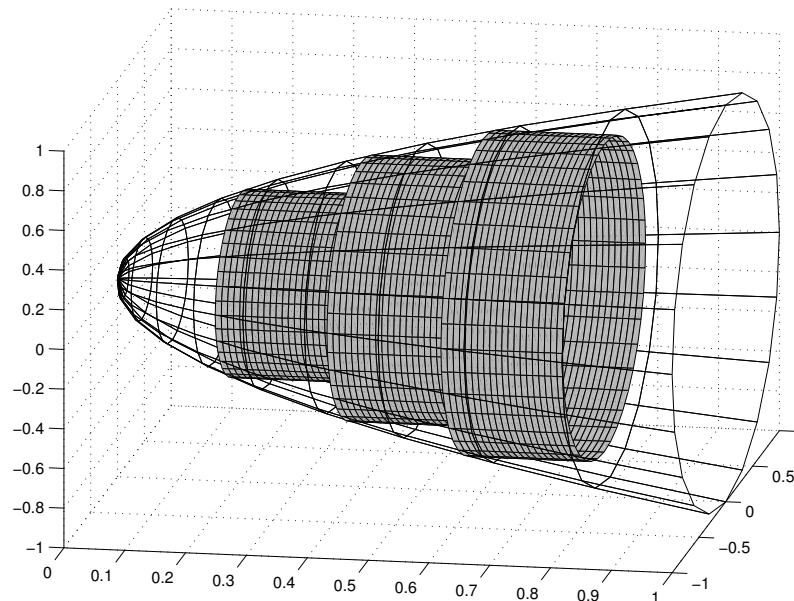


9. Anwendungen der Integralrechnung

9.1 Rotationskörper

A. Volumen



Approximation eines Volumens durch Zylinder

Zerlegung: $Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$,

Querschnittsfläche: $Q(x_i)$,

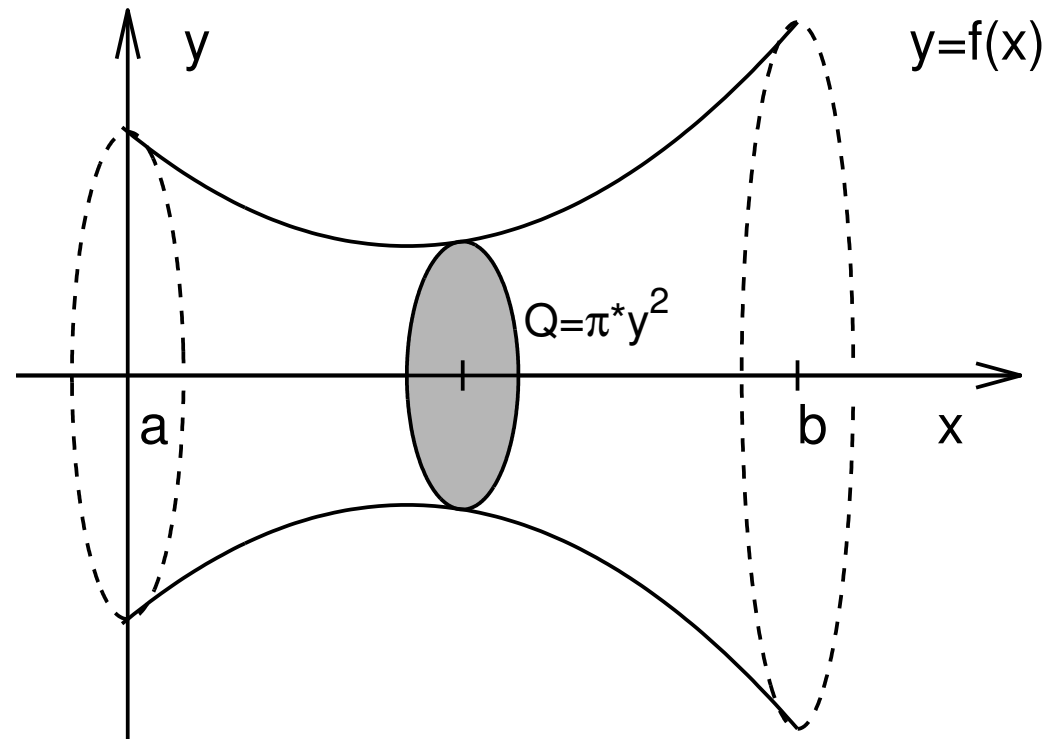
Ersatzvolumen: $V(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i) (x_{i+1} - x_i)$.

Grenzwert: $\|Z_m\| \rightarrow 0 \ (m \rightarrow \infty) \Rightarrow V = \int_a^b Q(x) \, dx$.

Prinzip von Cavalieri: Haben zwei Körper für alle x jeweils die gleiche Querschnittsfläche $Q(x)$, so sind ihre Volumina gleich.

Rotationskörper: Rotation eines Funktionsgraphen $y = f(x)$ um die x -Achse

$$V_{\text{Rot}} = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx. \quad (9.1.1)$$



Volumen eines Rotationskörpers

Beispiel (9.1.2) Rotationsellipsoid

Durch Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0,$$

um die x -Achse erhält man ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen

$$V_{\text{Rot}} = \pi \int_{-a}^a \left(b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right)^2 dx = \pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

Speziell für $a = b = r$ ergibt sich das Volumen einer Kugel :

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

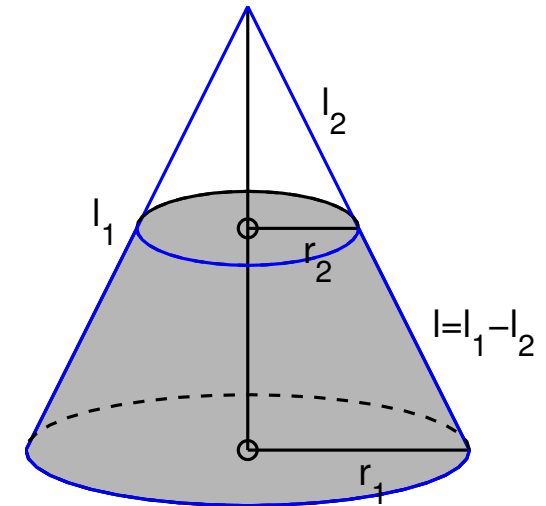
B. Mantelfläche

Mantelfläche eines geraden Kreiskegels.

$$M = \pi r l.$$

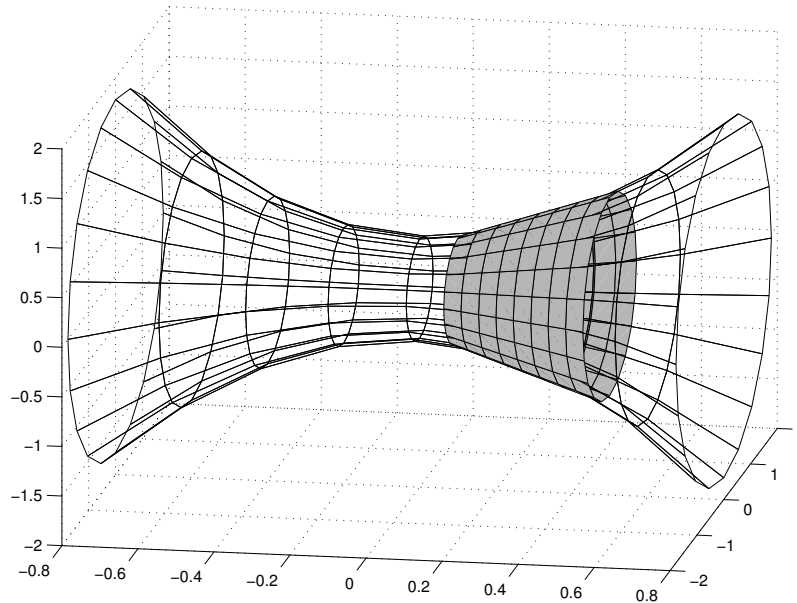
Mantelfläche eines Kegelstumpfs.

(Strahlensatze: $r_1 : l_1 = r_2 : l_2$)



$$\begin{aligned} M &= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2 = \pi (r_1 l_1 + r_2 l_1 - r_2 l_1 - r_2 l_2) \\ &= \pi (r_1 l_1 + r_2 l_1 - r_1 l_2 - r_2 l_2) = \pi (r_1 + r_2) (l_1 - l_2) \\ &= \pi (r_1 + r_2) l. \end{aligned}$$

Wir approximieren nun die Mantelfläche eines Rotationskörpers durch die Summe der Mantelflächen von approximierenden Kegelstümpfen.



Mit $y_i := f(x_i)$, $\Delta x_i := x_{i+1} - x_i$ und $\Delta y_i := y_{i+1} - y_i$ ergibt sich für die Summe der Kegelstumpf-Mantelflächen:

$$\begin{aligned}
M(Z) &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi (y_i + y_{i+1}) \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\
&= 2 \pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i \\
\Rightarrow M_{\text{Rot}} &= 2 \pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (9.1.3)
\end{aligned}$$

Beispiel (9.1.4) Oberfläche einer Kugel

Mit $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ erhält man:

$$O_{\text{Kugel}} = 2 \pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2 \pi r \int_{-r}^r dx = 4 \pi r^2.$$

9.2 Kurven und Bogenlänge

Definition (9.2.1)

a) Eine stetige Funktion $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Kurve** im \mathbb{R}^n ,
genauer: **Parameterdarstellung einer Kurve**.

$c(a)$: **Anfangspunkt**, $c(b)$: **Endpunkt**.

Eine Kurve c heißt **geschlossen**, falls $c(a) = c(b)$ gilt.

b) Sind alle Koordinatenfunktionen c_j von c stetig differenzierbar,
so heißt c eine **C^1 -Kurve**.

Gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$, so dass c auf
jedem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ eine C^1 -Funktion ist, so heißt c eine
stückweise C^1 -Kurve.

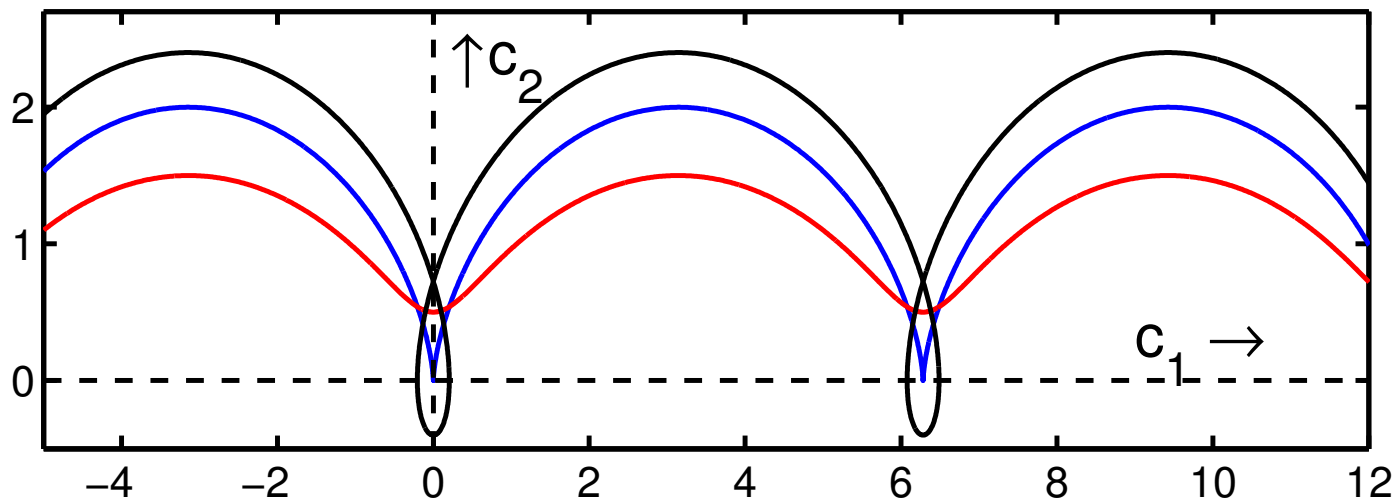
c) Eine C^1 -Kurve c heißt **glatt**, falls

$$\forall t \in [a, b] : c'(t) = (c'_1(t), \dots, c'_n(t))^T \neq 0.$$

Beispiele (9.2.2)

a) $c(t) := (\cos t, \sin t)^\top$, $t \in [0, 2\pi]$, beschreibt einen **Kreis**.

b) Zu $a, r > 0$ beschreibt $c(t) := (rt - a \sin t, r - a \cos t)^\top$, $t \in \mathbb{R}$, eine **Zykloide**. Wegen $c'(t) := (r - a \cos t, a \sin t)^\top$ ist die Kurve im Fall $r = a$ an den Stellen $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht glatt! In allen anderen Fällen ist die Zykloide glatt.



c) $\mathbf{c}(t) := (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t), ht)^\top$, $t \in \mathbb{R}$, beschreibt eine **Schraubenlinie** mit Radius $r > 0$ und „Ganghöhe“ h .

Parameterwechsel (9.2.3)

Ist $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die „neue“ Kurve $\tilde{\mathbf{c}}(\tau) := \mathbf{c}(h(\tau))$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, gleiche Gestalt und gleichen Durchlaufsinne wie die Kurve \mathbf{c} . Man nennt $t = h(\tau)$ daher einen **Parameterwechsel** bzw. eine **Umparametrisierung**.

Kurven, die durch Parameterwechsel auseinander hervorgehen, werden als gleich angesehen.

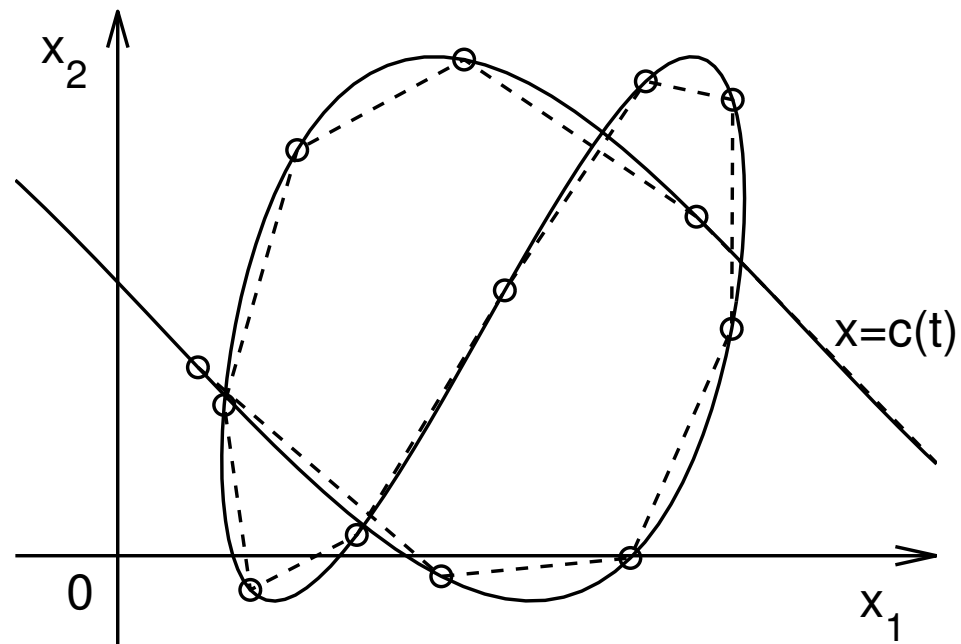
Jede stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ lässt sich auch als eine Kurve auffassen:

$$\mathbf{c}(x) := (x, f(x))^\top, \quad a \leq x \leq b,$$

$$\text{oder: } \mathbf{c}(t) := (a + t(b - a), f(a + t(b - a)))^\top, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Bogenlänge einer Kurve (9.2.4)

Zur Bestimmung der Länge einer Kurve c wird diese durch einen Kantenzug (Polygonzug) approximiert.



Approximation durch Polygonzug

Man setzt zu einer Zerlegung $Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$

$$L(Z) := \sum_{j=0}^{m-1} \| \mathbf{c}(t_{j+1}) - \mathbf{c}(t_j) \|_2.$$

Anschaulich ist klar: $L(Z) \rightarrow L(\mathbf{c})$ für $\|Z\| \rightarrow 0$.

Definition (9.2.5) Ist $\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt \mathbf{c} **rektifizierbar** und

$$L(\mathbf{c}) := \sup\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} L(Z)$$

heißt **die Länge (Bogenlänge) der Kurve** \mathbf{c} .

Satz (9.2.6)

Jede C^1 -Kurve \mathbf{c} ist rektifizierbar, und für die Länge von \mathbf{c} gilt

$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b \| \mathbf{c}'(t) \|_2 dt.$$

Beispiel (9.2.7) Für den Zykloidenbogen:

$$\mathbf{c}(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t)^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

erhält man

$$\mathbf{c}'(t) = (1 - \cos t, \sin t)^T$$

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2 \sin(t/2)$$

$$L(\mathbf{c}) = 2 \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 8.$$

Satz (9.2.8)

Die Bogenlänge einer C^1 -Kurve ist parametrisierungsinvariant!

Definition (9.2.9)

a) Für eine C^1 -Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt

$$s := S(t) := \int_a^t \|c'(\tau)\| d\tau, \quad a \leq t \leq b,$$

die **Bogenlängenfunktion**.

b) Ist c glatt, so ist die Bogenlängenfunktion $S : [a, b] \rightarrow [0, L(c)]$ ein C^1 -Parameterwechsel. Daher existiert die Umkehrabbildung S^{-1} und diese ist ebenfalls ein C^1 -Parameterwechsel: $t = S^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq L(c)$.

Die Parametrisierung:

$$\tilde{c}(s) := c(S^{-1}(s)), \quad 0 \leq s \leq L(c),$$

heißt **Parametrisierung nach der Bogenlänge**.

Bemerkung (9.2.10)

a) Für die Parametrisierung von c nach der Bogenlänge gilt

$$\tilde{c}'(s) = c'(S^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|c'(S^{-1}(s))\|}.$$

Dies ist ein **Einheitsvektor**, d.h., die Parametrisierung ist derart, dass die Kurve c mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag 1 durchlaufen wird.

b) $\tilde{c}'(s)$ ist damit zugleich der **Einheitstangentenvektor**.

Durch Differentiation von $\langle \tilde{c}'(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 1$ nach s findet man:

$$\langle \tilde{c}''(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 0,$$

d.h., der in der Bogenlängenparametrisierung berechnete **Beschleunigungsvektor** $\tilde{c}''(s)$ steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor.

c) $\mathbf{n}(s) := \frac{\tilde{\mathbf{c}}''(s)}{\|\tilde{\mathbf{c}}''(s)\|}$ heißt der **Hauptnormalenvektor** von \mathbf{c} ,
 $\kappa(s) := \|\tilde{\mathbf{c}}''(s)\|$, $0 \leq s \leq L(\mathbf{c})$, heißt die **Krümmung** von \mathbf{c} .
 Schließlich heißt die von $\tilde{\mathbf{c}}'(s)$ und $\tilde{\mathbf{c}}''(s)$ aufgespannte Ebene durch $\tilde{\mathbf{c}}(s)$ die **Schmiegeebene** der Kurve \mathbf{c} im Punkt $t = S^{-1}(s)$.

Einige Parametrisierungen (9.2.11)

a) Funktionsgraph im \mathbb{R}^2 : $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$

$$\mathbf{c}(x) = (x, y(x))^{\top}, \quad \mathbf{c}'(x) = (1, y'(x))^{\top}$$

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (\text{Bogenlängenelement})$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx, \quad \kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}.$$

b) Funktionsgraph im \mathbb{R}^3 : $y = y(x)$, $z = z(x)$, $a \leq x \leq b$,

$$\mathbf{c}(x) = (x, y(x), z(x))^{\top}, \quad \mathbf{c}'(x) = (1, y'(x), z'(x))^{\top}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} \, dx$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2} \, dx$$

$$\kappa(x) = \frac{\sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)(y''^2 + z''^2) - (y'y'' + z'z'')^2}}{(1 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

c) Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2 : $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $a \leq t \leq b$,

$$\mathbf{c}(t) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^{\top}, \quad L(\mathbf{c}) = \int_a^b \sqrt{r'^2 + r^2 \varphi'^2} \, dt,$$

$$\kappa(t) = \frac{|\varphi'(2r'^2 + r^2\varphi'^2) + r(r'\varphi'' - \varphi'r'')|}{(r'^2 + r^2\varphi'^2)^{3/2}}.$$

d) **Kugelkoordinaten im \mathbb{R}^3 :** $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$

$$\mathbf{c}(t) = (r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi)^\top$$

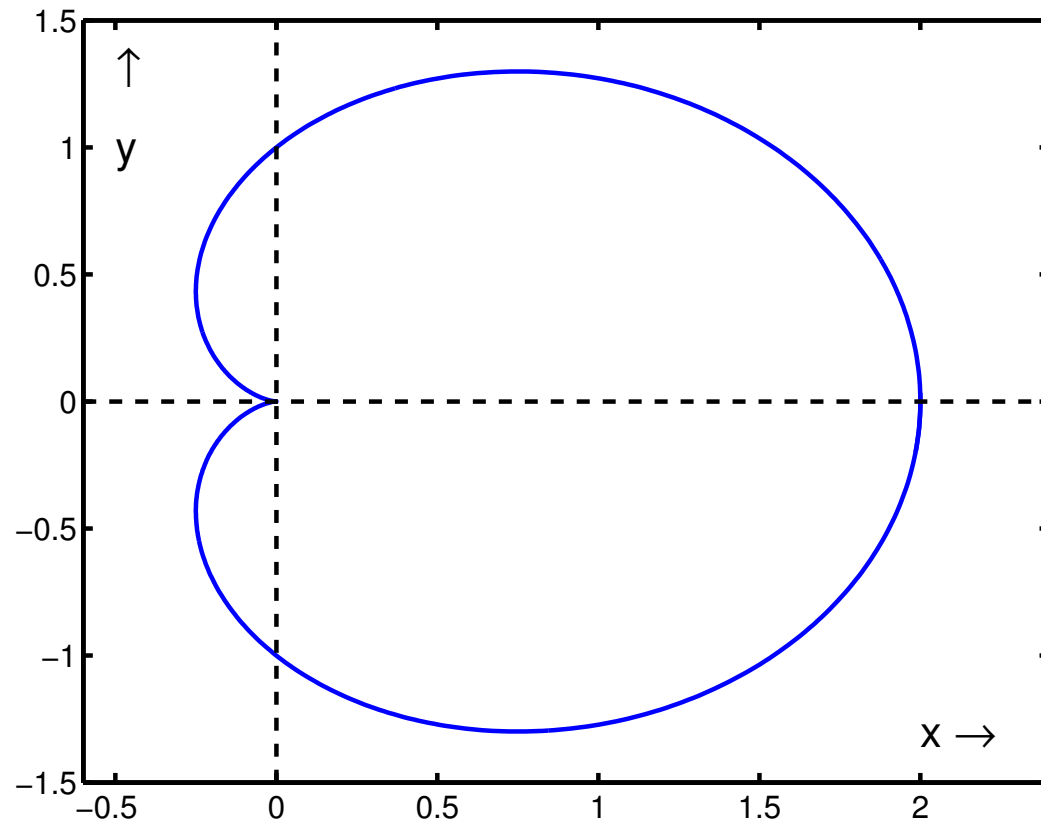
$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b \sqrt{r'^2 + r^2 \varphi'^2 \cos^2 \psi + r^2 \psi'^2} dt.$$

Beispiel (9.2.12): Kardioide (Herzlinie)

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Für die Länge der Kardioide (Umfang) findet man:

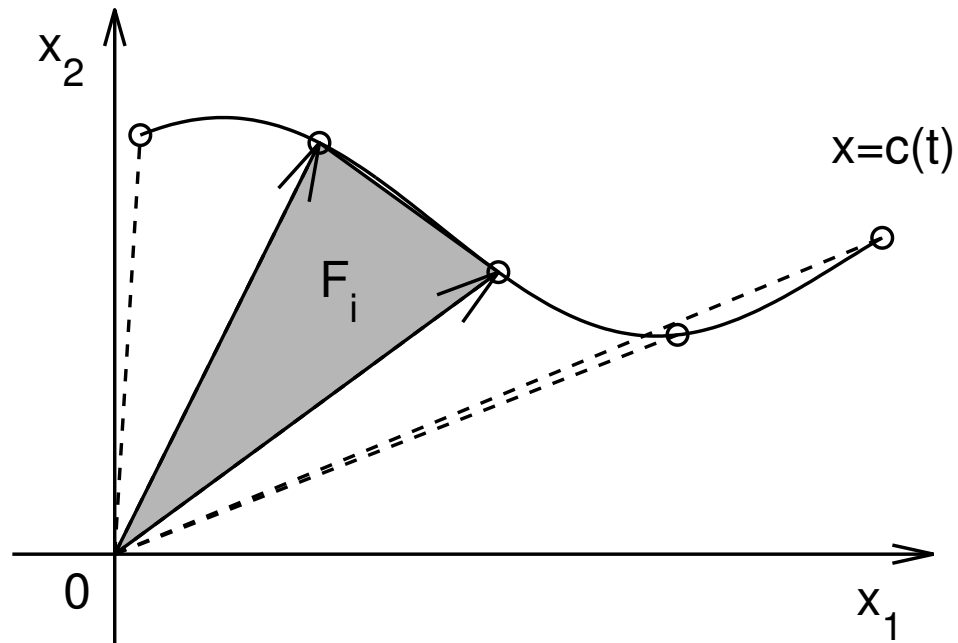
$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + a^2 (1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 8a.$$



Die Kardioide

Die von einer Kurve umschlossene Fläche (9.2.13)

Gegeben: C^1 -Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Gesucht ist die Fläche, die der Ortsvektor $c(t)$ im Zeitintervall $[a, b]$ überstreicht.



Vom Ortsvektor überstrichene Fläche

Zerlegung: $Z = \{t_0 < t_1 < \dots < t_m\}$ von $[a, b]$.

Approximation der Fläche durch eine Summe von Dreiecksflächen

$$|F_i| = \frac{1}{2} \|\mathbf{c}(t_i) \times \mathbf{c}(t_{i+1})\| = \frac{1}{2} |x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i|.$$

$$\begin{aligned} F(Z) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{t_{i+1} - t_i} \Delta t_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(x_i \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} y_i \right) \Delta t_i \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(x_i y'_i - x'_i y_i \right) \Delta t_i =: R(Z) \end{aligned}$$

Grenzwert ($\|Z\| \rightarrow 0$):

$$F(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x(t) y'(t) - x'(t) y(t) \right) dt .$$

Bemerkungen (9.2.14)

a) Man beachte, dass $F(c)$ positiv oder negativ ist, je nachdem, ob c die Fläche im mathematisch positiven oder negativen Sinn umläuft! Der Umlaufsinn kann sich dabei auch während der Durchlaufung ändern!

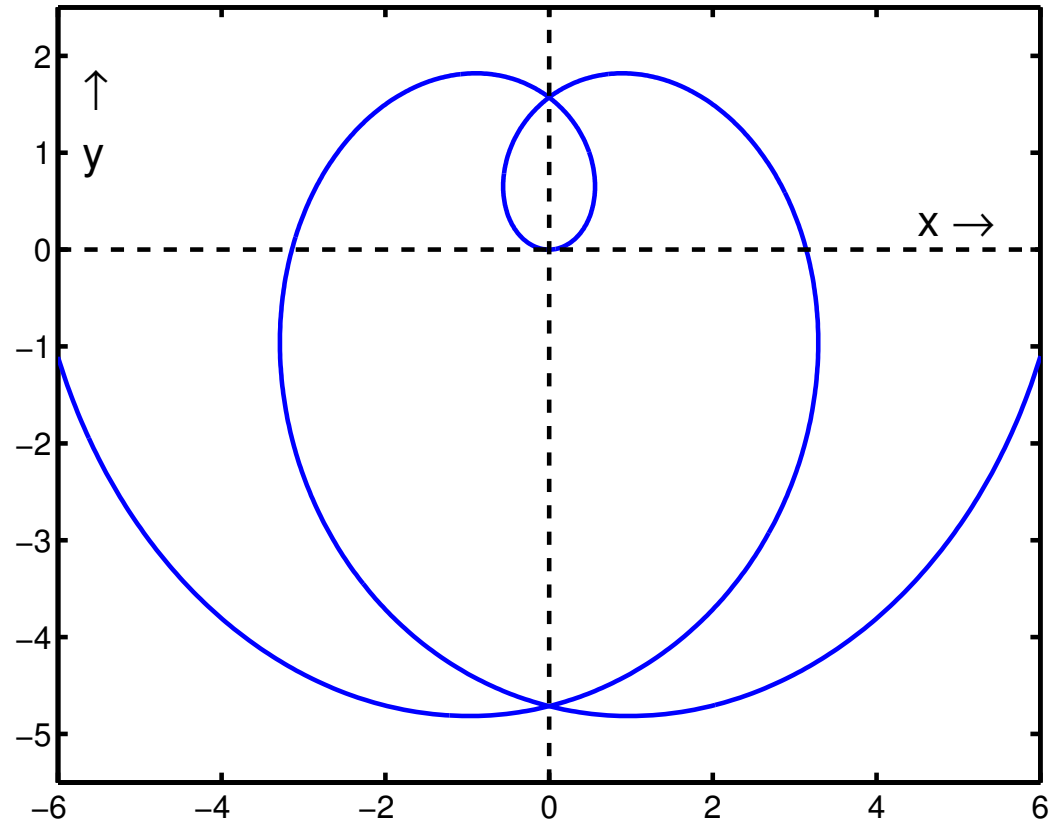
b) Bei einer geschlossenen Kurve erhält man den Inhalt der von ihr umschlossenen Fläche.

Beispiel (9.2.15) Archimedische Spirale

$$x(\varphi) := a \varphi \cos \varphi, \quad y(\varphi) := a \varphi \sin \varphi, \quad a > 0, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Wir bestimmen Umfang und Fläche der innersten Schleife.

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 + a^2 \varphi^2} d\varphi = \frac{a}{2} \left[\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \ln \left(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2} \right) \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &\approx 4.158 a. \end{aligned}$$



Die Archimedische Spirale

Zur Berechnung der Fläche verwenden wir: $x y' - x' y = r^2 \varphi'$.
 Hiermit folgt für die Fläche der innersten Schleife :

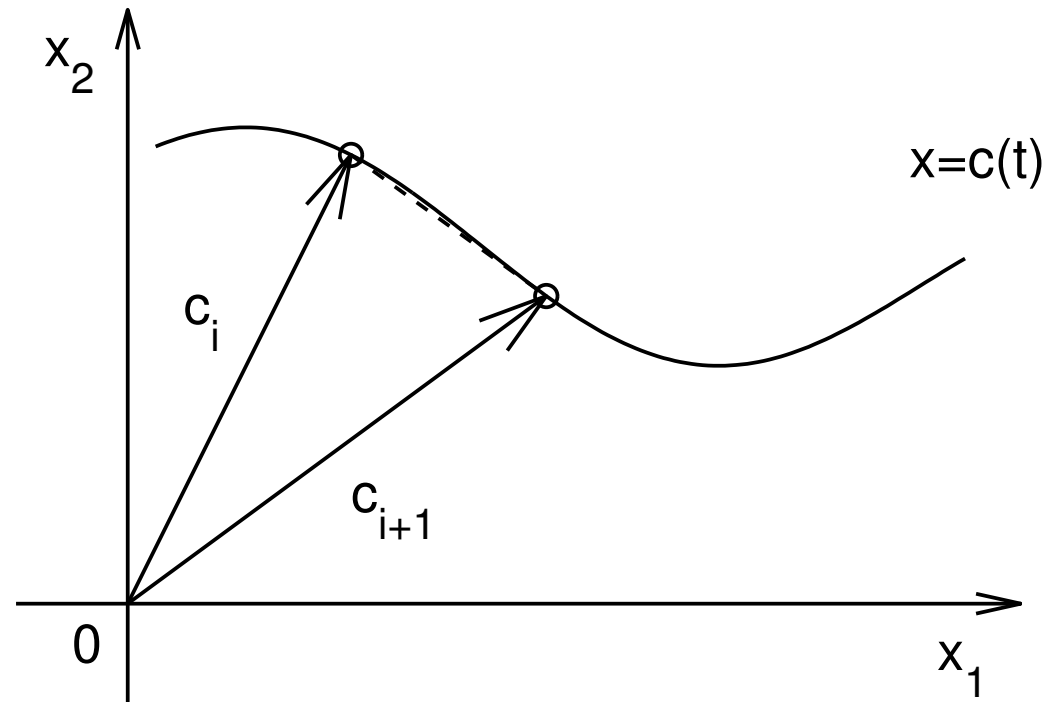
$$F = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi^2 d\varphi \approx 1.292 a^2 .$$

9.3 Kurvenintegrale

Gegeben sei ein krummliniger, inhomogen mit Masse belegter Draht. Aufgabe ist die Bestimmung der Gesamtmasse des Drahtes.

Position des Drahtes: $\mathbf{x} = \mathbf{c}(t)$, $a \leq t \leq b$, (C^1 -Kurve im \mathbb{R}^n).

In $\mathbf{x} = \mathbf{c}(t)$ hat der Draht die Massendichte: $\rho(\mathbf{x}) = \frac{\text{Masse}}{\text{Längeneinheit}}$



Gesamtmasse eines massebelegten Drahtes

Zerlegung: $Z = \{t_0 < t_1 < \dots < t_m\}$ von $[a, b]$.

Massendichte auf dem Drahtstück $\mathbf{c}(t_i), \mathbf{c}(t_{i+1})$: $\approx \rho(\mathbf{c}(t_i))$.

Länge des Drahtstücks: $\approx \|\mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i)\|_2$.

Näherung für die Gesamtmasse:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{m-1} \rho(\mathbf{c}(t_i)) \|\mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i)\|_2 \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \rho(\mathbf{c}(t_i)) \left(\sum_{k=1}^n c'_k(\tau_{ki})^2 \right)^{1/2} (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Grenzwert ($\|Z\| \rightarrow 0$): $M(\mathbf{c}) = \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt$.

Definition (9.3.1)

Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ und eine stückweise C^1 -Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$ wird das **Kurvenintegral 1. Art** (auch **Linienintegral**) von f längs \mathbf{c} definiert durch

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \, ds := \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt.$$

ds bezeichnet das **Bogenlängeenelement**: $ds = \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt$.

Im Fall einer **geschlossenen** Kurve \mathbf{c} wird das Kurvenintegral auch mit $\oint_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \, ds$ bezeichnet.

Satz (9.3.2)

Das Kurvenintegral 1. Art ist parametrisierungsinvariant.

Beispiel: $\int_{\mathbf{c}} xyz \, ds$ mit $\mathbf{c}(t) := (\sin t, \cos t, t)^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\int_{\mathbf{c}} xyz \, ds = \int_0^{2\pi} t \cos t \sin t \sqrt{2} \, dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} t \sin(2t) \, dt = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

Beispiel (9.3.3) (Schwerpunkt)

Für ein System aus N Massenpunkten mit Massen m_i und Ortsvektoren $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ ist der Schwerpunkt gegeben durch

$$\mathbf{x}_s = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i}.$$

Überträgt man dieses Ergebnis auf den Fall eines massebelegten Drahtes und ersetzt dabei das Teilstück des Drahtes zwischen $\mathbf{c}(t_i)$ und $\mathbf{c}(t_{i+1})$ durch die Punktmasse

$$\rho(\mathbf{c}(t_i)) \cdot \|\mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i)\|_2$$

zum Ortsvektor $\mathbf{c}(t_i)$, so erhält man für den Schwerpunkt die folgende Näherung

$$\mathbf{x}_s \approx \frac{\sum_i \rho(\mathbf{c}(t_i)) \|\mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i)\| \mathbf{c}(t_i)}{\sum_i \rho(\mathbf{c}(t_i)) \|\mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i)\|},$$

Für $\|Z\| \rightarrow 0$ konvergiert diese Näherung gegen den folgenden Grenzwert:

$$\frac{\int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| \mathbf{c}(t) dt}{\int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt}.$$

Beschreibt man diesen Ausdruck nun durch Kurvenintegrale, so ergibt sich schließlich für den Schwerpunkt des Drahtes:

$$\mathbf{x}_s = \frac{\int_{\mathbf{c}} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} ds}{\int_{\mathbf{c}} \rho(\mathbf{x}) ds}.$$

Das Integral im Zähler ist dabei koordinatenweise auszuwerten.

Beispiel (9.3.4) (Trägheitsmoment)

Rotiert ein Massenpunkt der Masse m im Abstand r und mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse, so gilt für die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta \omega^2.$$

Der Term $\Theta = m r^2$ heißt das **Trägheitsmoment** des Massenpunkts bezüglich der festen Achse.

Bei einem System von N Massenpunkten (m_i, r_i) addieren sich die einzelnen Trägheitsmomente zu einem Gesamt-Trägheitsmoment:

$$\Theta = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2.$$

Für einen massebelegten Draht folgt schließlich wie in den früheren Beispielen:

$$\begin{aligned}\Theta &\approx \sum_i^b \rho(\mathbf{c}(t_i)) \|\mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i)\| r(\mathbf{c}(t_i))^2 \\ &\rightarrow \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\mathbf{c}'(t)\| \cdot r(\mathbf{c}(t))^2 dt, \quad (\|Z\| \rightarrow 0).\end{aligned}$$

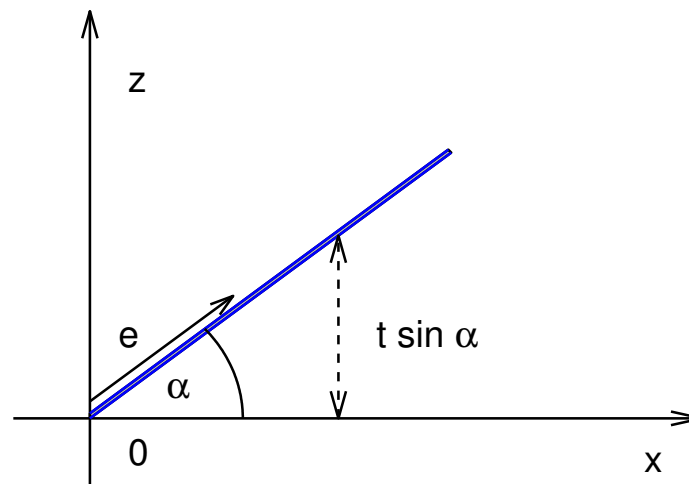
Geschrieben als Kurvenintegral ergibt sich also :

$$\Theta = \int_{\mathbf{c}} \rho(\mathbf{x}) r(\mathbf{x})^2 ds.$$

Hierbei bezeichnet $\rho(\mathbf{x})$ die ortsabhängige Dichte des Drahtes und $r(\mathbf{x})$ den Abstand des Punkts \mathbf{x} von der Drehachse.

Für einen Stab der Länge ℓ mit konstanter Dichte ρ , der mit Winkel α um die x -Achse rotiert, erhält man das folgende Trägheitsmoment (Parametrisierung : $\mathbf{c}(t) = t \mathbf{e}$, $\|\mathbf{e}\| = 1$):

$$\Theta_{x\text{-Achse}} = \int_0^{\ell} \rho \cdot (t \sin \alpha)^2 \cdot \|\mathbf{e}\| dt = \frac{1}{3} \rho \ell^3 \sin^2 \alpha.$$



Trägheitsmoment eines Stabes