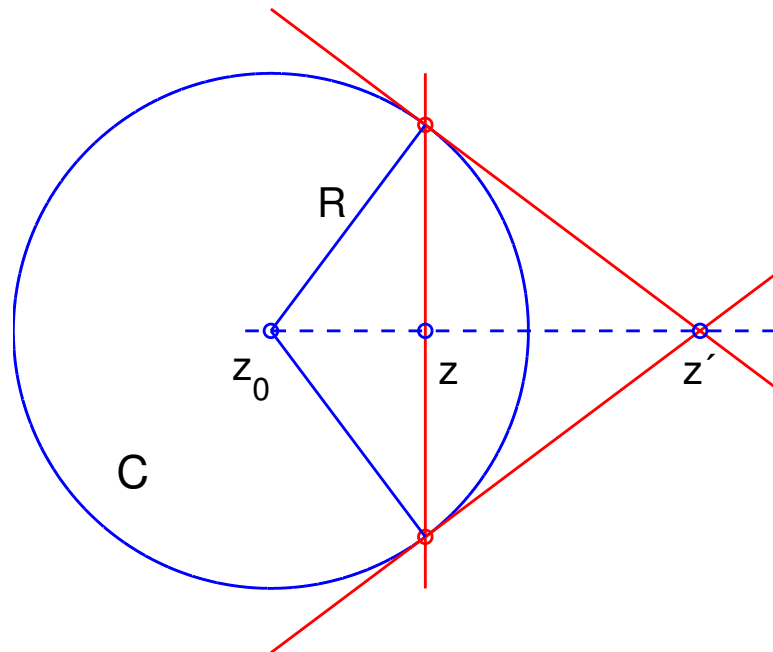


Abb 3.2. Symmetrie zum Kreis

Bemerkungen (3.10)

- Die Abbildung $z \rightarrow z'$ heißt auch **Inversion am Kreis** oder **Spiegelung am Kreis**.
- Es ist immer ein Punkt z mit $|z - z_0| \leq R$ zu einem Punkt z' mit $|z' - z_0| \geq R$ symmetrisch. Gilt $|z - z_0| = R$, so ist z zu sich selbst symmetrisch. Der Punkt $z = z_0$ ist zu $z' = \infty$ symmetrisch.
- Analytische Darstellung der Inversion am Kreis:

$$(z - z_0) (\overline{z' - z_0}) = R^2$$

- In Ergänzung sagt man, zwei Punkte z und z' liegen **symmetrisch zu einer Geraden**, wenn sie durch Spiegelung an dieser Geraden ineinander übergehen.

Satz (3.11)

Möbius-Transformationen erhalten die Symmetrie zu verallgemeinerten Kreisen. Genauer: Ist C ein verallgemeinerter Kreis in \mathbb{C}^* und liegen z und z' symmetrisch zu C , so liegen die Bilder von z und z' unter einer Möbius-Transformation symmetrisch zum Bild von C , das ja nach 3.4 ebenfalls ein verallgemeinerter Kreis ist.

Beispiel (3.12)

Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, die den Kreis $|z| = 2$ in den Kreis $|w + 1| = 1$ abbildet und für die gilt $T(-2) = 0$ und $T(0) = i$.

Lösung: $z_2 := 0$ und $z_3 := \infty$ liegen symmetrisch zu $|z| = 2$. Daher müssen auch die Bilder $w_2 = i$ und $w_3 := T(\infty)$ symmetrisch zum Kreis $|w + 1| = 1$ liegen. Nach (3.10) gilt also $(w_2 + 1) \overline{(w_3 + 1)} = 1$ und damit $w_3 = 0.5(-1 + i)$.

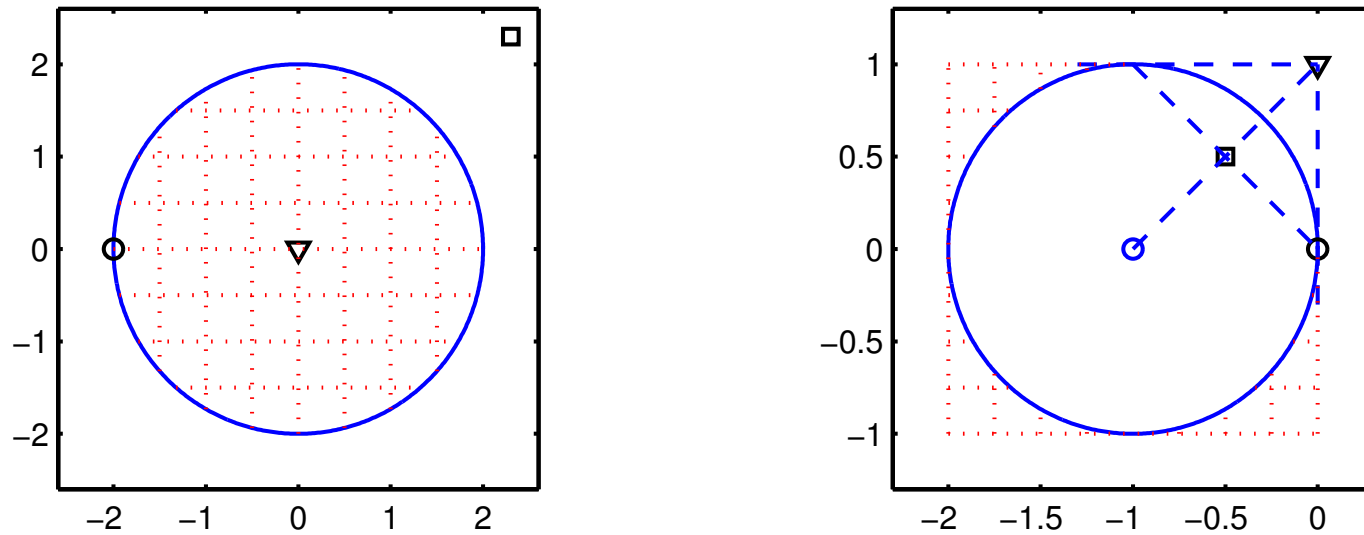


Abb 3.3. Möbius-Transformation

Mit der Dreipunkteformel folgt nun

$$\left(\frac{w - 0}{w - i}\right) : \left(\frac{w_3 - 0}{w_3 - i}\right) = \left(\frac{z + 2}{z - 0}\right) : \left(\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0}\right) \Big|_{z_3 \rightarrow \infty}.$$

Auflösung nach w ergibt $w = T(z) = -\frac{z + 2}{(1 + i)z + 2i}.$

Beispiel (3.13) Gesucht sei eine Möbius-Transformation, die $\text{Im } z \geq 0$ in $|w| \leq 1$ abbildet und einen vorgegebenen Punkt z_1 mit $\text{Im } z_1 > 0$ in $w_1 = 0$ transformiert.

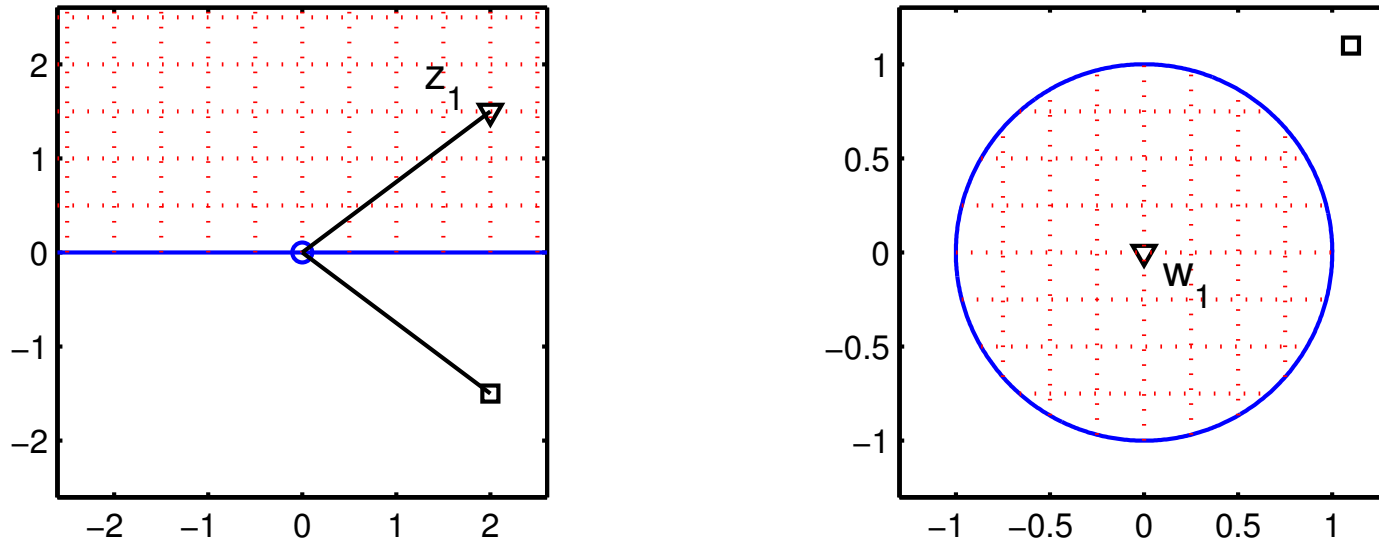


Abb 3.4. Möbius-Transformation

Lösung: Aus Symmetriegründen muss $z_2 := \bar{z}_1$ in $w_2 = \infty$ abgebildet werden; damit folgt $w = c \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1}$, $|c| = 1$.

Beispiel (3.14) Für $b > a > 0$ betrachten wir die folgende Möbius-Transformation

$$w = T(z) = \frac{z + p}{-z + p}, \quad p := \sqrt{ab} \in]a, b[.$$

Wir werten einige Punkte aus

$$z_{1,2} = \pm p \quad \rightarrow \quad w_{1,2} = \infty, 0,$$

$$z_{3,4} = a, b \quad \rightarrow \quad w_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} =: \pm \rho, \quad \rho > 1,$$

$$z_{5,6} = -a, -b \quad \rightarrow \quad w_{5,6} = \pm \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \pm \frac{1}{\rho},$$

$$z_{7,8} = 0, \infty \quad \rightarrow \quad w_{7,8} = 1, -1.$$

Damit wird die x -Achse auf die u -Achse abgebildet und symmetrisch zur x -Achse liegende Punkte werden auf Punkte symmetrisch zur u -Achse abgebildet. Insbesondere werden Kreise symmetrisch zur x -Achse auf Kreise symmetrisch zur u -Achse abgebildet.

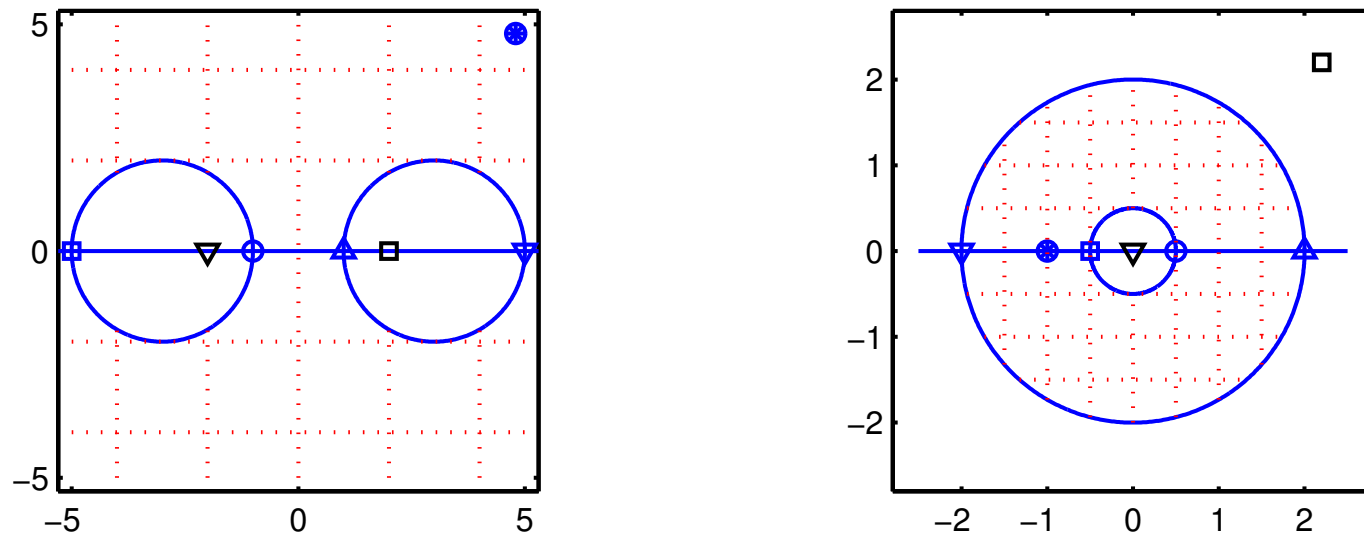


Abb 3.5. Möbius-Transformation

Anwendung: Das elektrostatische Feld im Äußeren von zwei stromdurchflossenen parallelen Leitern wird in das Feld eines Zylinderkondensators abgebildet.