Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Ingenuin Gasser

Wintersemester 2002/03

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Modellieren in der Angewandten Mathematik"

1. Aufgabe: (7 Punkte) Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-\varepsilon u'' + (x - \frac{1}{2})u' = 0, \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta.$$

(a) Lösen Sie das volle Problem und versuchen Sie daraus zu ersehen, wo Grenzschichten auftreten.

(b) Zeigen Sie, daß die Lösung eine Symmetrie aufweißt, d.h.

$$u(x) = -u(1-x) + c$$

mit entsprechend gewählter Konstante.

(c) Lösen Sie das Problem als singulär gestörtes Problem. (benutzen Sie b) dazu).

2. Aufgabe: (7 Punkte) Ein Modell, welche die Dynamik der Population $N^\star$ eines für eine bestimmte Tannenart (vor allem in Kanada) sehr schädlichen Wurms beschreibt, ist durch

$$\frac{dN^\star}{dt^\star} = r_B N^\star (1 - \frac{N^\star}{K_B}) - \frac{BN^{\star 2}}{A^2 + N^{\star 2}}$$

gegeben. Der Wurm frißt die Nadeln der Tanne und diese sterben dann ab. Dabei ist r_B die Geburtsrate des Wurms, K_B der Nahrungssättigungswert der Population (gegeben durch die vorhandene Menge an Nadeln (pro Fläche)). Der zweite Term auf der rechten Seite beschreibt die Tatasche, dass der Wurm selbst von Vöglen gefressen wird. Für große Dichten kommt es zu einer Sättigung der "Freßrate".

(a) Skalieren Sie das Problem so, dass sie mit einer skalierten Geburtsrate r und einem skalierten Nahrungssättigungswert k als dimensionslose Parameter auskommen.

(b) Diskutieren Sie die Existenz von stationären Lösungen der entsprechenden skalierten Gleichung in Abhängigkeit von r und k (ohne diese notwendigerweise explizit zu berechnen).

(c) Wie ändert sich das Langzeitverhalten der Lösungen bei einem bestimmte Anfangswert, falls r zunimmt.

3. Aufgabe: (6 Punkte) Betrachten Sie das in der Vorlesung behandelte Populationsmodell mit Altersabhängigkeit. "Langzeitlösungen" der Form $n(t,a) = e^{\gamma t} r(a)$ der Gleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} = -\mu(a) n$$

mit Sterberate $\mu(a)$ und Geburtsrate $b(a)$ und Bedingung

$$n(t,0) = \int_0^\infty b(a) n(t,a) da$$

existieren unter der Bedingung (an γ)

$$\int_0^\infty b(a) e^{-\gamma a - \int_0^a \mu(s) ds} da = 1.$$

Nehmen Sie an, dass die Geburtsrate nur in einer kleinen Umgebung eines Wertes a_0 von Null verschieden ist. Unter welcher Bedingungen stirbt die Population dann - unabhängig von der Sterberate - aus?