6. Die dreidimensionale Wellengleichung

Wir suchen Lösungen $u(\mathbf{x}, t)$ der folgenden AWA für die 3-D Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2\,\Delta_3 u \;&=\; 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) \;&=\; u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) \;=\; v_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Wir nehmen an, dass (6.1) ein Lösung u besitzt und versuchen, eine explizite Darstellung zu gewinnen. Durch Umkehrung der Schlussweise kann man dann Existenz und Eindeutigkeit zeigen.

Definition (6.2) Zu $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$, $r > 0$ heißt

$$M_r[u](\mathbf{x}_0) \;:=\; \frac{1}{4\,\pi} \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} u(\mathbf{x}_0 + r\,\mathbf{n}, t)\,d\omega \tag{6.3}$$

das *sphärische Mittel* von u zum Mittelpunkt $\mathbf{x}_0$ und Radius $r > 0$.

Bemerkung. Das Integral in (6.3) ist das Oberflächenintegral 1. Art über die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$, $d\omega$ ist das zugehörige Oberflächenelement, in Kugelkoordinaten also $d\omega = \cos\psi\, d(\varphi,\psi)$; vgl. Mathem. für Ing. II, (19.3.14).

Natürlich kann man $M_r[u](\mathbf{x}_0)$ auch als Mittel über die Sphäre mit Radius r darstellen

$$M_r[u](\mathbf{x}_0) \;:=\; \frac{1}{4\,\pi\,r^2} \oint\limits_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} u(\mathbf{x},t)\,do, \;\; do = r^2\cos(\psi)\,d(\varphi,\psi).$$

Satz (6.4) Ist u eine Lösung der 3-D Wellengleichung, so erfüllt $w(r,t) \;:=\; r\,M_r[u](\mathbf{x}_0)$ (bei festem $\mathbf{x}_0$) die 1-D Wellengleichung.

Beweis. Wir integrieren die Wellengleichung über die Vollkugel $\overline{K}_r(\mathbf{x}_0)$ (bei festem t)

$$\int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\le r} u_{t\,t}(\mathbf{x},t)\,d\,\mathbf{x} \;=\; c^2 \int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\le r} \Delta u(\mathbf{x},t)\,d\,\mathbf{x}.$$

Auf die rechte Seite wenden wir die erste Greensche Formel (19.3.19) an (mit $f = 1$ und $g = u$)

$$\int_G \left(f\,\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g\rangle\right)\,d\mathbf{x} \;=\; \oint_{\partial G} f\,\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\,do$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\le r} u_{t\,t}(\mathbf{x},t)\,d\,\mathbf{x} \;=\; c^2 \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,do.$$

Beide Integrale werden auf die Einheitskugel bezogen:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\le r} u_{t\,t}(\mathbf{x},t)\,d\,\mathbf{x} \;&=\; \int_0^r \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=\rho} u_{t\,t}(\mathbf{x},t)\,do\,d\rho \\ &=\; \int_0^r \rho^2 \oint\limits_{\|\mathbf{n}\|=1} u_{t\,t}(\mathbf{x}_0+\rho\mathbf{n},t)\,d\omega\,d\rho,\end{aligned}$$

$$\oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, do \;=\; r^2 \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} \frac{\partial}{\partial \rho} u(\mathbf{x}_0+\rho\mathbf{n},t)\Big|_{\rho=r} d\,\omega.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \rho^2 \oint\limits_{\|\mathbf{n}\|=1} u(\mathbf{x}_0+\rho\mathbf{n},t)\, d\omega\, d\rho \;=\; c^2\, r^2 \oint\limits_{\|\mathbf{n}\|=1} \frac{\partial}{\partial r} u(\mathbf{x}_0+r\mathbf{n},t)\, d\,\omega$$

Dies mit dem sphärischen Mittel ausgedrückt ergibt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \rho^2\, M_\rho[u](\mathbf{x}_0)\, d\rho \;=\; c^2\, r^2\, \frac{\partial}{\partial r} M_r[u](\mathbf{x}_0). \tag{6.5}$$

Differentiation nach r $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(r^2\, M_r[u](\mathbf{x}_0)\Big) \;=\; c^2\, r\, \Big(2\,\frac{\partial}{\partial r} M_r[u](\mathbf{x}_0) \;+\; r\frac{\partial^2}{\partial r^2} M_r[u](\mathbf{x}_0)\Big).$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(r\, M_r[u](\mathbf{x}_0)\Big) \;=\; c^2\, \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big(r\, M_r[u](\mathbf{x}_0)\Big). \qquad \square$$

Satz (6.6) Die AWA (6.1) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung. Diese ist gegeben durch die *Lösungsformel nach Liouville*

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(t\,M_{c\,t}[u_0](\mathbf{x})\Big) + t\,M_{c\,t}[v_0](\mathbf{x}),$$

Joseph Liouville (1809-1882); Paris

Beweis. Wir zeigen dies für eine feste Stelle $\mathbf{x}_0$. Nach (5.2) und (6.4) existieren C^2–Funktionen Φ und Ψ mit

$$r\,M_r[u](\mathbf{x}_0) \;=\; \Phi(r-c\,t) \;+\; \Psi(r+c\,t).$$

Für $r\downarrow 0$ ergibt sich hieraus $0 = \Phi(-c\,t)+\Psi(c\,t)$, so dass $\Phi(x) = -\,\Psi(-x)$ und damit

$$r\,M_r[u](\mathbf{x}_0) \;=\; -\,\Psi(-r+c\,t) \;+\; \Psi(r+c\,t). \tag{6.7}$$

Dividiert man diese Gleichung durch r und lässt dann $r\downarrow 0$ gehen, so folgt mit der Regel von d'Hospital

$$u(\mathbf{x}_0,t) \;=\; 2\,\Psi'(c\,t). \tag{6.8}$$

Differenziert man (6.7) nach r und nach t, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,M_r[u]\Big) \;+\; \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(r\,M_r[u]\Big) \;=\; 2\,\Psi'(r+c\,t)$$

Grenzwertbildung $t\downarrow 0$ ergibt mit (6.8)

$$\lim_{t\downarrow 0}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,M_r[u]\Big) \;+\; \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(r\,M_r[u]\Big)\Big] \;=\; 2\,\Psi'(r) \;=\; u(\mathbf{x}_0,\frac{r}{c})$$

$\Rightarrow$

$$u(\mathbf{x}_0,\frac{r}{c}) \;=\; \lim_{t\downarrow 0}\Big[M_r[u] + r\,\frac{\partial}{\partial r}M_r[u] + \frac{r}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}M_r[u]\Big]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Big[\oint\limits_{\|\mathbf{n}\|=1} u(\mathbf{x}_0 + r\,\mathbf{n},0)\,d\omega \;+\; r\oint\limits_{\|\mathbf{n}\|=1}\frac{\partial}{\partial r}u(\mathbf{x}_0 + r\,\mathbf{n},0)\,d\omega$$

$$+\,\frac{r}{c}\oint\limits_{\|\mathbf{n}\|=1} u_t(\mathbf{x}_0 + r\,\mathbf{n},0)\,d\omega\Big]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\|\mathbf{n}\|=1}\Big[u_0(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{n}) + r\langle\nabla u_0(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{n}),\mathbf{n}\rangle + \frac{r}{c}v_0(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{n})\Big]\,d\omega$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\|\mathbf{n}\|=1} \Big[u_0(\mathbf{x}_0 + c\,t\,\mathbf{n}) + \langle \nabla u_0(\mathbf{x}_0 + c\,t\,\mathbf{n}), c\,t\,\mathbf{n} \rangle \\
&\qquad\qquad + \; t\,v_0(\mathbf{x}_0 + c\,t\,\mathbf{n}) \Big] \, d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\|\mathbf{n}\|=1} \Big[\frac{\partial}{\partial t} \Big\{ t\,u_0(\mathbf{x}_0 + c\,t\,\mathbf{n}) \Big\} \; + \; t\,v_0(\mathbf{x}_0 + c\,t\,\mathbf{n}) \Big] \, d\omega \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big\{ t\,M_{c\,t}[u_0](\mathbf{x}_0) \Big\} \; + \; t\,M_{c\,t}[v_0](\mathbf{x}_0). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Bemerkungen (6.9)

• Für den eigentliche Beweis muss die obige Schlussweise umgekehrt werden; man hat ja zu zeigen, dass durch die Liouvillesche Formel tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung gegeben ist. Die Eindeutigkeit folgt aus der obigen Schlussrichtung.

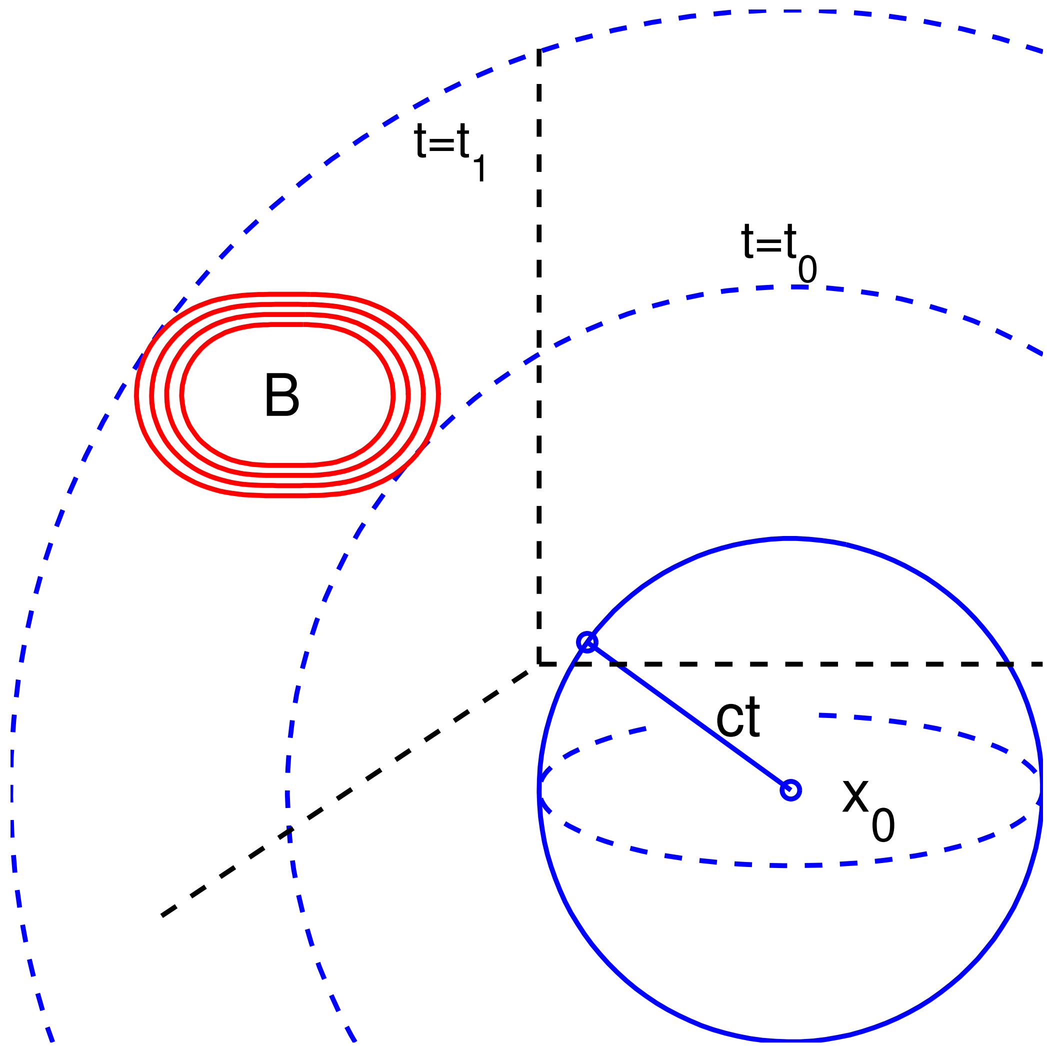
• Nach der Liouvilleschen Formel hängt die Lösung der dreidim. Wellengleichung nur von den sphärischen Mitteln der Anfangsfunktionen zu mit der Zeit wachsenden Radien $r = ct$ ab.

• Eine von einem beschränkten Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ ausgehende Störung (Anfangswerte u_0, v_0 nur in B von Null verschieden) erreicht einen vorgegebenen Punkt $\mathbf{x}_0 \notin B$ also erst zu einer Zeit $t_0 > 0$ und verschwindet in $\mathbf{x}_0$ zu einer festen Zeit $t_1 > t_0$ wieder. Dies ist das *Prinzip von Huygens*, benannt nach Christiaan Huygens (1629-1695).

• Nach einem Satz von **Jacques Hadamard (1865-1963)** gilt das Huygenssche Prinzip nur in Räumen mit ungerader Dimension. Insbesondere ist die Aussage für ebene Schallausbreitung ($\mathbb{R}^2$) falsch, wie wir im Folgenden auch zeigen wollen.

Christiaan Huygens (1629-1695); Den Haag, Paris, London

Jacques Hadamard (1865-1963); Paris


t=t1
t=t0
B
ct
x0

Die zweidimensionale Wellengleichung.

Betrachten wir die analoge Anfangswertaufgaben für die Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} u_{t\,t} - c^2\,\Delta_2 u &= 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Man kann die Lösung von (6.10) aus der Liouvilleschen Formel für den $\mathbb{R}^3$ ableiten, wenn man annimmt, dass die Anfangsfunktionen und die Lösung von x_3 unabhängig ist. Dies ist die sogenannte Abstiegsmethode nach Hadamard.

Wir haben die spärischen Mittel zu berechnen

$$M_r[g](\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\,\pi} \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} g(\mathbf{x}_0 + r\,\mathbf{n}, t)\,d\omega,$$

wobei g von der dritten Komponente $(z_0 + rn_3)$ unabhängig sein soll.

Wir parametrisieren die Einheitssphäre (jeweils obere und untere Kugelkappe) als Graph der Funktion $n_3 = \pm\sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$, bzw.

$$n_1 := \xi_1,\ n_2 := \xi_2,\ n_3 := \pm\sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2}, \quad \text{mit} \quad \|\boldsymbol{\xi}\| \le 1.$$

Für das Oberflächenelement ergibt sich dann nach (19.3.8)

$$d\omega = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}\, d(\xi_1, \xi_2).$$

und wir erhalten für die sphärischen Mittel die 2-dim. (!) Integrale

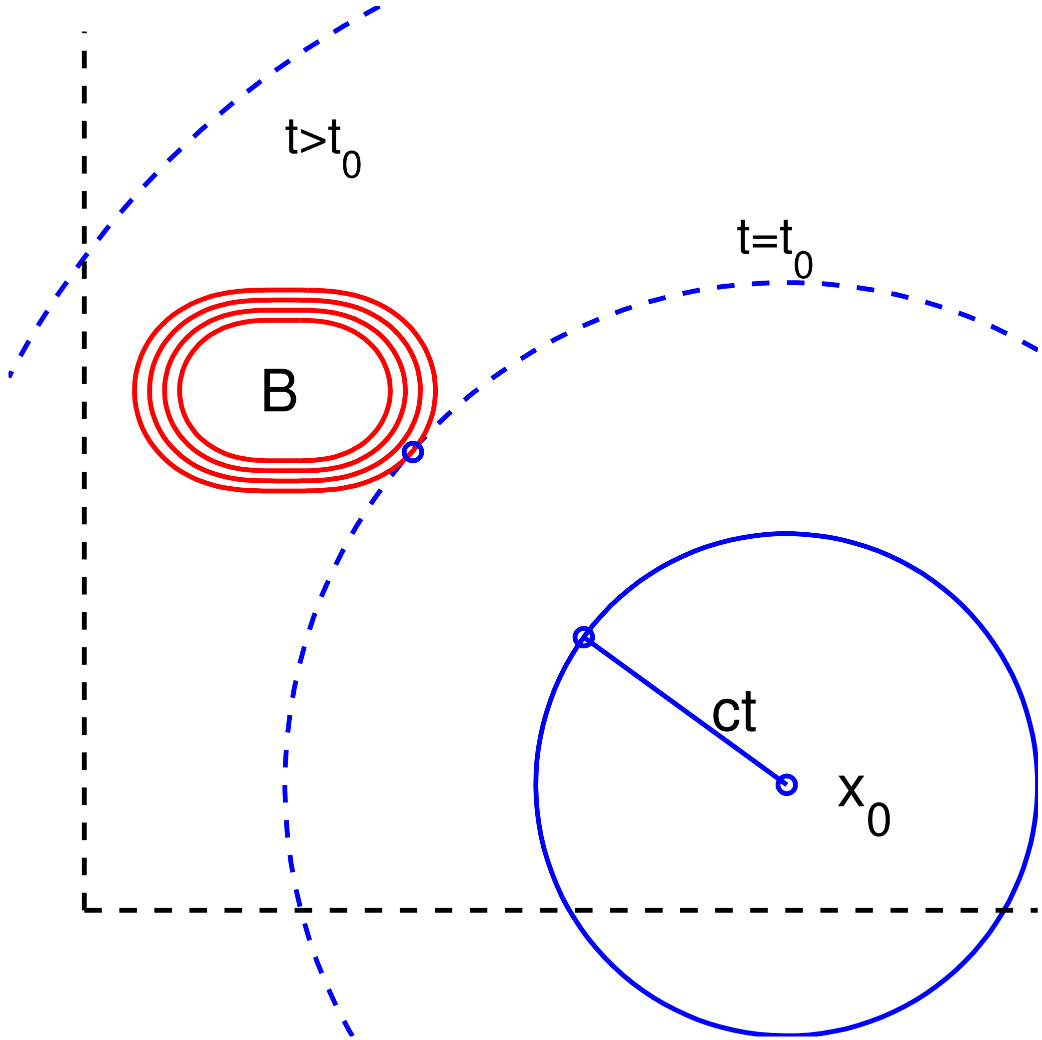
$$M_r[g](\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \le 1} \frac{g(\mathbf{x}_0 + r\,\boldsymbol{\xi}, t)}{\sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}\, d\boldsymbol{\xi}. \tag{6.11}$$

Hierbei sind nun $\mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\xi}$ im $\mathbb{R}^2$. Die Lösungsformel (6.6) nach Liouville bleibt unverändert bestehen.

Was ist die praktische Konsequenz dieser Überlegung?

Im Unterschied zum dreidimensionalen Fall hat man die Anfangsfunktionen u_0 und v_0 über *Kreisscheiben* mit wachsenden Radien $r = c\,t$ zu mitteln.

Eine von einem beschränkten Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ ausgehende Störung trifft nach wie vor zu einer bestimmten Zeit $t_0 > 0$ in $x_0 \notin B$ ein. Von diesem Zeitpunkt an macht sich die Störung jedoch für alle $t \geq t_0$ in $\mathbf{x}_0$ bemerkbar. Die Störung klingt unendlich lange nach.. das Huygenssche Prinzip ist damit nicht gültig!


t>t
0
t=t
0
B
ct
x
0

Wellenformen.

Hierunter versteht man spezielle Lösungen der Wellengleichung

$$u_{t\,t} - c^2\,\Delta_3 u \;=\; 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0,$$

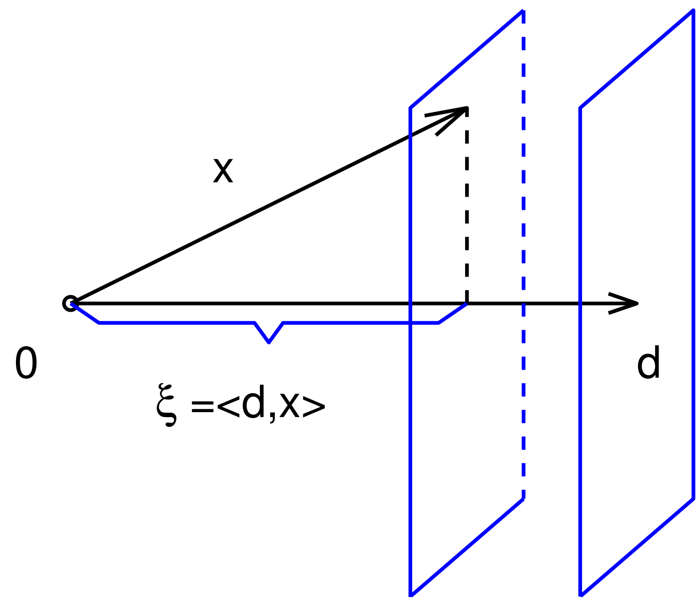
die sich in ihrem zeitlichen Verlauf wie harmonische Schwingungen verhalten. Wir benutzen die komplexe Darstellung und den Ansatz

$$u(\mathbf{x},t) \;=\; A\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}\,g(\mathbf{x}) \tag{6.12}$$

und erhalten die PDG

$$\omega^2\,g(\mathbf{x}) + c^2\,\Delta g(\mathbf{x}) \;=\; 0. \tag{6.13}$$

Ebene Wellen. Hierunter verstehen wir Wellen der Form (6.12) mit einer feste Ausbreitungsrichtung $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$, $\|\,\mathbf{d}\| = 1$, die auf Ebenen senkrecht zu $\mathbf{d}$ konstant sind.



Damit hängt u bzgl. des Ortes nur von $\xi := \langle \mathbf{d}, \mathbf{x} \rangle$ ab, $g(\mathbf{x}) = h(\xi)$, und wir erhalten aus (6.13) die gewöhnliche DGL

$$c^2\, h''(\xi) + \omega^2\, h(\xi) \;=\; 0 \tag{6.14}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$h(\xi) \;=\; \alpha\, \mathrm{e}^{-i(\omega/c)\xi} + \beta\, \mathrm{e}^{i(\omega/c)\xi}.$$

Berücksichtigen wir nur den ersten Summanden (den zweiten erhält man, wenn man $\mathbf{d}$ durch $-\mathbf{d}$ ersetzt), so erhalten wir nach Rücktransformation die ungedämpfte ebene harmonische Welle

$$u(\mathbf{x}, t) \;=\; A\, \mathrm{e}^{i\omega(t - \langle \mathbf{d},\mathbf{x}\rangle/c)}. \tag{6.15}$$

Kugelwellen. Dies sind Wellen, die auf Kugeln um ein Zentrum (o.E.d.A. der Ursprung) konstant sind. Bzgl. der allgemeinen Darstellung (5.12) gilt damit $g(\mathbf{x}) = h(r)$, wobei $r := \|\mathbf{x}\|_2$ ist.

Da sich der Laplace-Operator für Ursprungs-symmetrische Funktionen gemäß Lehrbuch (17.1.19) durch $\Delta u = u''(r) + (2/r)u'(r)$ darstellen lässt, ergibt sich aus (6.13) die folgende gewöhnliche DGL für $h(r)$

$$h''(r) \;+\; \frac{2}{r}\, h'(r) \;+\; \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 h(r) \;=\; 0. \tag{6.16}$$

Die allgemeine Lösung (mit dem Ansatz $h(r) = r^k \mathrm{e}^{\lambda r}$) lautet

$$h(r) \;=\; \frac{\alpha}{r}\,\mathrm{e}^{-i\,(\omega/c)\,r} + \frac{\beta}{r}\,\mathrm{e}^{i\,(\omega/c)\,r}.$$

Berücksichtigen wir wiederum nur die erste Lösung (auslaufende Welle), so erhalten wir mit (6.12) die spezielle Lösung

$$u(\mathbf{x},t) \;=\; \frac{A}{\|\mathbf{x}\|}\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,(t-\|\mathbf{x}\|/c)}. \tag{6.17}$$

Zylinderwellen. Dies sind Wellen, die auf Kreiszylindern (o.E.d.A. mit der z-Achse als Symmetrieachse) konstant sind. In Analogie zu den beiden letzten Spezialfällen hat man dann eine Darstellung $g(\mathbf{x}) = h(r)$, mit $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Mittels Zylinderkoordinaten erhält man dann aus (6.13) die gewöhnliche DGL

$$h''(r) + \frac{1}{r}\,h'(r) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 h(r) \;=\; 0. \tag{6.18}$$

Obgleich die DGL derjenigen in (6.16) ähnelt, ist diese nun nicht elementar integrierbar. Die Transformation $y(x) := h(r)$; $x = (\omega/c)\,r$ führt auf die Besselsche DGL

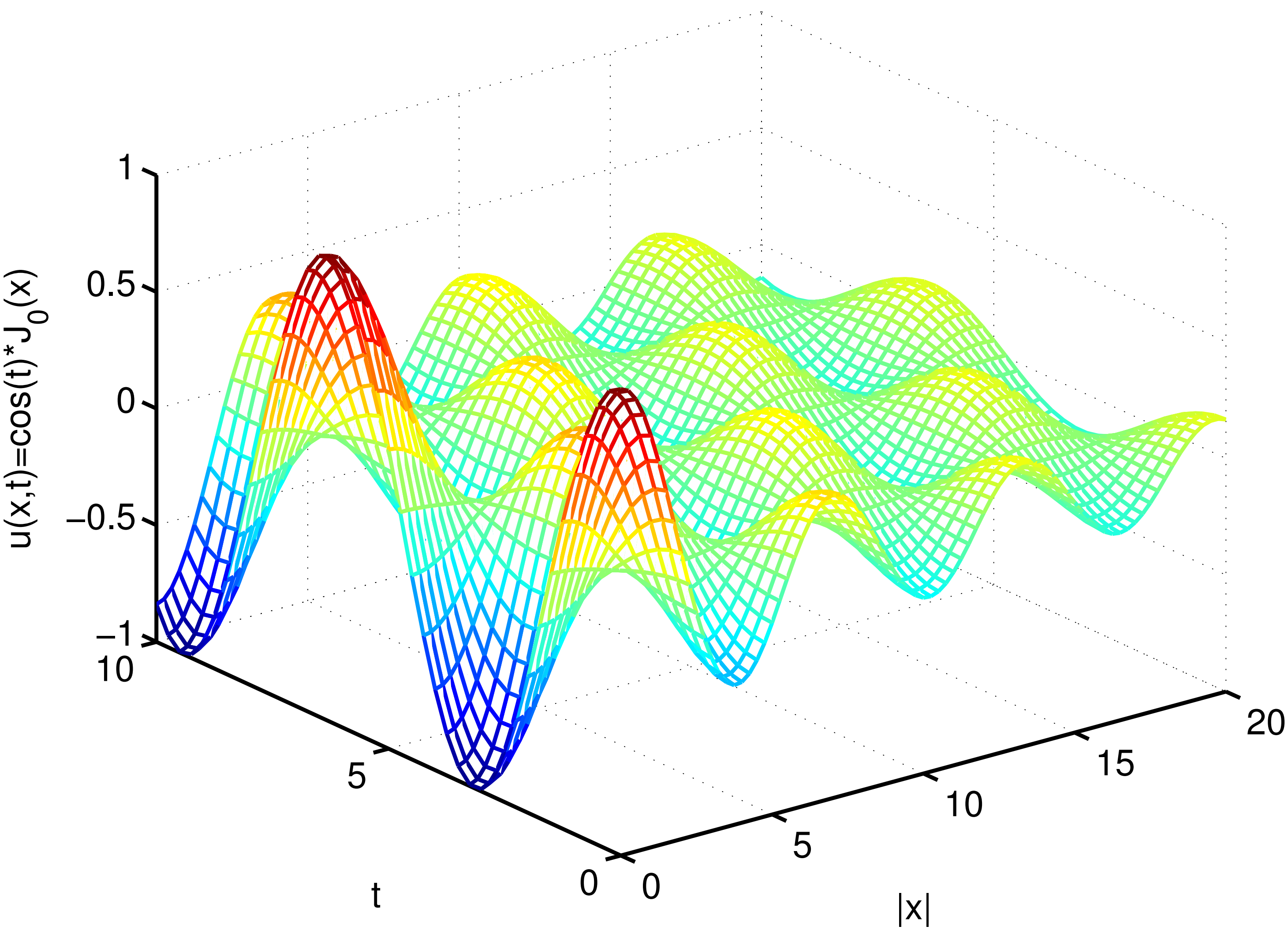
$$y''(x) + \frac{1}{x}\,y'(x) + y(x) \;=\; 0. \tag{6.19}$$

Eine in $x = 0$ reguläre Lösung ist die Bessel-Funktion nullter Ordnung $J_0(x)$, vgl. Lehrbuch (13.6.4). Damit wird

$$h(r) \;=\; J_0(\frac{\omega}{c}\,r) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\frac{\omega}{c}\,r\,\sin\xi)\,d\xi$$

und für die Zylinderwelle erhalten wir

$$u(\mathbf{x},t) \;=\; A\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}\,J_0(\frac{\omega}{c}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}). \tag{6.20}$$


u(x,t)=cos(t)*J_0(x)
1
0.5
0
−0.5
−1
10
5
0
t
0
5
10
15
20
|x|