

Hans Joachim Oberle
Universität Hamburg

Komplexe Funktionen

Vorlesung an der TUHH im Sommersemester 2013

Freitags, 9:45 - 11:15, Audimax II

Literatur.

R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, T. Sonar:
Mathematik für Ingenieure 2.
Wiley-VCH , 2011.

P. Henrici, R. Jelsch: Komplexe Analysis für Ingenieure.
(2 Bände), Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

R. Remmert, G. Schumacher: Funktionentheorie I u. II.
Springer Verlag, Heidelberg, 2002/2007.

1. Einleitung und Wiederholung

Das mathematische Gebiet, das in dieser Vorlesung behandelt wird, heißt auch *Komplexe Analysis* oder *Funktionentheorie*, genauer: *Theorie der analytischen Funktionen*.

Es behandelt die Analysis (Differentiation und Integration) komplexer Funktionen $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$, wobei G ein Gebiet in der komplexen Ebene ist.

Zur Erinnerung: Ein *Gebiet* ist eine offene und zusammenhängende Menge. Eine Menge $G \subset \mathbb{C}$ heißt *offen*, wenn mit jedem Punkt $z_0 \in G$ auch eine Kreisscheibe $K_\varepsilon(z_0) := \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ zur Menge G gehört.

Sie heißt *zusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $z_0, z_1 \in G$ stets eine diese Punkte verbindende C^1 -Kurve $c : [0, 1] \rightarrow G$ in G gibt.

Historische Anmerkungen.

Die Funktionentheorie wurde in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickelt. Sie hat drei Väter, die ganz unterschiedliche Zugänge zu der Theorie analytischer Funktionen entwickelt haben.

Augustin Cauchy (1798-1857; Paris): Komplexe Differenzierbarkeit, Integraldarstellung analytischer Funktionen.

Bernhard Riemann (1826-1866; Göttingen): Geometrische Eigenschaften so genannter konformer Abbildungen.

Karl Weierstraß (1815-1897; Münster, Braunschweig, Berlin): Potenzreihendarstellung komplexer Funktionen.
(Eine elegante Darstellung dieses Zugangs findet man in dem Buch von *Henry Cartan*: Elementare Theorie analytischer Funktionen, 1961).

Wiederholung.

$(\mathbb{R}, +, *, \leq)$ ist ein **vollständiger, angeordneter Körper**

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ ist **reeller Vektorraum** mit Operationen

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \lambda (x, y) &:= (\lambda x, \lambda y), \quad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Es lässt sich auf \mathbb{R}^2 auch eine **Multiplikation** definieren:

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1), \tag{1.2}$$

so dass $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, *)$ ein **kommutativer Körper** wird mit **Null-element** $0 := (0, 0)$ und **Einselement** $1 := (1, 0)$.

Inverse Elemente:

$$\begin{aligned} -z &:= (-x, -y), \\ 1/z &:= \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Die reellen Zahlen lassen sich als Teilmenge von \mathbb{C} interpretieren vermöge $x := (x, 0)$. \mathbb{C} ist eine *Körpererweiterung* von \mathbb{R} .

Setzt man $i := (0, 1)$, so lässt sich jede komplexe Zahl eindeutig schreiben in der Form

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) * (y, 0) = x + iy$$

Die komplexe Zahl i heißt *imaginäre Einheit*. Es gilt $i^2 = -1$.

Real- und Imaginärteil: $\operatorname{Re}(z) := x, \operatorname{Im}(z) := y$

Konjugiert komplexe Zahl: $\bar{z} := x - iy = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$

Betrag, Modul: $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$

Polarkoordinaten: Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $r > 0$ und $\phi \in]-\pi, \pi]$ mit

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) =: r e^{i\phi} \quad (1.4)$$

Es ist $r = |z|$ der **Modul** und $\phi =: \arg(z)$ das **Argument** der komplexen Zahl z . Es gelten

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}, & z^n &= r^n e^{i n \phi} \\ \arg(z_1 * z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

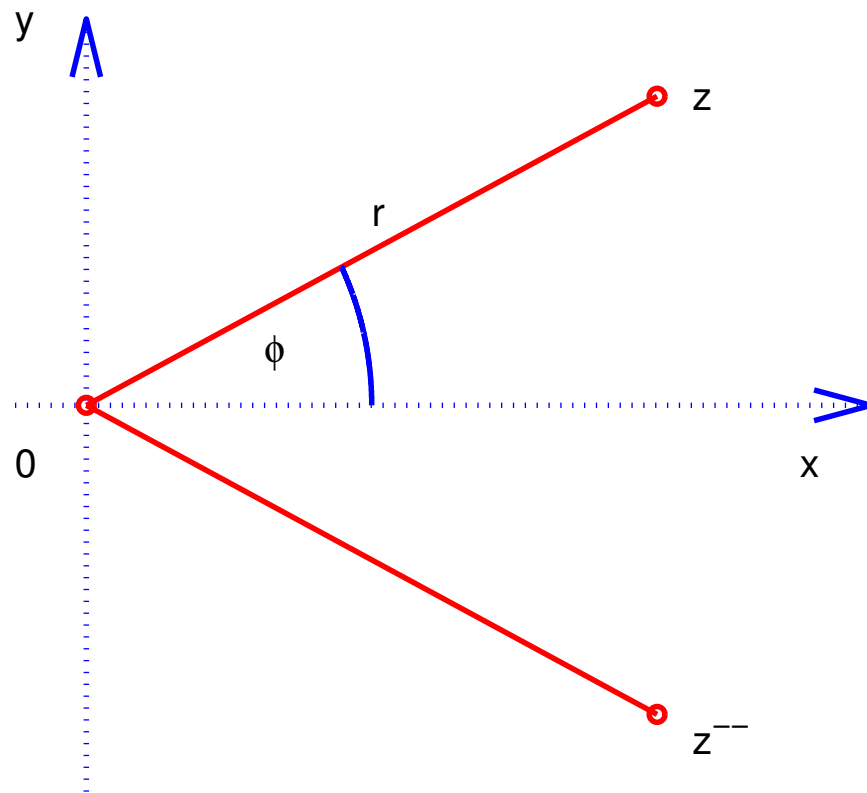


Abb 1.1. Polarkoordinaten und konjugiert komplexe Zahl

Lineare Abbildungen.

Eine Abbildung $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt \mathbb{R} -linear, wenn gelten

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \text{(ii)} \quad & L(\lambda z) = \lambda L(z), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Nach Linearer Algebra besitzt jede \mathbb{R} -lineare Abbildung L eine Matrixdarstellung

$$L(z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{Streckungen}),$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{Drehungen}).$$

Definition (1.6) Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt \mathbb{C} -linear, wenn (1.5) (ii) sogar für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

Hierzu genügt es nachzuweisen, dass $L(i) = iL(1)$ gilt (Übungsaufgabe!). Nun sieht man mit der Matrixdarstellung

$$\begin{aligned} L(i) = iL(1) &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist L genau dann eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, wenn sie durch eine Matrix folgender Gestalt beschrieben wird

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Drehungen und Streckungen sind vom Typ (1.7), sie stellen also \mathbb{C} -lineare Abbildungen dar, während Spiegelungen an Ursprungsgeraden (wegen ihrer negativer Determinante) keine \mathbb{C} -linearen Abbildungen sind.

In diesem Zusammenhang ist es naheliegend zu fragen, wann sich eine C^1 -Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ in erster Näherung durch eine \mathbb{C} -lineare Funktion approximieren lässt. Dies bedeutet gerade, dass die Jacobi-Matrix $Jf(x, y)$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung beschreibt, dass also nach (1.7) mit $f = u + i v$ gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.8)$$

Dies sind die so genannten **Cauchy – Riemannsches Differentialgleichungen**.

Konvergenz.

Per Definition gilt für eine komplexe Folge $(z_n) = (x_n + i y_n)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z & : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0 \\ & \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y. \end{aligned}$$

Satz von Bolzano, Weierstraß: Jede beschränkte Folge (z_n) besitzt eine konvergente Teilfolge.

Folgerung (1.9) Der Körper der komplexen Zahlen ist **vollständig**, d.h. jede Cauchy-Folge in \mathbb{C} ist konvergent.

Der Beweis erfolgt wie im reellen Fall, vgl. (8.2.19). \square

Konvergenzkriterien für Reihen.

Majorantenkriterium, Quotientenkriterium und Wurzelkriterium gelten analog auch für komplexe Reihen

$$|a_k| \leq b_k \wedge \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ kvgt.} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ abs. kvgt.}$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ abs. kvgt.}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ abs. kvgt.}$$

Analog gelten auch Umordnungssatz (8.4.11) und Reihenproduktsatz (8.4.13) für komplexe Reihen.

Potenzreihen.

Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ mit $a_k, z_0 \in \mathbb{C}$ besitzt einen **Konvergenzradius** $r \in [0, \infty]$, so dass $f(z)$ für $|z - z_0| < r$ absolut konvergiert und für $|z - z_0| > r$ divergiert.

Gleichmäßige Konvergenz liegt auf jeder (abgeschlossenen) Kreisscheibe $\overline{K}_\rho(z_0) := \{z : |z - z_0| \leq \rho\}$ mit $0 < \rho < r$ vor.

Prominente Beispiele (mit $r = \infty$) sind

- Exponentialfunktion: $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$

- Sin/Cos: $\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Die folgenden Umformungen sind aufgrund der lokal gleichmäßigen Konvergenz der verwendeten Potenzreihen gerechtfertigt

$$\begin{aligned}\exp(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iy)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} i^k y^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} i^{2k} y^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} i^{2k+1} y^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} \\ &= \cos(y) + i \sin(y)\end{aligned}$$

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) (\cos(y) + i \sin(y))$$

$$\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x) \cos(iy) + \cos(x) \sin(iy)$$

$$\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (iy)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} y^{2k} = \cosh y$$

$$\begin{aligned} \sin(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (iy)^{2k+1} = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= i \sinh(y) \end{aligned}$$

$$\sin(z) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$$

Aufgaben.

- Leiten Sie eine analoge Formel für $\cos(z)$ her.
- Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\sin z = 2$.