

5. Parameterabhängigkeit, Stabilität

Wir betrachten wieder die AWA

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (5.1)$$

und setzen nun voraus, dass \mathbf{f} auf einem Gebiet $G = I \times D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig differenzierbar ist.

Die Lösung der AWA ist damit für $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ nach (4.10) lokal eindeutig bestimmt. Wir denken uns die Lösung in G maximal fortgesetzt, vgl. (4.5), und bezeichnen diese Fortsetzung mit $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$.

Häufig sind die Anfangsdaten (t_0, \mathbf{y}_0) nur mit einer gewissen Genauigkeit gegeben. Wir untersuchen in diesem Abschnitt, wie sich Fehler in diesen Daten auf die Lösung auswirken.

Die folgende Hilfsaussage ist nach dem Ingenieur und Physiker Thomas Hakon Gronwall (1877-1932) benannt.

Satz (5.2) (Lemma von Gronwall)

Gilt für eine auf $I := \{t : |t - t_0| \leq \delta\}$ stetige Funktion $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abschätzung der Form

$$r(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau, \quad \alpha \geq 0, \beta > 0, \quad (5.3)$$

so folgt für alle $t \in I$: $r(t) \leq \alpha e^{\beta |t-t_0|}$.

Mit dem Gronwall–Lemma lässt sich nun leicht die folgende Fehlerabschätzung für die Lösung der AWA beweisen.

Satz (5.4) (Stabilität, Fehlerabschätzung)

Für Anfangswerte $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$ seien die Lösungen $y(t; t_0, y_0)$ und $y(t; t_0, z_0)$ auf dem Intervall $|t - t_0| \leq \delta$ definiert.

$L > 0$ bezeichne eine Lipschitz-Konstante von f auf einem (kompakten) Quader $Q = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \tilde{Q}$, welcher beide Lösungen enthält.

Dann gilt für $|t - t_0| \leq \delta$:

$$\|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|y_0 - z_0\|. \quad (5.5)$$

Beweis: Die integrierte AWA

$$y(t; t_0, y_0) = y_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, y(\tau; t_0, y_0)) d\tau$$

liefert mittels Dreiecksungleichung die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& \|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)\| \\
& \leq \|y_0 - z_0\| + \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(\tau, y(\tau; t_0, y_0)) - \mathbf{f}(\tau, y(\tau; t_0, z_0))\| d\tau \\
& \leq \|y_0 - z_0\| + L \cdot \int_{t_0}^t \|y(\tau; t_0, y_0) - y(\tau; t_0, z_0)\| d\tau .
\end{aligned}$$

Dies ist aber gerade eine Abschätzung der Form, wie sie im Lemma von Gronwall auftritt mit $r(t) := \|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)\|$, $\alpha := \|y_0 - z_0\| \geq 0$, und $\beta := L > 0$. Damit ergibt sich genau die behauptete Abschätzung. ■

Bemerkungen (5.6)

a) Die in obigem Satz gezeigte Abschätzung bedeutet gerade die Lipschitz–stetige Abhängigkeit der Lösung einer Anfangswertaufgabe von den Anfangswerten.

b) Die obige Abschätzung ist allgemein nicht zu verbessern, da beispielsweise für die lineare AWA $y' = Ly$, $y(t_0) = y_0$ mit $L > 0$ und $t \geq t_0$ die Abschätzung mit Gleichheit gilt. Für $t < t_0$ wird hierbei jedoch der tatsächliche Fehler erheblich überschätzt.

c) In Verallgemeinerung des Satzes (5.4) lassen sich auch Fehler in der rechten Seite f und in der Anfangszeit t_0 berücksichtigen.

Es seien f, g stetig differenzierbare Funktionen auf einem Quader Q , wobei die folgenden Abschätzungen gelten mögen:

$$\|f(t, y) - g(t, y)\| \leq \delta, \quad \|g(t, y)\| \leq M, \quad \|f(t, \tilde{y}) - f(t, y)\| \leq L\|\tilde{y} - y\|.$$

Für die Lösungen y und z der AWPe

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), & y(t_0) &= y_0 \\ z' &= g(t, z), & z(t_1) &= z_0 \end{aligned}$$

mit $(t_0, y_0), (t_0, z_0) \in Q^0$ gelten dann

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| &\leq \|y_0 - z_0\| e^{L|t-t_0|} + M |t_1 - t_0| e^{L|t-t_0|} \\ &\quad + \frac{\delta}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Der erste Summand beschreibt den Fehleranteil, der in $y(t)$ aufgrund der Änderung der Anfangswerte auftritt, der zweite Summand den Fehler, der durch die Variation der Anfangszeit auftritt, und der dritte Summand beschreibt schließlich den Fehler, der durch die veränderte rechte Seite des DGL-Systems hervorgerufen wird.

Ebenfalls von Interesse ist die Frage, wie sich die Lösung einer **Parameter-abhängigen AWA**

$$y'(t) = f(t, y, \lambda), \quad y(t_0) = y_0, \quad (5.8)$$

in Abhängigkeit von den Parametern $\lambda \in \mathbb{R}^m$ verhält.

Vermöge der Transformation von (5.8) in das äquivalente AWP

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad , \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}' &= \mathbf{0} \quad \quad \quad , \quad \mathbf{z}(t_0) = \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (5.9)$$

lässt sich dieses Problem jedoch auf den zuvor betrachteten Fall der Variation der Anfangswerte zurückführen.

Zumeist interessiert man sich über die recht groben Abschätzungen (5.4), (5.7) hinaus für die konkrete Berechnung der Größen

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0).$$

Diese Daten lassen sich als die (absoluten) **Konditionszahlen** für die Abbildung $(t_0, \mathbf{y}_0) \mapsto \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ interpretieren.

Die Existenz der hierbei auftretenden partiellen Ableitungen ist unter den folgenden Voraussetzungen sichergestellt.

Satz (5.10) (Variationsgleichungen)

Die rechte Seite f sei eine C^1 -Funktion auf einem Gebiet $G = I \times D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. \tilde{y} sei eine auf einem kompakten Intervall $I_0 \subset I$ erklärte Lösung der DGL $y' = f(t, y)$.

a) Es gibt einen Streifen um \tilde{y}

$$S_\varepsilon := \left\{ (t, y)^T : t \in I_0 \wedge \|y - \tilde{y}(t)\| \leq \varepsilon \right\} \subset G, \quad \varepsilon > 0,$$

so dass die Lösungen $y(t; t_0, y_0)$ der AWA (5.1) für alle Anfangswerte $(t_0, y_0) \in S_\varepsilon$ auf ganz I_0 erklärt sind.

b) Die Lösung $y(t; t_0, y_0)$ ist eine C^1 -Funktion (bezüglich aller Variablen) auf dem Innern $I_0^0 \times S_\varepsilon^0$.

c) Die so genannten **Variationen** (auch **Propagationsmatrizen**)

$$W(t; t_0) := \frac{\partial}{\partial y_0} y(t; t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{(n,n)},$$

$$\mathbf{w}(t; t_0) := \frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^n$$

lassen sich als Lösungen der folgenden linearen AWA erhalten

$$\mathbf{W}'(t; t_0) = \mathbf{f}_y(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \mathbf{W}(t; t_0), \quad \mathbf{W}(t_0, t_0) = \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{w}'(t, t_0) = \mathbf{f}_y(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \mathbf{w}(t; t_0), \quad \mathbf{w}(t_0; t_0) = -\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0).$$

Bemerkung: Eine einfache Herleitung der Variationsgleichungen erhält man, wenn man voraussetzt, dass $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ sogar eine C^2 -Funktion auf $I_0^0 \times S_\varepsilon^0$ ist. Aus der DGL

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0))$$

folgt durch partielle Differentiation nach \mathbf{y}_0 mit Hilfe der Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \right) = \mathbf{f}_y(t; t_0, \mathbf{y}_0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \right).$$

Vertauscht man nun nach dem Satz von Schwarz auf der linken Seite die partiellen Ableitungen, so erhält man gerade die erste Variationsgleichung für die matrix $\mathbf{W}(t, t_0)$. Die zugehörige Anfangsbedingung ergibt sich ebenso durch Differentiation der Identität $\mathbf{y}(t_0; t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$ nach \mathbf{y}_0 . ■