8. Stabilität

A. Allgemeines.

Wir betrachten ein allgemeines DGL-System erster Ordnung:

$$\mathbf{y}'(t) \;=\; \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \tag{8.1}$$

mit $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$, hinreichend glatter rechter Seite $\mathbf{f} : I \times D \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und D Gebiet in $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{y}^*$ sei eine spezielle Lösung von (8.1). Wir fragen nach dem Verhalten „benachbarter" Lösungen $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$.

Definition (8.2)

a) $\mathbf{y}^*$ heißt **stabil** (auch **Ljapunov–stabil**) auf I, falls $\mathbf{y}^*$ auf I definiert ist und es zu $t_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$ gibt, mit

$$\forall\, \mathbf{y}_0 : \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta \;\Rightarrow\; \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t)\| < \varepsilon \quad (\forall\, t \in I)\,.$$

b) Kann man in a) die Größe $\delta > 0$ unabhängig von t_0 wählen, so heißt $\mathbf{y}^*$ **gleichmäßig stabil** auf I.

c) Ist $\mathbf{y}^*$ auf $[a, \infty[\subset I$ erklärt, so heißt $\mathbf{y}^*$ dort **asymptotisch stabil**, falls $\mathbf{y}^*$ stabil ist und es zu jedem $t_0 \geq a$ ein $\delta(t_0) > 0$ gibt mit

$$\forall \ \mathbf{y}_0 \ : \ \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| \ < \ \delta \ \Rightarrow \ \lim_{t \to \infty} \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t)\| \ = \ 0 \, .$$

d) Schließlich heißt $\mathbf{y}^*$ **strikt stabil**, falls $\mathbf{y}^*$ gleichmäßig und asymptotisch stabil ist.

Bemerkungen (8.3)

a) In (8.2) a) wird implizit vorausgesetzt, dass $\mathbf{y}(\cdot; t_0, \mathbf{y}_0)$ für $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta$ (zumindest) auf I erklärt ist. Zumeist wird auch bei der Definition der Stabilität ein Intervall der Form $I = [a, \infty[$ zugrunde gelegt. Für **autonome DGL** lässt sich darüber hinaus (zeitliche Verschiebungsinvarianz!) $a := t_0 := 0$ setzen.

Stabilität bedeutet dann, dass die Trajektorien mit Anfangswerten in der Nähe von $\mathbf{y}^*(0)$ für alle Zeiten $t \geq 0$ in einem ε–Schlauch um $\mathbf{y}^*(t)$ verbleiben, während sie sich im Falle der asymtotischen Stabilität $\mathbf{y}^*(t)$ für $t \to \infty$ annähern.

b) Mit Hilfe der Transformation

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &:= \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t) \\ \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t) + \mathbf{y}^*(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*(t)) \\ &=: \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t)) \end{aligned} \tag{8.4}$$

kann man sich o.B.d.A. auf die Untersuchung der **Stabilität der Nulllösung $\mathbf{z}^* = \mathbf{0}$** zurück ziehen. In der Tat ist $\mathbf{z}^* := \mathbf{0}$ ein **Gleichgewichtspunkt** des DGL-Systems $\mathbf{z}' = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z})$, d.h., es gilt $\mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}^*(t)) \equiv \mathbf{0}$.

B. Stabilität bei linearen DGL.

Gegeben sei ein homogenes, lineares DGL-System

$$\mathbf{y}'(t) \;=\; \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t), \qquad a \le t < \infty \tag{8.5}$$

mit stetiger Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Ferner sei $\mathbf{Y}(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem von (8.5).

Satz (8.6) (Stabilitätssatz I)

a) $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist genau dann auf dem Intervall $I = [a, \infty[$ stabil, falls $\mathbf{Y}(t)$ auf I beschränkt ist.

b) $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist genau dann gleichmäßig stabil auf I, falls es eine Konstante $M > 0$ gibt mit

$$\forall\ t \ge t_0 \ge a \;:\quad \left\| \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{Y}(t_0)^{-1} \right\| \le M\,.$$

c) $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist genau dann asymptotisch stabil, falls gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{Y}(t)\| \;=\; 0\,.$$

Beweis:

Nach Satz (6.8) lautet die allg. Lösung von (8.5) $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Entsprechend ist Lösung der AWA gegeben durch

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \;=\; \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\,\mathbf{y}_0\,.$$

zu a): Ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ stabil, so ist jede Lösung von $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$ beschränkt. Damit sind auch die Spaltenvektoren der Fundamentalmatrix $\mathbf{Y}(t)$ beschränkt und damit auch $\|\mathbf{Y}(t)\|$ selbst.

Umgekehrt folgt aus $\quad \|\mathbf{Y}(t)\| \le M \quad (\forall t),\; M > 0$:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| \;&\le\; \|\mathbf{Y}(t)\| \; \left\|\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\right\| \; \|\mathbf{y}_0\| \\
&\le\; M \cdot \left\|\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\right\| \cdot \delta \;:=\; \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

zu b): Ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ gleichm. stabil, so folgt $\left\| \mathbf{Y}(t)\, \mathbf{Y}(t_0)^{-1}\, \mathbf{y}_0 \right\| \leq \varepsilon$ für alle $t \geq t_0 \geq a$ und $\|\mathbf{y}_0\| \leq \delta$. Damit ergibt sich $\left\| \mathbf{Y}(t)\, \mathbf{Y}(t_0)^{-1} \right\| \leq \varepsilon/\delta$. Die Umkehrung erhält man wie in a).

zu c): Dies folgt unmittelbar aus obiger Darstellung der Lösungen. ■

Satz (8.7)

Sei $\lambda(t)$ der größten EW der symmetrischen Matrix $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^\mathsf{T}$. Ist dann

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t)\, dt \;=\; -\infty\,, \quad a \leq t_0 < \infty,$$

so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\|\mathbf{y}(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{y}(t)^\top\,\mathbf{y}(t)\right) \\
&= (\mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t))^\top\,\mathbf{y}(t) \;+\; \mathbf{y}(t)^\top\,(\mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t)) \\
&= \mathbf{y}(t)^\top\,\left(\mathbf{A}(t)^\top + \mathbf{A}(t)\right)\,\mathbf{y}(t) \\
&\le \lambda(t)\,\left(\mathbf{y}(t)^\top\,\mathbf{y}(t)\right) \\
&= \lambda(t)\,\cdot\,\|\mathbf{y}(t)\|^2\,.
\end{aligned}$$

Für $\|\mathbf{y}(t)\| \neq 0$ folgt hieraus durch Integration:

$$\|\mathbf{y}(t)\|^2 \;\le\; \|\mathbf{y}_0\|^2 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\,d\tau\right)\,. \qquad \blacksquare$$

Satz (8.8) (Stabilitätssatz II)

Gegeben sei ein lineares DGL-System $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, mit konstanter(!) Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. λ_j bezeichne die EWe von $\mathbf{A}$, $j = 1, \ldots, n$, und $g(\lambda_j)$ bzw. $a(\lambda_j)$ deren geom. bzw. algebr. Vielfachheiten. Dann gelten:

a) $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist *strikt stabil* $\Leftrightarrow$ $\forall\, j$: Re $(\lambda_j) < 0$,

b) $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist *gleichmäßig stabil* $\Leftrightarrow$ $\forall\, j$: Re $(\lambda_j) \leq 0$ und Re $(\lambda_j) = 0 \Rightarrow g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$.

c) In allen anderen Fällen ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ instabil.

Beweis:

Man erhält die obigen Aussagen unmittelbar aus der Darstellung des Fundamentalsystems in Abschnitt 6 D, insbesondere aus den Darstellungen (6.21), (6.22) und (6.28). ∎

Beispiele (8.9)

a) Der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ des folgenden DGL-Systems ist instabil

$$\mathbf{y}'(t) \;=\; \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$$

Die EWe $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 0$ der Koeffizientenmatrix erfüllen zwar $\mathrm{Re}\,(\lambda_j) \leq 0$, jedoch ist $\lambda_2 = 0$ doppelter Eigenwert mit der geometrischen Vielfachheit $g(\lambda_2) = 1 \;<\; a(\lambda_2) = 2$.

Man überzeuge sich von der Instabilität des Gleichgewichtspunktes durch die Bestimmung eines Fundamentalsystem.

b) Das DGL-System

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt den Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}^* = (3, -2)^\mathsf{T}$.

Die Transformation $\mathbf{z} := \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$ liefert das homogene DGL-System $\mathbf{z}' = \mathbf{A}\,\mathbf{z}$ mit der obigen Matrix $\mathbf{A}$.

Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Damit ist der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}^*$ nach (8.8) a) strikt stabil.

Ohne Beweis zitieren wir noch ein Kriterium für strikte Stabilität, welches mit dem charakteristischen Polynom der Matrix A arbeitet und ohne die konkrete Berechnung der Eigenwerte auskommt! Dieses Kriterium findet in der Regelungstheorie vielfach Anwendung.

Satz (8.10) (Kriterium von Routh und Hurwitz*)

Gegeben sei ein reelles Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, z^k, \quad a_n > 0\,.$
Es sind äquivalent:

a) Alle Nullstellen von $p(z)$ haben negativen Realteil.

b) Es gilt $a_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots, n.$ Ferner sind alle Hauptunterdeterminanten der folgenden (n, n)–Matrix positiv:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & a_n \end{pmatrix}$$

Dabei sei $a_k := 0$ für alle $k > n$.

*nach Adolf Hurwitz (1859–1919) und Edward John Routh (1831–1907)

Beispiel (8.11)

Für das Polynom $p(z) = 2z^3 + 4z^2 + 5z + 6$ ergibt sich

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Das Routh–Hurwitz–Kriterium ist hiermit erfüllt, d.h., alle Nullstellen von $p(z)$ haben negativen Realteil.

Eine **algorithmische Fassung des Routh–Hurwitschen Kriteriums** ist in dem Lehrbuch von Hairer, Norsett und Wanner angegeben:

Setzt man für $k \geq 0$:

$$c_{0,k} := (-1)^k a_{n-2k}, \qquad c_{1,k} := (-1)^k a_{n-2k-1}, \tag{8.12}$$

wobei $a_k := 0$ für alle $k < 0$ sei, und berechnet hiermit rekursiv für $i = 1, 2, \ldots$:

$$c_{i+1,k} := \frac{1}{c_{i,0}} \begin{vmatrix} c_{i-1,0} & c_{i-1,k+1} \\ c_{i,0} & c_{i,k+1} \end{vmatrix}, \quad \text{falls } c_{i,0} \neq 0, \tag{8.13}$$

so ist das Routh–Hurwitzsche Kriterium äquivalent zu der Bedingung

$$\forall\, i = 0, 1, \ldots, n : \quad c_{i,0} > 0. \tag{8.14}$$

Für $p(z) = 2z^3 + 4z^2 + 5z + 6$ ergibt sich beispielsweise:

$$\begin{aligned}
c_{0,0} &= 2, & c_{0,1} &= -5, & c_{0,2} &= 0, & \ldots \\
c_{1,0} &= 4, & c_{1,1} &= -6, & c_{1,1} &= 0, & \ldots \\
c_{2,0} &= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2, & c_{2,1} &= 0, & & \ldots \\
c_{3,0} &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6,
\end{aligned}$$

so dass das Routh–Hurwitz–Kriterium erfüllt ist.

C. Qualitatives Verhalten für $n = 2$.

Wir untersuchen das qualitative Verhalten der Trajektorien $\mathbf{y}(t)$ in der Nähe des Gleichgewichtspunktes $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ für ein ebenes, homogenes DGL-System mit konstanten Koeffizienten

$$\mathbf{y}'(t) \ = \ \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t), \quad y(t) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(2,2)}\,. \tag{8.15}$$

Es seien λ_1, λ_2 die EWe von $\mathbf{A}$; $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ seien zugehörige EVen bzw. EV und HV.

Mit der Transformationsmatrix $\mathbf{S} := (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$ und

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} \quad &:= \ \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S} \ = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, & \begin{array}{ll} \text{falls} & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \text{oder} & \lambda_1 = \lambda_2,\ g(\lambda_2) = 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, & \begin{array}{ll} \text{falls} & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \\ \text{und} & g(\lambda) = 1 \end{array} \end{cases} \\
\mathbf{w}(t) \ &:= \ \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{y}(t)
\end{aligned}$$

erhält man für $\mathbf{w}(t)$ die transformierte DGL

$$\mathbf{w}'(t) \; = \; \mathbf{J}\,\mathbf{w}(t)\,. \tag{8.16}$$

Klassifikation in der Phasenebene:

a) Asymptotisch stabiler Knotenpunkt 1. Art:

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0, \quad g(\lambda_1) = 2$

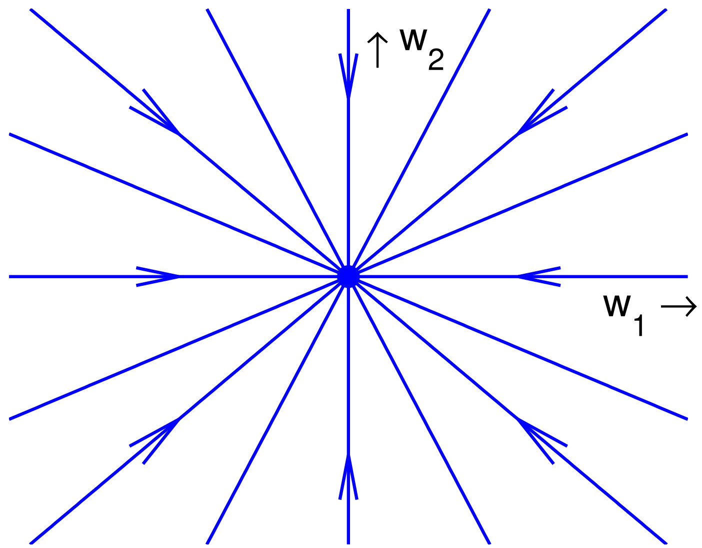

Abb. 8.1. Stabiler Knoten 1. Art

b) Instabiler Knotenpunkt 1. Art:

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0, \quad g(\lambda_1) = 2$

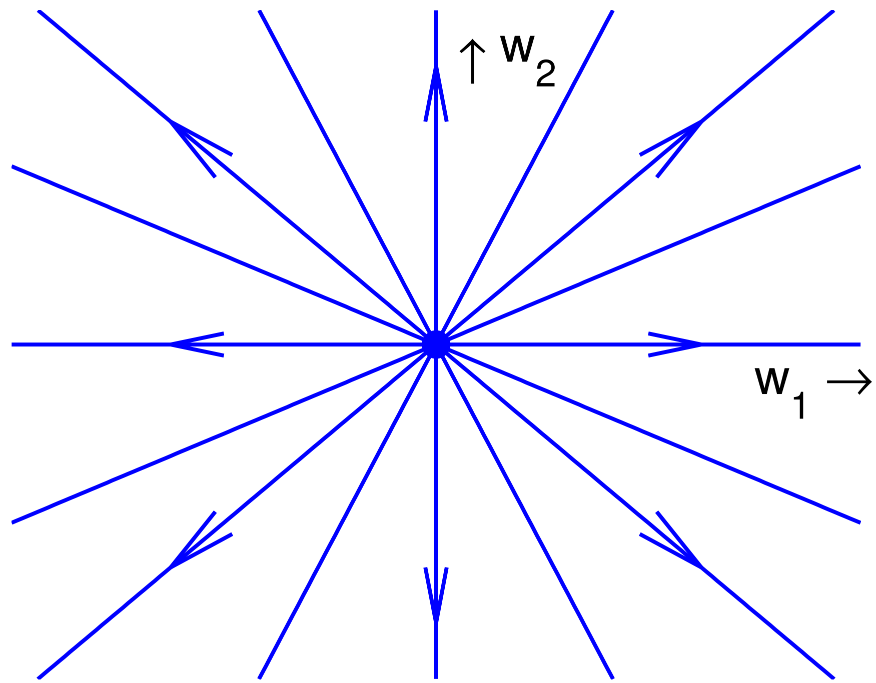

Abb. 8.2. Instabiler Knoten 1. Art

c) Asymptotisch stabiler Knotenpunkt 2. Art:

$$\lambda_1, \lambda_2 < 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad w_j(t) \quad = \quad w_{j0}\,\mathrm{e}^{\lambda_j t}$$

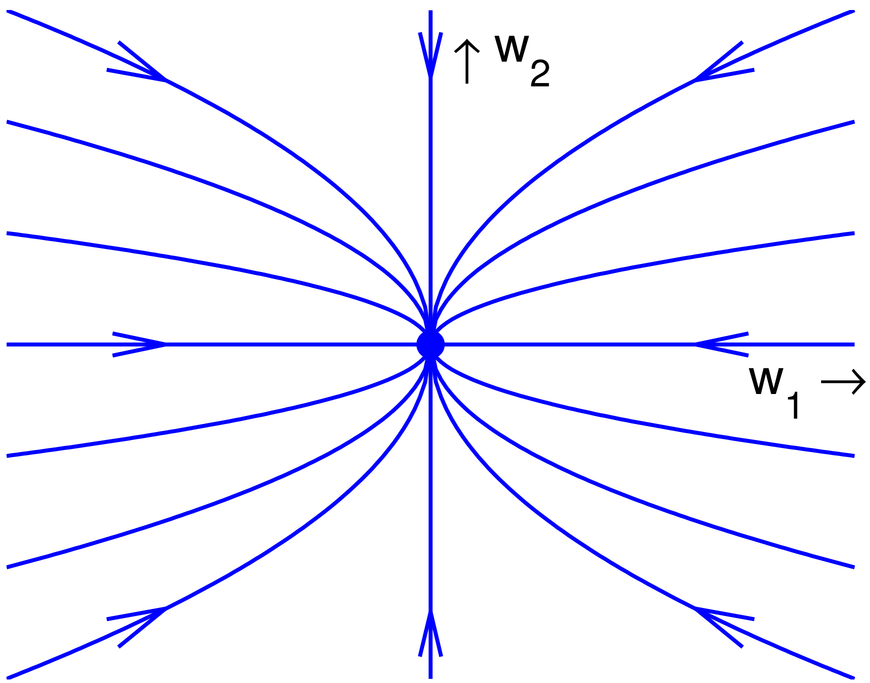

Abb. 8.3. Stabiler Knoten 2. Art

d) Instabiler Knotenpunkt 2. Art:

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad w_j(t) \quad = \quad w_{j0}\,\mathrm{e}^{\lambda_j t}$$

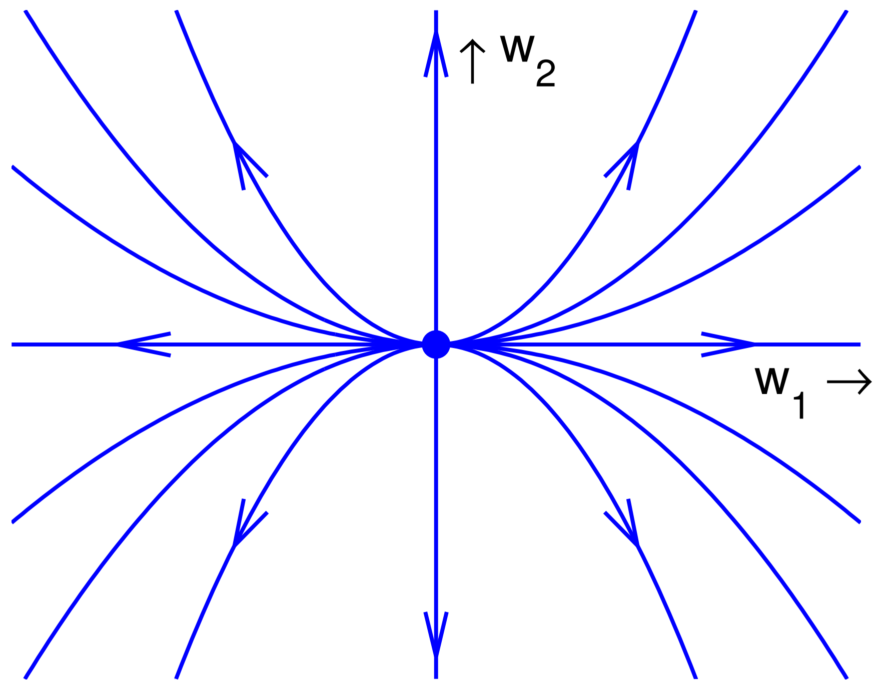

Abb. 8.4. Instabiler Knoten 2. Art

e) Instabiler Sattelpunkt:

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

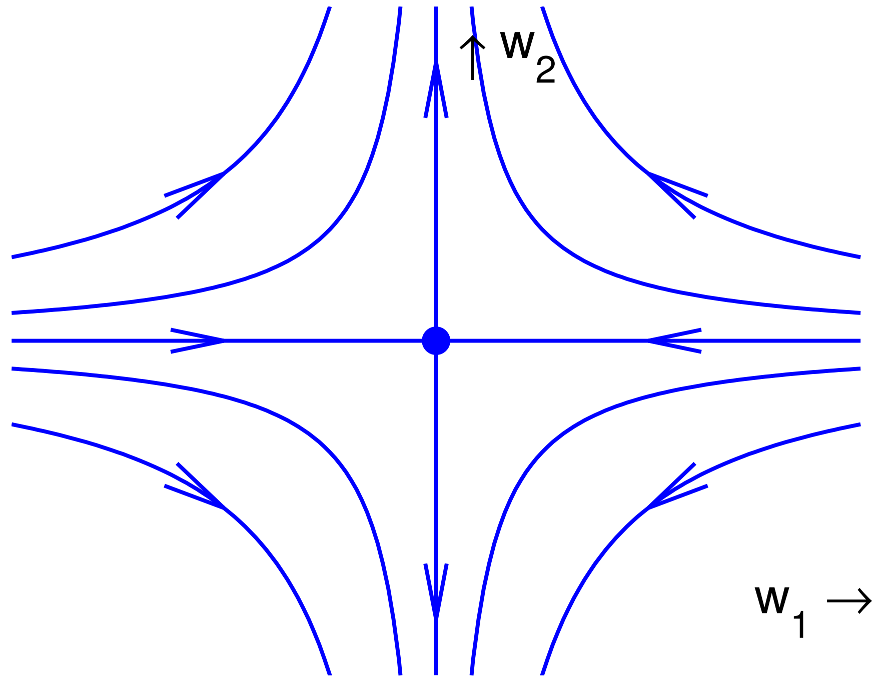

Abb. 8.5. Instabiler Sattelpunkt

f) Parallele Geraden:

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0;$

Beachte: 0 ist kein isolierter stationärer Punkt!

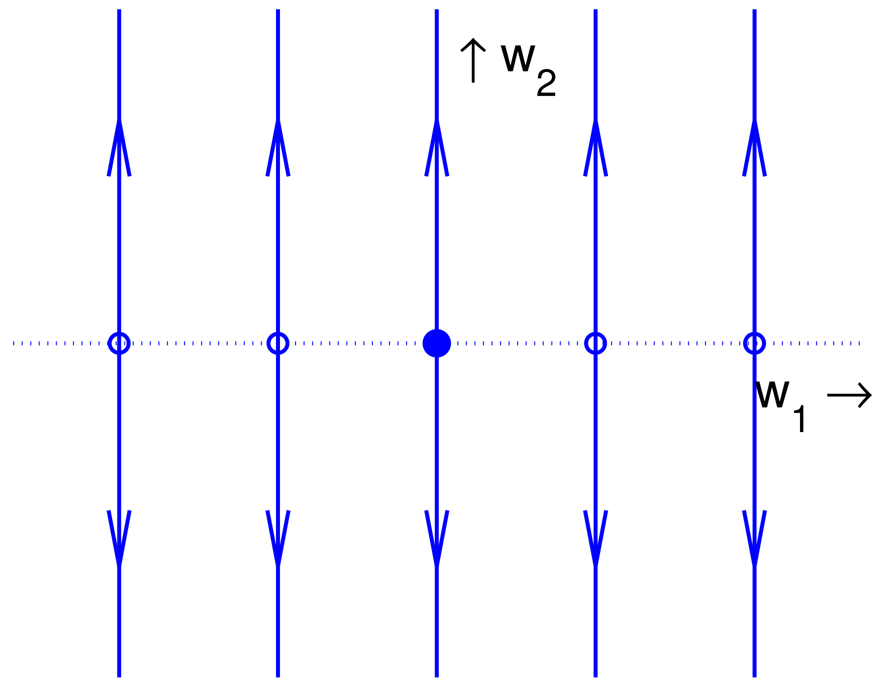

Abb. 8.6. Parallele Geraden

g) Knotenpunkt 3. Art:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}, \quad g(\lambda) = 1,$
$w_1(t) = (w_{10} + w_{20}t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad w_2(t) = w_{20}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$
0 ist für $\lambda > 0$ *instabil*, für $\lambda < 0$ *asymptotisch stabil*

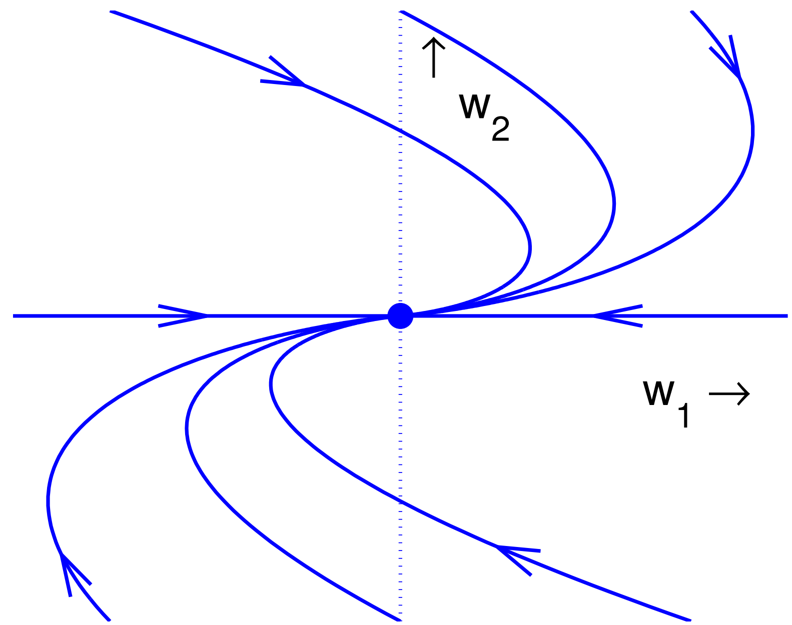

Abb. 8.7. Knotenpunkt 3. Art

h) Asymptotisch stabiler Strudelpunkt:

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda = \alpha + i\,\beta, \quad \beta \neq 0, \quad \alpha < 0$$

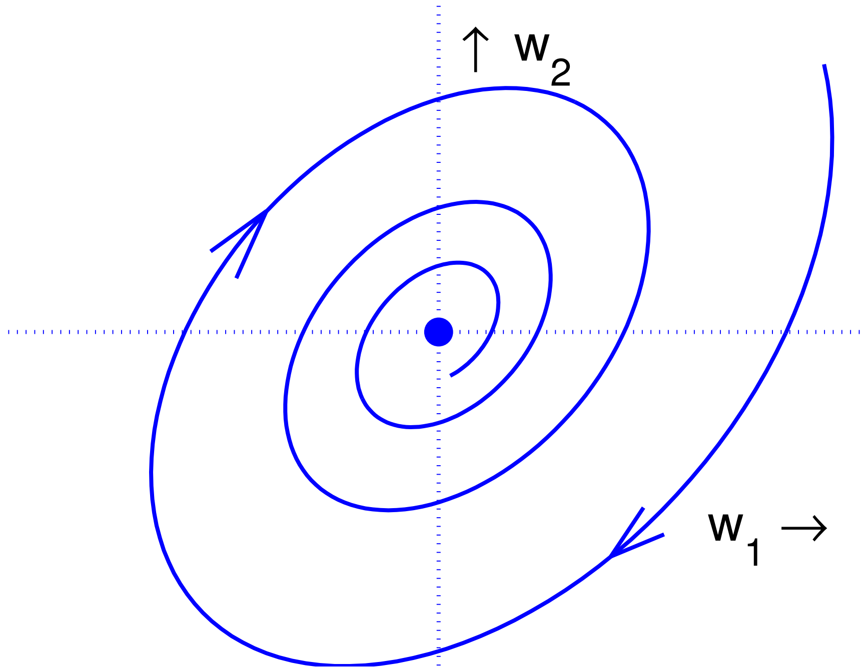

Abb. 8.8. Stabiler Strudelpunkt

i) Instabiler Strudelpunkt:

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda = \alpha + i\,\beta, \quad \beta \neq 0, \quad \alpha > 0$$

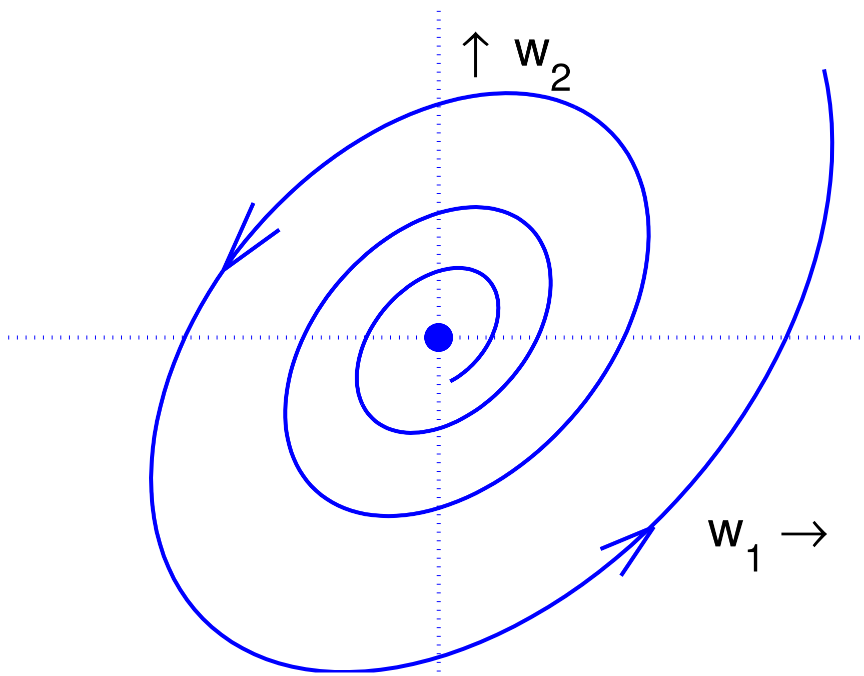

Abb. 8.9. Instabiler Strudelpunkt

j) Stabiler Wirbelpunkt:

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda = i\,\beta, \quad \beta \neq 0$$

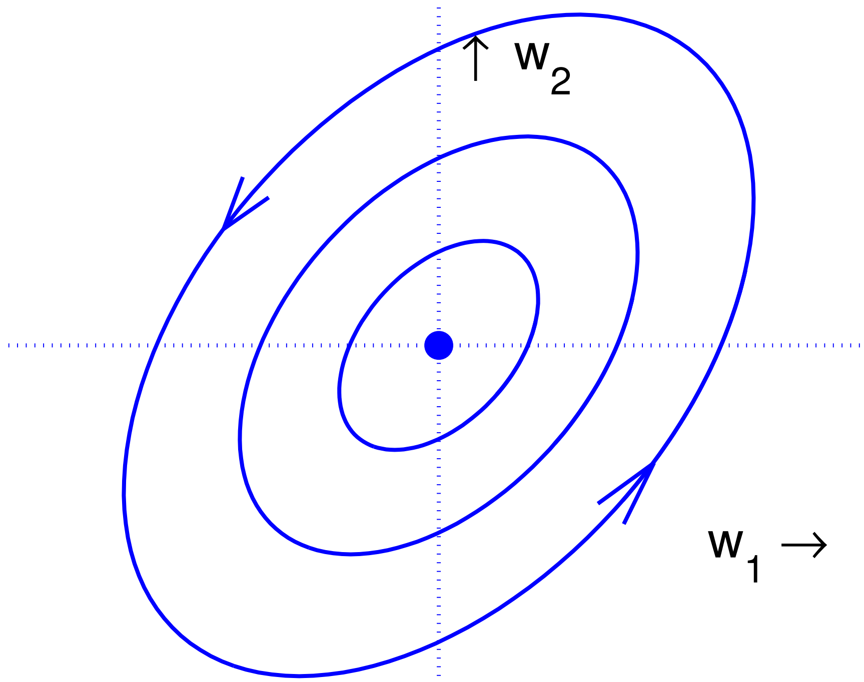

Abb. 8.10. Stabiler Wirbelpunkt

D. Der nichtlineare Fall.

Wir betrachten wieder ein autonomes (nichtlineares) DGL-System

$$\mathbf{y}'(t) \;=\; \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))\,. \tag{8.17}$$

$\mathbf{y}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ sei Gleichgewichtspunkt des Systems, also $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Häufig gelingt es, die Stabilität der DGL (8.17) durch **Linearisierung** der rechten Seite nachzuweisen. Ist $\mathbf{f}$ hinreichend glatt, so liefert die Taylor–Entwicklung von $\mathbf{f}$ um $\mathbf{y} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) \;&=\; \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{A} \;:=\; \mathbf{Jf}(\mathbf{0}), \\ \mathbf{g}(\mathbf{0}) \;&=\; \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{y}) \;=\; \mathrm{O}(\|\mathbf{y}\|^2)\,. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Ist die **„verkürzte“ DGL** $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$ nun strikt stabil, bzw. instabil, so überträgt sich dies auch auf das nichtlineare DGL-System.

Satz (8.19) (Stabilitätssatz III)

Unter den obigen Voraussetzungen lässt sich zeigen:

a) Gilt für alle EWe λ_j von $\mathbf{A} = \mathbf{Jf}(\mathbf{0})$: Re $(\lambda_j) < 0$, so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein strikt stabiler Gleichgewichtspunkt von $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$.

b) Existiert ein EW λ_j von $\mathbf{A}$ mit Re $(\lambda_j) > 0$, so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ instabiler Gleichgewichtspunkt.

Warnung (8.20)

Die Stabilität bzw. Instabilität des linearisierten DGL-Systems überträgt sich nicht notwendig auf das nichtlineare DGL-System, falls für alle EWe Re $(\lambda_j) \leq 0$ gilt, es jedoch zumindest einen Eigenwert λ_k gibt mit Re $(\lambda_k) = 0$.

Beispiel (8.21)

Wir betrachten die DGL des physikalischen Pendels

$$\varphi''(t) \;=\; -\frac{g}{\ell}\;\sin\varphi(t) \;=\; -\,\omega^2\;\sin\varphi(t).$$

Mit $y_1 := \varphi,\;\; y_2 := \varphi'$ ergibt sich das DGL-System:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= -\omega^2\,\sin(y_1(t))\,. \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind demnach $y_{1k} = k\,\pi$, $y_{2k} = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.
Die Linearisierung um diese Punkte ergibt:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathrm{O}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^k\|^2)\,.$$

Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix sind

$$\lambda_{1,2} \quad = \quad \begin{cases} \pm\, i\,\omega\,, & \text{falls} \quad k \quad \text{gerade} \\ \pm\,\omega\,, & \text{falls} \quad k \quad \text{ungerade}\,. \end{cases}$$

Für ungerade k ist φ_k also ein instabiler Sattelpunkt. Für gerade k ist φ_k ein stabiler, jedoch kein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt. **Letzteres folgt nicht aus (8.19)!**

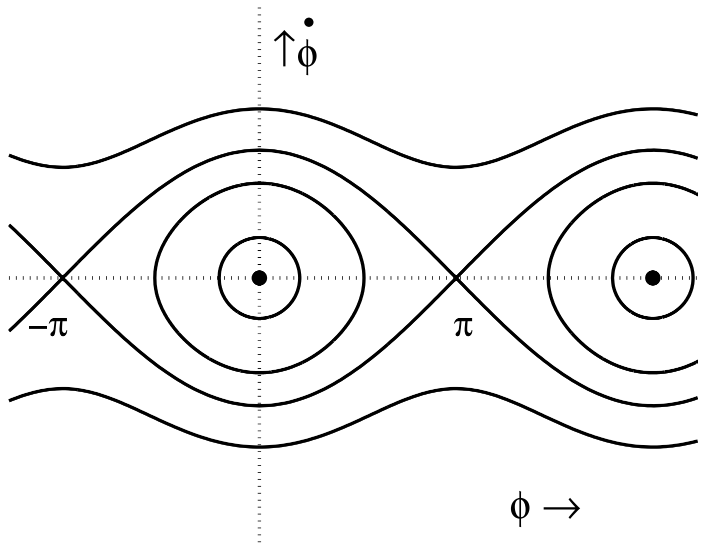

Abb. 8.11. Phasenportrait des Pendels

Eine andere Methode, nichtlineare Systeme auf Stabilität zu untersuchen, geht auf *Alexander M. Ljapunov (1857–1918)* zurück.

Definition (8.22)

Eine C^1–Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt eine **Ljapunov–Funktion** für $\mathbf{f}$ auf $\overline{K}_R(\mathbf{0}) \subset D$, falls gelten:

a) $V(\mathbf{0}) = 0, \quad V(\mathbf{y}) > 0$ für $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$,

b) $\langle \nabla V(\mathbf{y}), \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{y} : \|\mathbf{y}\| \leq R$.

Gilt in b) sogar

b′) $\langle \nabla V(\mathbf{y}), \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle < 0 \quad \forall \mathbf{y} : 0 < \|\mathbf{y}\| \leq R$,

so heißt V eine **strenge Ljapunov–Funktion**.

Satz (8.23) (Stabilitätssatz IV)

a) Ist $V(\mathbf{y})$ eine Ljapunov–Funktion von $\mathbf{f}$, so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein gleichmäßig stabiler Gleichgewichtspunkt.

b) Ist $V(\mathbf{y})$ sogar eine strenge Ljapunov–Funktion, so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Beweis:

zu a) Zu $0 < \varepsilon \leq R$ sei $M_\varepsilon := \min\{V(\mathbf{y}) \,:\, \|\mathbf{y}\| = \varepsilon\} > 0$. Wegen der Stetigkeit von V existiert $0 < \delta < \varepsilon$ mit

$$\|\mathbf{y}\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad V(\mathbf{y}) < M_\varepsilon \,.$$

Ist $\mathbf{y}_0 \in K_\delta(0)$ Anfangswert, so folgt für die zugehörige Trajektorie

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{y}(t)) = \nabla V(\mathbf{y}(t))^{\mathsf{T}} \, \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \leq 0 \,,$$

also ist $V(\mathbf{y}(t)) < M_\varepsilon$ für alle $t \geq t_0$, und somit auch $\|\mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$ für $t \geq t_0$.

zu b) Ist $V(\mathbf{y})$ strenge Ljapunov–Funktion, so fällt $V(\mathbf{y}(t))$ für $t \geq t_0$. Daher existiert $E := \lim_{t\to\infty} V(\mathbf{y}(t))$. Wäre $E > 0$, so gäbe es ein α, $0 < \alpha < \varepsilon$, mit $V(\mathbf{y}) < E$ für alle $\|\mathbf{y}\| < \alpha$. Daher verläuft die Trajektorie ganz in $\alpha \leq \|\mathbf{y}\| \leq \varepsilon$. Sei nun $M_1 := \max \left\{\nabla V(\mathbf{y})^\mathsf{T}\mathbf{f}(\mathbf{y}) \mid \alpha \leq \|y\| \leq \varepsilon\right\}$, also nach Voraussetzung $M_1 < 0$. Dann folgt:

$$V(\mathbf{y}(t)) - V(\mathbf{y}_0) \;=\; \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau} V(\mathbf{y}(\tau))\, d\tau \;\leq\; M_1(t - t_0)$$

und damit $\lim\limits_{t\to\infty} V(y(t)) = -\infty$, im Widerspruch zu den Eigenschaften von V. Damit ist $\lim\limits_{t\to\infty} V(\mathbf{y}(t)) = 0$, und damit auch $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$. ∎

Bemerkung (8.24)

Analog lässt sich zeigen: Gilt für eine C^1–Funktion $V = V(\mathbf{y})$ die Eigenschaft (8.22) a) sowie

$$\langle \nabla V(\mathbf{y}), \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle > 0, \quad \forall\, \mathbf{y} \,:\, 0 < \|\mathbf{y}\| \leq R\,,$$

so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein *instabiler* Gleichgewichtspunkt.

Beispiel (8.25)

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t)^3 + y(t) \\ y'(t) &= -x(t) - y(t)^5 \end{aligned}$$

Der Punkt $(x^0, y^0)^\mathsf{T} = \mathbf{0}$ ist ein isolierter Gleichgewichtspunkt. Setzt man $V(x,y) := a\,x^2 + b\,y^2$, so erfüllt V für $a, b > 0$ die Eigenschaft a) von (8.22). Ferner ist

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(x,y) \rangle = -2\,a\,x^4 - 2\,b\,y^6 + 2\,(a-b)\,x\,y\,.$$

Für $a = b > 0$ ist V also eine strenge Ljapunov–Funktion, und (x^0, y^0) somit ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Beispiel (8.26)

Für das Beispiel des physikalischen Pendels, (8.21), setze man

$$V(y_1, y_2) \;:=\; \frac{1}{2}\, y_2^2 \;+\; \omega^2\,(1 - \cos\, y_1)\,.$$

Man sieht dann unmittelbar, dass V eine Ljapunov–Funktion auf $\overline{K}_R(\mathbf{0})$ für $R < \pi$ ist. $\mathbf{0}$ ist also ein stabiler Gleichgewichtspunkt. Natürlich existiert für dieses Beispiel keine strenge Ljapunov–Funktion.