9. Die Laplace – Transformation

Die Laplace–Transformation gehört zur Klasse der so genannten **Integraltransformationen**. Diese ordnen einer vorgegebenen Funktion $f = f(t)$ in eindeutiger Weise eine transformierte Funktion der Form

$$F(s) \;=\; \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t)\, f(t)\, dt \tag{9.1}$$

zu.

$K(s,t)$ heißt **Kern** der Integraltransformation.
Zumeist: $\alpha = -\infty$ und/oder $\beta = +\infty$, d.h. das Integral in (9.1) ist ein uneigentliches Integral.

Beispiele für solche Integraltransformationen sind:

Fourier–Transformation: $$F(\omega) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}\, f(t)\, dt,$$

Laplace–Transformation: $$F(s) \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-s\,t}\, f(t)\, dt,$$

Mellin–Transformation: $$F(s) \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} t^{s-1}\, f(t)\, dt,$$

Hankel–Transformation: $$F_\nu(s) \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} t\, J_\nu(st)\, f(t)\, dt.$$

Die **praktische Anwendbarkeit** solcher Transformationen beruht i. W. darauf, dass Differentialausdrücke in algebraische Ausdrücke transformiert werden, die meist einfacher zu behandeln sind. In den Ingenieurwissenschaften wird diese Technik häufig zur Lösung linearer Differentialgleichungen verwendet, in denen unstetige oder impulsartige Terme auftreten. Die Standardverfahren aus den Abschnitten 6 und 7 lassen sich auf solche Probleme i. Allg. nur recht umständlich anwenden.

Die Laplace–Transformation geht auf Untersuchungen von **Pierre Simon Laplace (1749–1827)** und **Leonhard Euler (1707–1783)** zurück. Die praktische Anwendbarkeit dieser Transformation auf Probleme der Mechanik und der Elektrotechnik wurde durch Arbeiten von **Oliver Heaviside (1850–1925)** und **Gustav Doetsch (1892–1977)** aufgezeigt.

Definition (9.2)

Eine Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ heißt **stückweise stetig**, falls f bis auf höchstens abzählbar unendlich viele Ausnahmestellen stetig ist, sich diese Ausnahmestellen nicht im Endlichen häufen und dort die einseitigen Grenzwerte $f(t^+)$ und $f(t^-)$ existieren. Zu einer solchen stückweise stetigen Funktion f wird durch

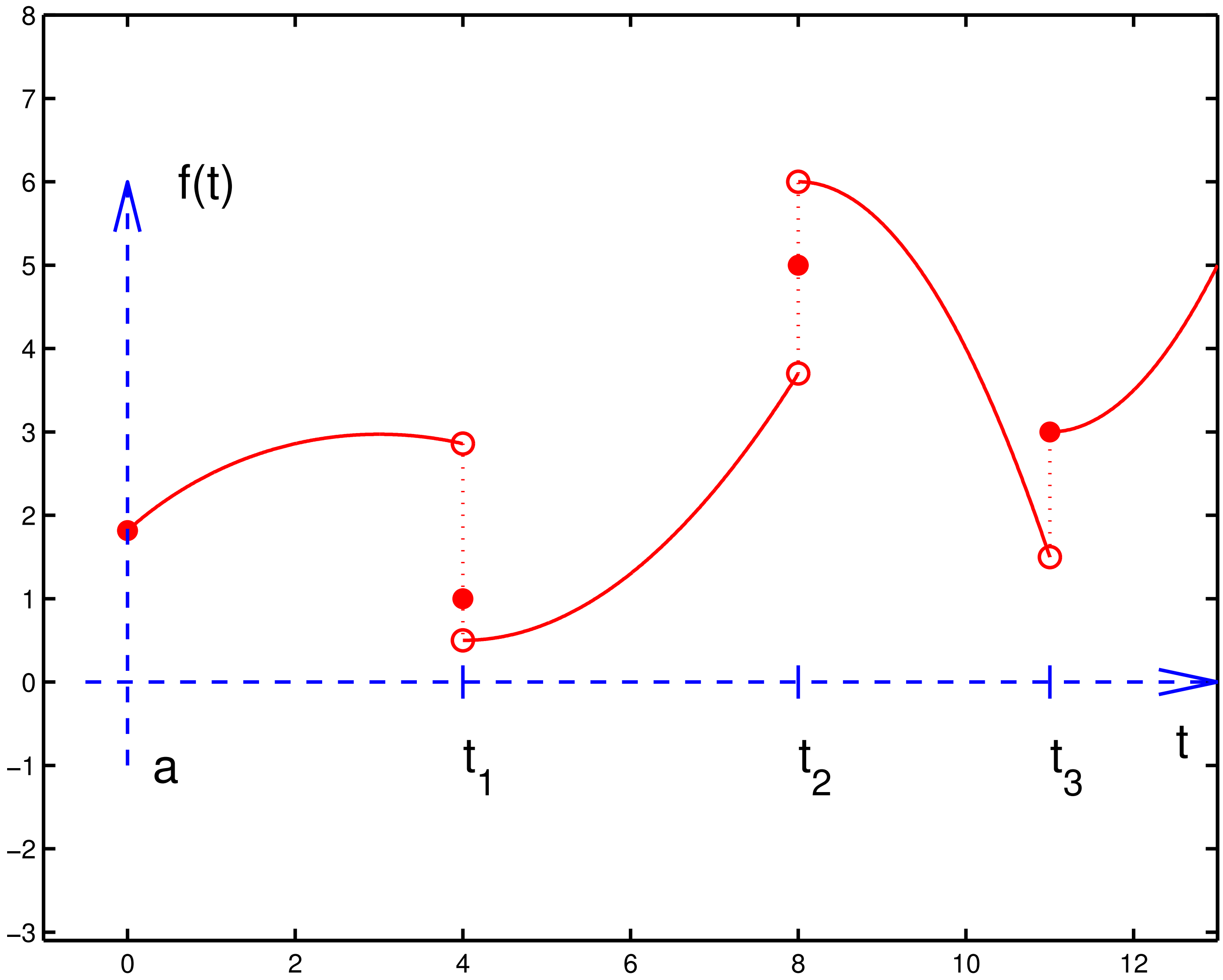
$$F(s) = L\{f\}(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt \qquad (9.3)$$

die **Laplace–Transformierte** definiert.

$f(t)$: **Urbildfunktion** oder **Originalfunktion**

$F(s)$: **Bildfunktion**

Der Zusammenhang (9.3) wird mitunter auch durch das so genannte **Doetsch–Symbol** $f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$ ausgedrückt.


f(t)
a
t_1
t_2
t_3
t
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
0
2
4
6
8
10
12

Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz der Laplace–Transformierten lässt sich mit Hilfe des Majorantenkriteriums (vgl. Lehrbuch (13.5.4)) gewinnen. Dazu definiert man

Definition (9.4) Eine stückweise stetige Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ heißt **von exponentieller Ordnung** γ, falls es Konstante C, $a > 0$ gibt mit

$$\forall\, t \geq a : \ |f(t)| \leq C\, \mathrm{e}^{\gamma t}. \tag{9.5}$$

Damit erhält man den folgenden Existenzsatz:

Satz (9.6) (Existenz)

Ist $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ, so existiert die Laplace-Transformierte $F(s)$ von f für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \gamma$.

Beweis:

Für $b > a$ lässt sich das Integral aus (9.3) in zwei Teilintegrale aufspalten:

$$\int_0^b \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt \;=\; \int_0^a \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt \;+\; \int_a^b \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt$$

Das erste Integral existiert, da der Integrand stückweise stetig ist. Der Integrand des zweiten Integrals ist abschätzbar durch

$$|\mathrm{e}^{-st} f(t)| \;\le\; C\mathrm{e}^{(\gamma-\mathrm{Re}\, s)\, t} \qquad (t \ge a)$$

und das uneigentliche Integral $\int\limits_a^\infty C\mathrm{e}^{(\gamma-\mathrm{Re}\, s)\, t}\, dt$ konvergiert für alle $\mathrm{Re}\, s > \gamma$. Damit folgt auch die absolute Konvergenz des uneigentlichen Integrals (9.3) nach dem Majorantenkriterium. ■

Beispiel (9.7)

Die konstante Funktion $f(t) = 1$ ist von exponentieller Ordnung $\gamma = 0$ und man erhält für die Laplace–Transformierte

$$L\{1\}(s) \;=\; \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,t}\,dt \;=\; -\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-s\,t}\Big|_0^\infty \;=\; \frac{1}{s}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 0. \tag{9.8}$$

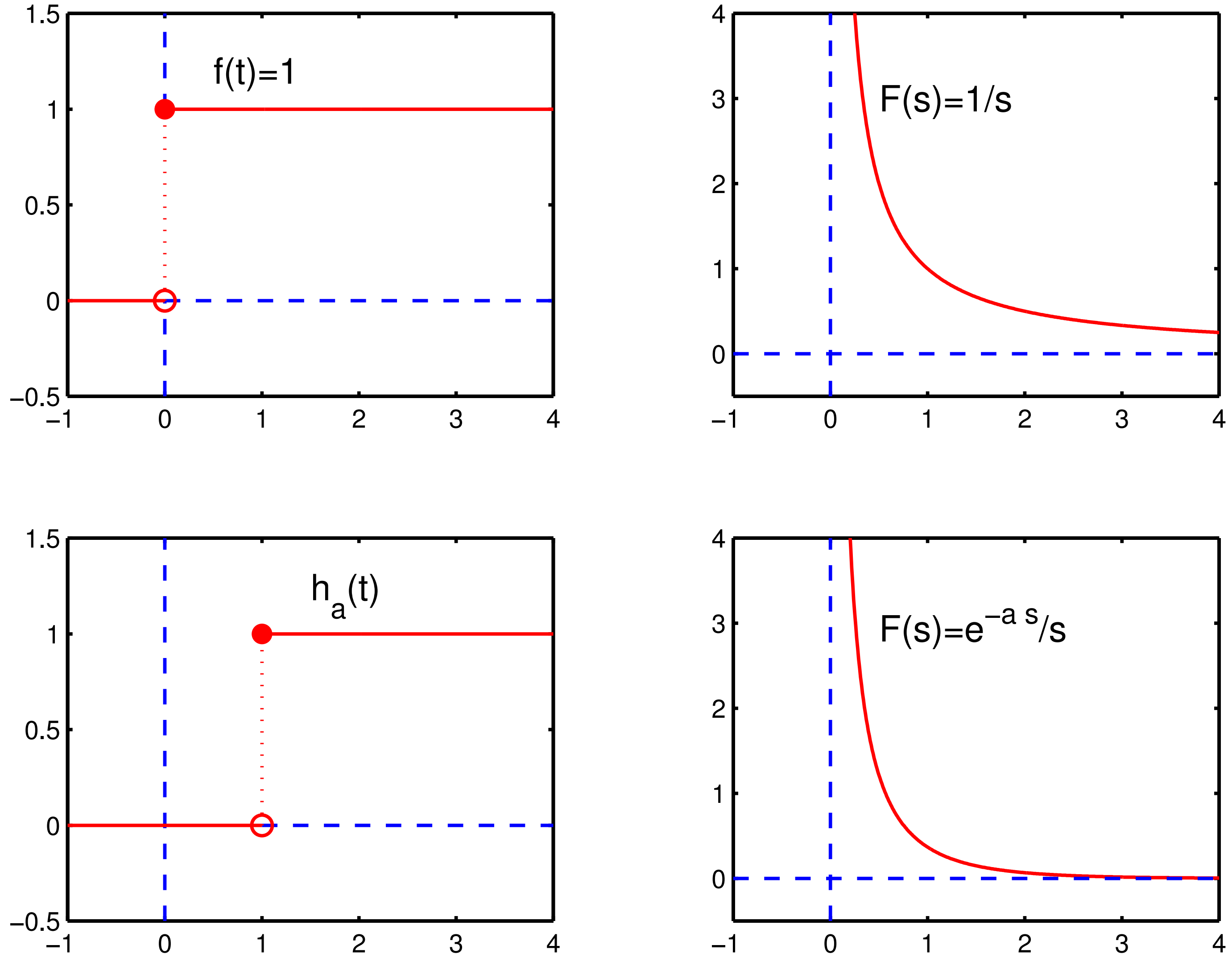
Beispiel (9.9)

Für $a > 0$ ist die sogenannte **Heaviside–Funktion**

$$h_a(t) \;:=\; \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases} \tag{9.10}$$

ebenfalls von exponentieller Ordnung $\gamma = 0$ und man erhält wie in Beispiel (9.7) für die Laplace–Transformierte

$$L\{h_a\}(s) \;=\; \int_a^\infty \mathrm{e}^{-s\,t}\,dt \;=\; \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-a\,s}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 0. \tag{9.11}$$


f(t)=1
F(s)=1/s
$h_a(t)$
$F(s)=e^{-a\,s}/s$

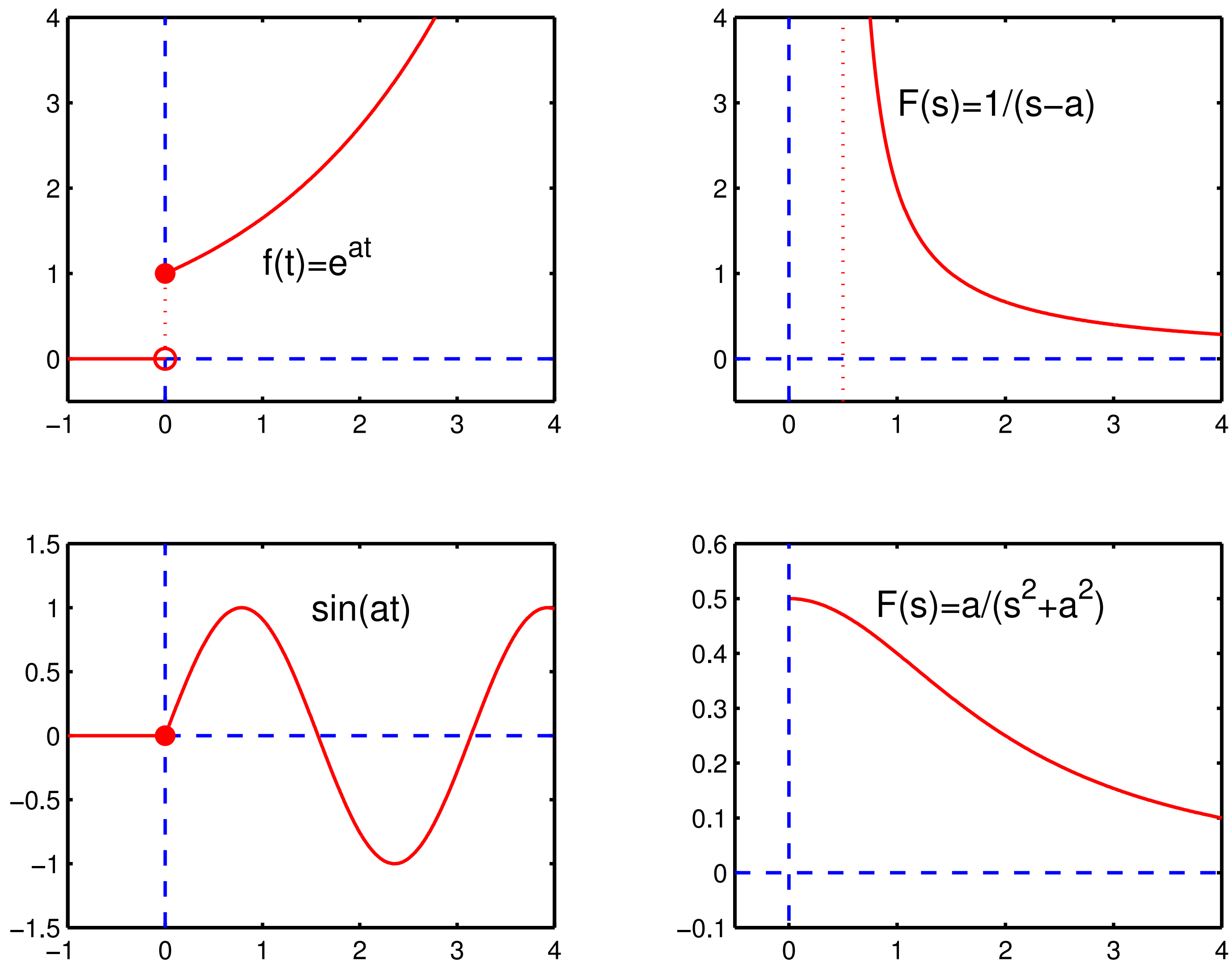
Beispiel (9.12) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(t) = \mathrm{e}^{at}$ von exponentieller Ordnung $\gamma = a$. Für $\operatorname{Re} s > a$ ergibt sich

$$L\{\mathrm{e}^{a\,t}\}(s) \;=\; \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{e}^{a\,t}\,dt \;=\; \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)\,t}\,dt \;=\; \frac{1}{s-a}. \tag{9.13}$$

Beispiel (9.14) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(t) = \sin(at)$ von exponentieller Ordnung $\gamma = 0$.

$$\begin{aligned} L\{\sin(at)\}(s) \;&=\; \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\sin(at)\,dt \;=\; \operatorname{Im}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-ia)t}\,dt\right) \\ &=\; \operatorname{Im}\left(\frac{1}{s-i\,a}\right) \;=\; \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0 \end{aligned} \tag{9.15}$$

Analog: $$L\{\cos(at)\}(s) \;=\; \frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0 \tag{9.16}$$


f(t)=e^at
F(s)=1/(s−a)
sin(at)
F(s)=a/(s^2+a^2)

Beispiel (9.17) Für $a > -1$ ist die Funktion $f(t) = t^a$ von exponentieller Ordnung γ für jedes $\gamma > 0$.

$$\begin{aligned} L\{t^a\}(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,t}\, t^a\, dt \\ &= \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\, x^a\, dx = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad s > 0 \end{aligned} \tag{9.18}$$

Dabei bezeichnet $\Gamma(x)$ die **Gamma–Funktion**, vgl. Lehrbuch (13.5.8). Speziell für $a = n \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich:

$$L\{t^n\}(s) = n!/s^{n+1}, \quad s > 0.$$

Wir fassen im folgenden Satz einige elementare Eigenschaften der Laplace–Transformation zusammen:

Satz (9.19) (Elementare Eigenschaften)

a) **Linearität**:

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} \;=\; \alpha\, L\{f(t)\} \;+\; \beta L\{g(t)\} \tag{9.20}$$

b) **Verschiebungssätze**: (Es sei $F(s) := L\{f(t)\}(s)$)

$$L\{\mathrm{e}^{a\,t} f(t)\}(s) \;=\; F(s-a) \tag{9.21}$$

$$L\{h_a(t)\, f(t-a)\}(s) \;=\; \mathrm{e}^{-as}\, F(s) \tag{9.22}$$

c) **Streckungssatz**:

$$L\{f(a\,t)\}(s) \;=\; \frac{1}{a}\, F(\frac{s}{a}) \tag{9.23}$$

Beispiel (9.24)

Gesucht sei die Laplace–Transformierte von:

$$f(t) := \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le \pi/4, \\ \sin t + \cos(t - \pi/4), & t \ge \pi/4. \end{cases}$$

Man findet die folgende Darstellung von f mit Hilfe der Heaviside–Funktion:

$$f(t) = \sin t + g(t), \quad g(t) = h_{\pi/4}(t) \cos(t - \pi/4).$$

Mit (9.15), (9.16) und (9.22) erhalten wir hieraus

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi s/4} \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Beispiel (9.25): Gesucht sei das Urbild der Laplace–Transf.:

$$F(s) \;:=\; \frac{1 - \mathrm{e}^{-2s}}{s^2}\,.$$

Anwendung der Linearität und des Verschiebungssatzes ergibt

$$\begin{aligned} f(t) \;&=\; L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} \;-\; L^{-1}\{\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}\} \\ &=\; t \;-\; h_2(t)\,(t-2)\,. \end{aligned}$$

Beispiel (9.26): Gesucht sei das Urbild der Laplace–Transf.:

$$F(s) \;:=\; \frac{1}{s^2 - 4s + 5} \;=\; \frac{1}{(s-2)^2 + 1}.$$

Anwendung des Verschiebungssatzes ergibt

$$f(t) \;=\; \mathrm{e}^{2t}\,\sin t\,.$$

Satz (9.27) (Differentiation und Integration)

a) Ist f stetig, stückweise stetig differenzierbar und von exponentieller Ordnung γ, so existiert auch $L\{f'\}$ für $\mathrm{Re}\, s > \gamma$ und es gilt:

$$L\{f'(t)\} \;=\; s\, L\{f(t)\} \,-\, f(0^+). \tag{9.28}$$

Analog für die Ableitungen höherer Ordnung:

$$L\{f^{(n)}(t)\} \;=\; s^n\, L\{f(t)\} - \sum_{j=1}^{n} s^{n-j}\, f^{(j-1)}(0^+) \tag{9.29}$$

b) Unter entsprechenden Voraussetzungen an f gilt:

$$L\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\} \;=\; (1/s)\, L\{f(t)\} \tag{9.30}$$

c) Unter entsprechenden Voraussetzungen an f gelten:

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9.31}$$

$$L\{f(t)/t\} = \int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma. \tag{9.32}$$

Beweis zu (9.28): Seien $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = a$ die Sprungstellen von f' in einem (beschränkten) Intervall $[0, a]$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_0^a \mathrm{e}^{-st} f'(t)dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-st} f(t)\Big|_{t_k}^{t_{k+1}} + s\int_0^a \mathrm{e}^{-st} f(t)dt \\ &= \mathrm{e}^{-sa} f(a) - f(0^+) + s\int_0^a \mathrm{e}^{-st} f(t)dt\end{aligned}$$

Für $a \to \infty$ und $\operatorname{Re} s > \gamma$ folgt hieraus die Behauptung. ∎

Beispiel (9.33) Gegeben sei die AWA:

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Laplace–Transformation der Differentialgleichung, vgl.(9.29):

$$[s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0)] - [sL\{y\} - y(0)] - 2L\{y\} = 0.$$

Anfangsbedingungen eingesetzt: $L\{y\} = (s-1)/(s^2 - s - 2)$.

Partialbruchzerlegung (PBZ): $L\{y\} = \dfrac{1/3}{s-2} + \dfrac{2/3}{s+1}$.

Rücktransformation, vgl. (9.13): $y(t) = (1/3)\mathrm{e}^{2t} + (2/3)\mathrm{e}^{-t}$.

Beispiel (9.34) Gegeben sei die AWA:

$$y'' + y = \sin(2t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

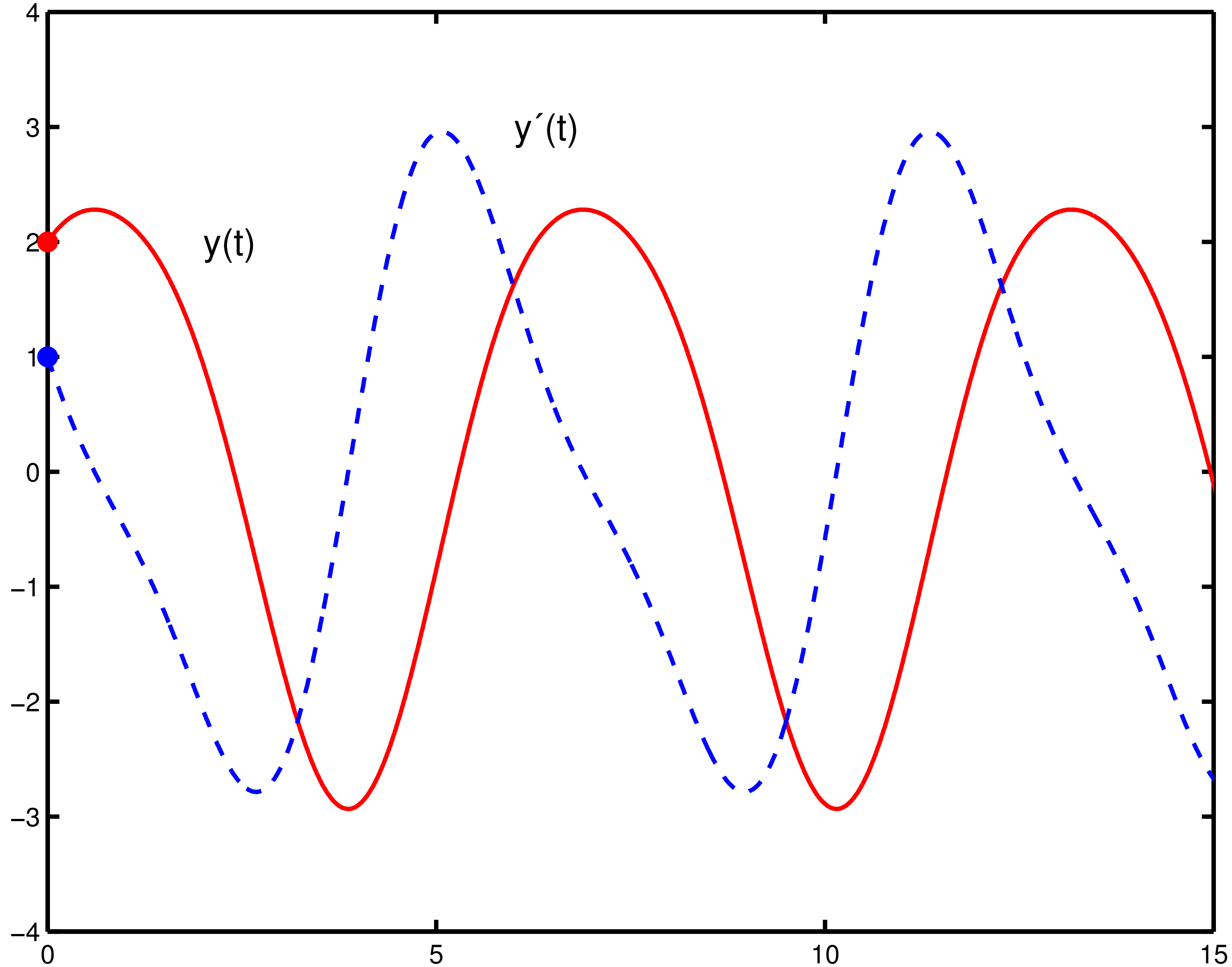
Laplace–Transformation der Dgln., vgl. (9.15), (9.29):

$$[s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0)] + L\{y\} = 2/(s^2+4).$$

Anfangsbedingungen eingesetzt: $L\{y\} = \dfrac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)}$.

PBZ: $L\{y\} = \dfrac{2s}{s^2+1} + \dfrac{5/3}{s^2+1} - \dfrac{2/3}{s^2+4}$.

Rücktransformation: $y(t) = 2\cos t + (5/3)\sin t - (1/3)\sin(2t)$.


y´(t)
y(t)
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0
5
10
15

Beispiel (9.35) Gegeben sei die AWA:

$$y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y^{(3)}(0) = 0.$$

Laplace–Transformation der DGL.:

$$[s^4 L\{y\} - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y^{(3)}(0)] - L\{y\} = 0.$$

Anfangsbedingungen eingesetzt: $L\{y\} = s^2/(s^4 - 1)$.

PBZ: $L\{y\} = \dfrac{1/2}{s^2 - 1} + \dfrac{1/2}{s^2 + 1}$.

Rücktransformation: $y(t) = (1/2)\sinh t + (1/2)\sin t$.

Beispiel (9.36) Gegeben sei die AWA:

$$2y'' + y' + 2y = h_5(t) - h_{20}(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Durch obige AWA wird die Ladung eines Kondensators in einem einfachen elektrischen Schaltkreis mit einem Einheits-Spannungs-„Impuls“ für $5 \leq t \leq 20$ beschrieben.

Laplace–Transformation: $(Y(s) := L\{y\}(s))$

$$2s^2 Y(s) + sY(s) + 2Y(s) = \mathrm{e}^{-5s}/s - \mathrm{e}^{-20s}/s;$$

oder aufgelöst:

$$Y(s) = [\mathrm{e}^{-5s} - \mathrm{e}^{-20s}]\, G(s), \quad G(s) := \frac{1}{s(2s^2 + s + 2)}.$$

Ist $g(t) := L^{-1}\{G(s)\}$, so ist die Lösung $y(t)$ nach dem Verschiebungssatz gegeben durch

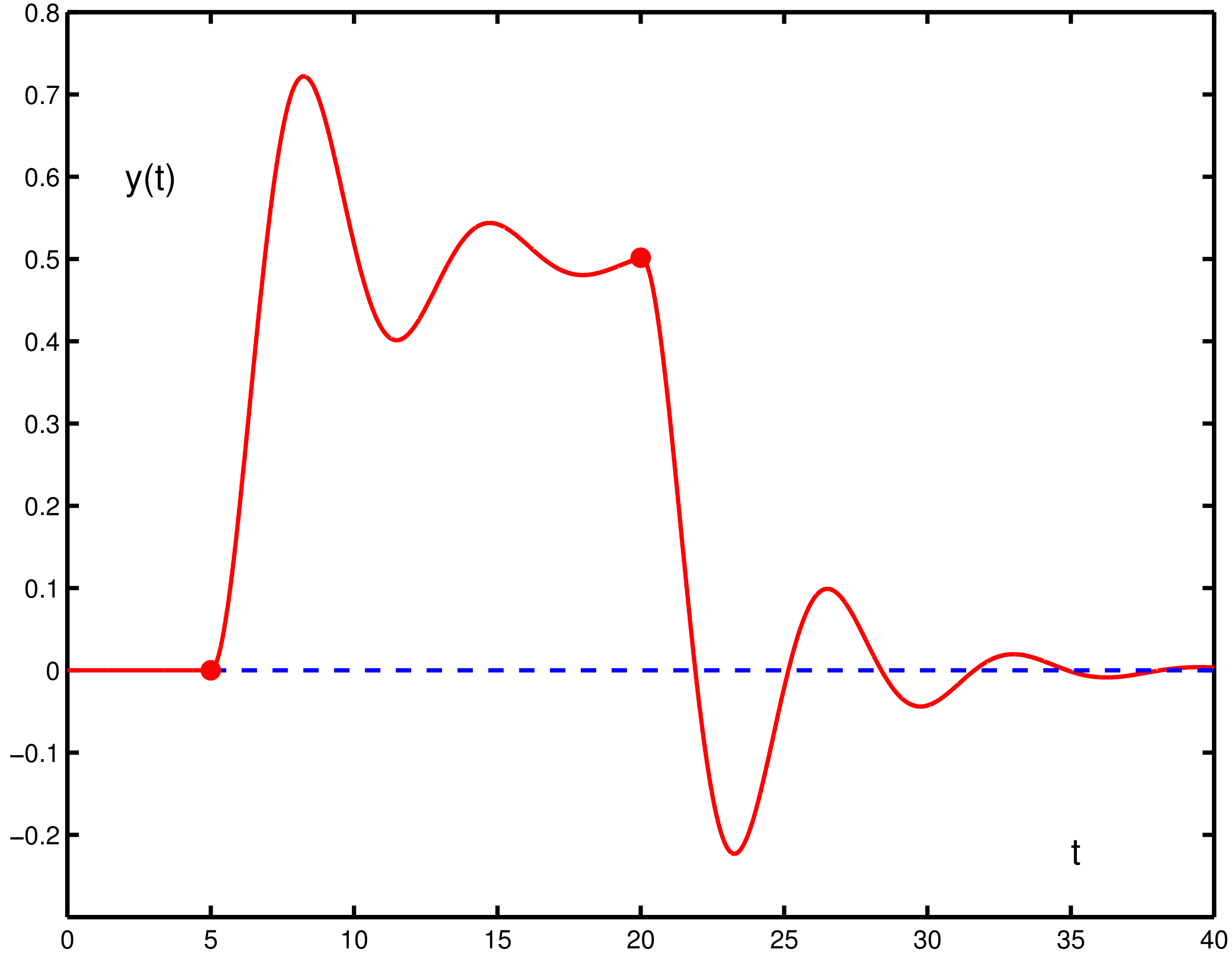
$$y(t) \;=\; h_5(t)\,g(t-5) \;-\; h_{20}(t)\,g(t-20)\,.$$

PBZ von $G(s)$:

$$G(s) \;=\; \frac{0.5}{s} \;-\; \frac{s+1/2}{2s^2+s+2} \;=\; \frac{0.5}{s} \;-\; 0.5\,\frac{(s+1/4)+1/4}{(s+1/4)^2+15/16}$$

Rücktransformation:

$$g(t) \;=\; 0.5 \;-\; 0.5\,\mathrm{e}^{-t/4}\,[\cos(\sqrt{15}\,t/4) \;+\; (1/\sqrt{15})\,\sin(\sqrt{15}\,t/4)].$$


y(t)
t
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
0
5
10
15
20
25
30
35
40

Beispiel (9.37) Gegeben sei die AWA:

$$y'' + 4\,y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

mit der „Rampe“ $g(t) := [\,h_5(t)\,(t-5) - h_{10}(t)\,(t-10)\,]/5.$

Laplace–Transformation:

$$s^2 Y(s) + 4Y(s) = [\mathrm{e}^{-5s} - \mathrm{e}^{-10s}]/(5\,s^2);$$

oder aufgelöst:

$$Y(s) = [\mathrm{e}^{-5s} - \mathrm{e}^{-10s}]\,G(s), \quad G(s) := \frac{1}{5\,s^2\,(s^2+4)}.$$

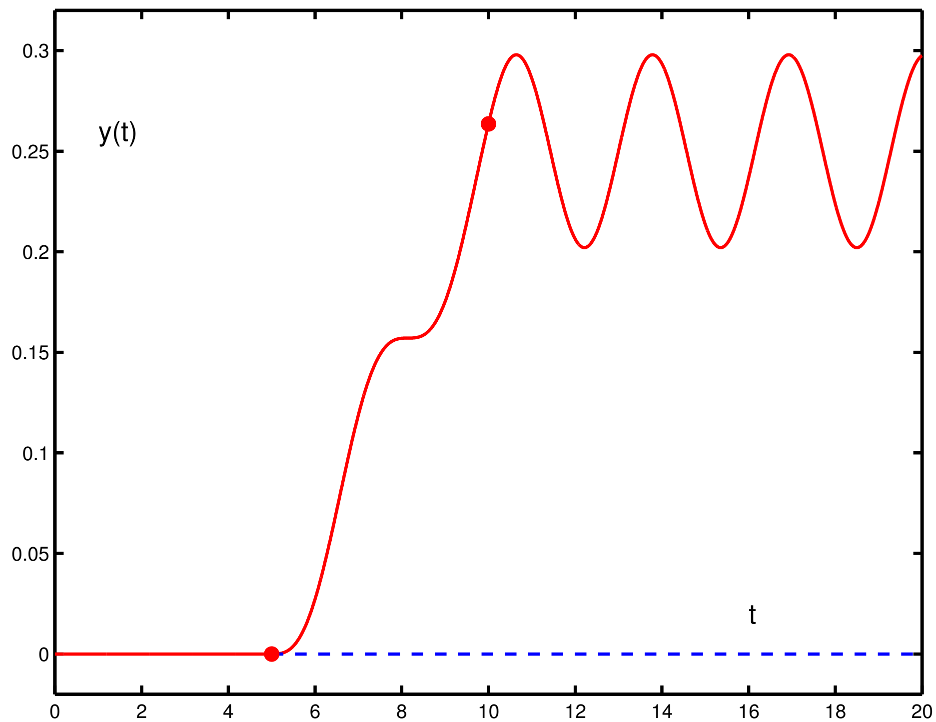
Mit $g(t) := L^{-1}\{G(s)\}$ lautet die Lösung:

$$y(t) = h_5(t)\,g(t-5) - h_{10}(t)\,g(t-10)\,.$$

PBZ von $G(s)$ (beachte, dass $G(s)$ rational in s^2 ist!):

$$G(s) = \frac{1}{5\,s^2\,(s^2+4)} = \frac{1/20}{s^2} - \frac{1/20}{s^2+4}$$

Rücktransformation: $g(t) = 0.05\,t - 0.025\,\sin(2t)$.



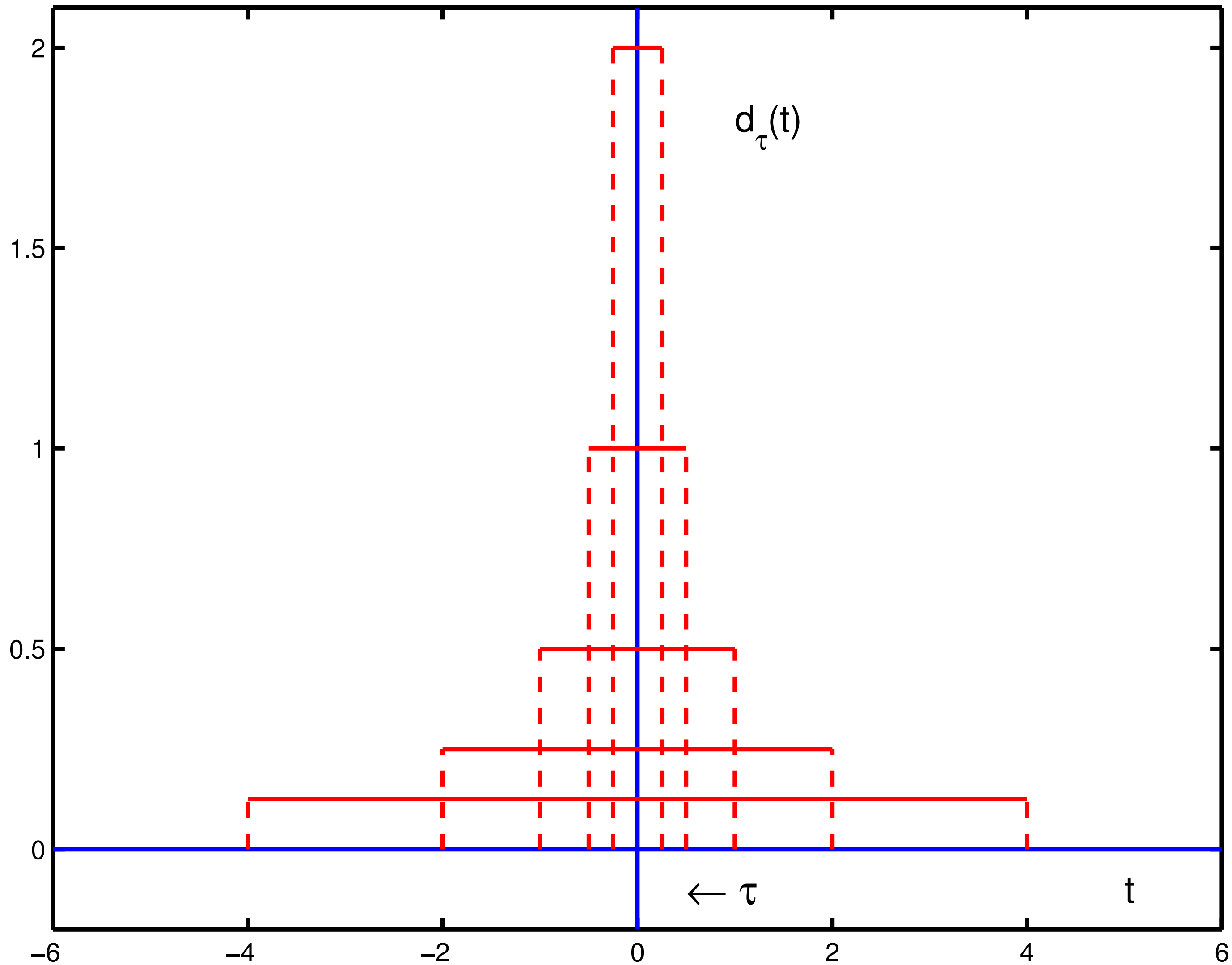
Impulsfunktionen (Distributionen):

Sehr kurze, große impulsartige wirkende Kräfte $\delta(t)$, deren „*Gesamtimpuls*“ $I := \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt$ endlich und vorgegeben ist (z.B. $= 1$).

δ heißt die **Diracsche Delta Distribution**, benannt nach Paul A.M. Dirac (1902–1984).

$\delta(t)$ wird als „Grenzwert“ einer Funktionenfolge interpretiert, wobei allerdings nicht der Grenzwert der Funktion selbst, sondern der Grenzwert von Integralausdrücken dieser Funktionenfolge gebildet wird.

$$d_\tau(t) := \begin{cases} 1/(2\tau), & -\tau < t < \tau \\ 0, & |t| \geq \tau \end{cases} \longrightarrow \quad \delta(t) \;\; (\tau \downarrow 0)$$



2
1.5
1
0.5
0
$d_\tau(t)$
$\leftarrow \tau$
t
−6
−4
−2
0
2
4
6

Für stetige Funktionen $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ wird **definiert**:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)\, dt \;:=\; \lim_{\tau\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0)\, f(t)\, dt$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \left[\frac{1}{2\,\tau} \int\limits_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} f(t)\, dt \right] \;=\; \lim_{\tau\to 0} \left[\frac{1}{2\,\tau}\; (2\,\tau)\, f(\tilde{\tau}) \right] \;=\; f(t_0).$$

Laplace-Transformierte:

$$L\{\delta(t-t_0)\} \;:=\; \lim_{\tau\to 0} L\{d_\tau(t-t_0)\} \;=\; \lim_{\tau\to 0} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-s\,t}\, d_\tau(t-t_0)\, dt$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \left[\frac{1}{2\,\tau} \int\limits_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} \mathrm{e}^{-s\,t}\, dt \right] \;=\; \lim_{\tau\to 0} \left[-\frac{1}{2\,s\,\tau}\; \mathrm{e}^{-s\,t_0} \left(\mathrm{e}^{-s\,\tau} \;-\; \mathrm{e}^{s\,\tau} \right) \right]$$

$$= \; \mathrm{e}^{-s\,t_0}.$$

Beispiel (9.38) (vgl. auch (9.36))

Gegeben sei die AWA

$$2y'' + y' + 2y = 15\,\delta(t-5), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Laplace–Transformation:

$$2s^2 Y(s) + sY(s) + 2Y(s) = 15\,\mathrm{e}^{-5s};$$

oder aufgelöst:

$$Y(s) = \mathrm{e}^{-5s}\,G(s), \quad G(s) := \frac{15}{2s^2+s+2}.$$

Ist $g(t) := L^{-1}\{G(s)\}$, so lautet die Lösung:

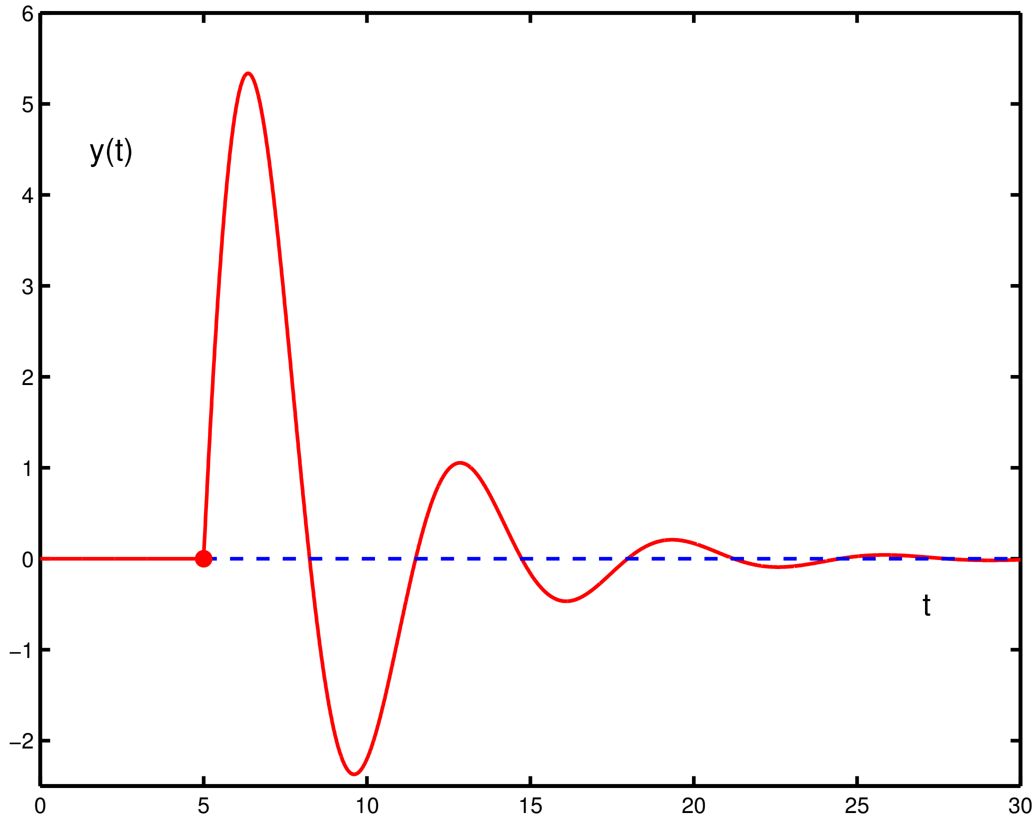
$$y(t) = h_5(t)\,g(t-5)\,.$$

$G(s)$ umgeschrieben:

$$G(s) = \frac{15}{2s^2+s+2} = 2\sqrt{15}\,\frac{\sqrt{15}\,/\,4}{(s+1/4)^2+15/16}$$

Rücktransformation:

$$g(t) \;=\; 2\sqrt{15}\,\mathrm{e}^{-t/4}\;\sin(\sqrt{15}\,t/4)].$$



Satz (9.39) (Faltungen)

Existieren die Laplace-Transformierten von $f_1(t)$ und $f_2(t)$ für $s \geq a$, so ist auch das Produkt $G(s) := F_1(s)\,F_2(s)$ als Laplace-Transformierte der so genannten *Faltung* von f_1 und f_2 darstellbar:

$$\begin{aligned} G(s) &= F_1(s)\,F_2(s) = L\{g(t)\} \\ g(t) &= \int_0^t f_1(t-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

Für die obigen Faltungsintegrale schreibt man auch

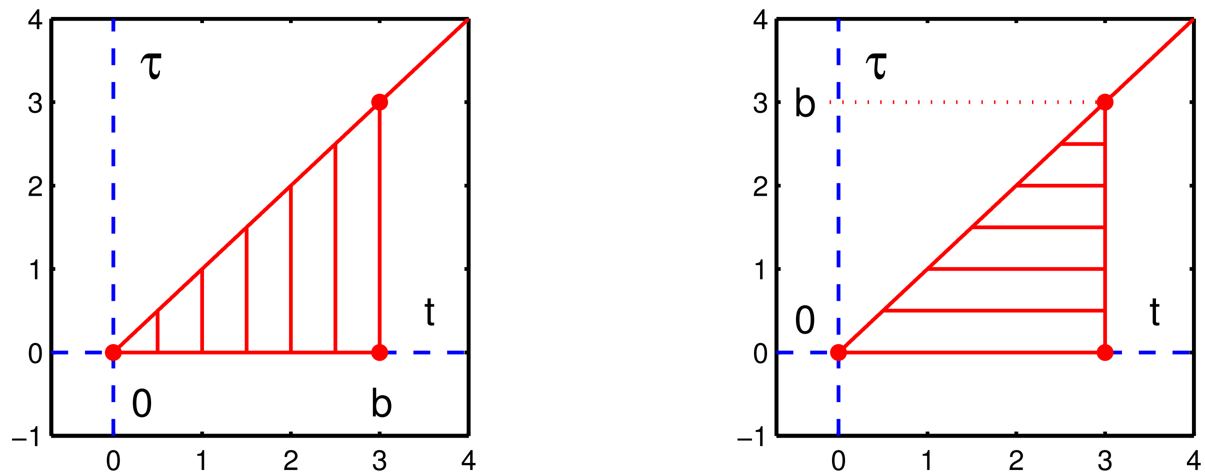
$$g(t) = (f_1 * f_2)(t) := \int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{9.40}$$

Beweis: Nach Definition der Laplace–Transformation gilt für die Faltung von f_1 und f_2

$$L\{f_1 * f_2\}(s) \;=\; \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b \mathrm{e}^{-s\,t} \int\limits_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau\, dt$$

Dieses Integral lässt sich als Flächenintegral deuten über

$$K_b \;:=\; \{(t,\tau)^{\mathsf{T}} : 0 \le t \le b,\; 0 \le \tau \le t\}$$



Umkehrung der Parametrisierung liefert:

$$
\begin{aligned}
L\{f_1 * f_2\}(s) &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \int_\tau^b \mathrm{e}^{-s\,t}\, f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, dt\, d\tau \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \int_0^{b-\tau} \mathrm{e}^{-s\,(\tau+u)}\, f_1(u)\, f_2(\tau)\, du\, d\tau \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{-s\,\tau}\, f_2(\tau) \left[\int_0^{b-\tau} \mathrm{e}^{-s\,u}\, f_1(u)\, du\right] d\tau \\
&= L\{f_1\}(s) \cdot L\{f_2\}(s)
\end{aligned}
$$

■

Beispiel (9.41) (Vgl. auch (9.37))

Gegeben sei die AWA:

$$y'' + 4y = g(t), \quad y(0) = 3, \; y'(0) = -1.$$

Laplace–Transformation:

$$s^2 Y(s) - 3\,s + 1 + 4Y(s) = G(s)$$

ergibt aufgelöst:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3\,s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4} \\ &= 3\,\frac{s}{s^2+4} - 0.5\,\frac{2}{s^2+4} + 0.5\left(\frac{2}{s^2+4}\cdot G(s)\right) \end{aligned}$$

Rücktransformation:

$$y(t) \;=\; 3\,\cos(2\,t) \;-\; 0.5\,\sin(2\,t) \;+\; 0.5 \int_0^t \sin(2\,(t-\tau))\, g(\tau)\, d\tau\ .$$