

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Thomas Schmidt

Version: 24. Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	1
Grundlagen und Terminologie, Typen von Differentialgleichungen	3
1 Lösungsmethoden für spezielle Typen von Gleichungen	9
1.1 Lösungsformel für die allgemeine skalare lineare GDG erster Ordnung	9
1.2 Exponentialansatz bei skalaren linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten	11
1.3 Separation der Variablen	13
1.4 Exakte Differentialgleichungen	17
1.5 Potenzreihenansatz	20
1.6 Reduktionsverfahren von d'Alembert	24
1.7 Variablentransformation bei Differentialgleichungen	26
1.8 Zur geometrischen Interpretation von GDGen und GDG-Systemen	28
2 Die Hauptsätze der Theorie	31
2.1 Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf	31
2.2 Der Satz über die maximale Lösung	36
2.3 Kriterien für globale Existenz von Lösungen	38
3 Lineare GDG-Systeme	41
3.1 Allgemeine Theorie linearer GDG-Systeme	41
3.2 Matrix-Exponentialansatz bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten . .	47
3.3 Inhomogene lineare Gleichungen und Systeme	56
4 Ljapunov-Stabilität von Ruhelagen	61
4.1 Begriffe und Definitionen	61
4.2 Stabilität von Ruhelagen linearer Systeme	64
4.3 Stabilität von Ruhelagen nicht-linearer Systeme, Ljapunov-Funktionen	65
2 Die Hauptsätze der Theorie (Fortsetzung)	75
2.4 Der Existenzsatz von Peano	75
2.5 Stetige Abhängigkeit und der Stetigkeitssatz	76
2.6 Der Differenzierbarkeitssatz	80
Literaturverzeichnis	83

Falls Sie in diesem Skript Fehler (jeglicher Art) finden oder sonstige Hinweise haben, bitte ich Sie, mir dies entweder persönlich oder unter schmidt@math.fau.de mitzuteilen.

Grundlagen und Terminologie, Typen von Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung mit endlich vielen Ableitungen einer Funktion einer reellen Variablen. Die Lösung einer derartigen Gleichung ist in der Mathematik sowie in Naturwissenschaft und Technik in vielen verschiedenen Zusammenhängen erforderlich und wird in dieser Vorlesung systematisch behandelt — sowohl in rechnerischer als auch in theoretischer Hinsicht. Als Erstes werden hierzu der Gleichungs- und der Lösungsbegriff wie folgt präzisiert, wobei \mathbb{K} **im Folgenden stets als Platzhalter für einen der beiden vollständigen Körper \mathbb{R} (reelle Zahlen) oder \mathbb{C} (komplexe Zahlen)** verwendet wird.

Terminologie. Eine *gewöhnliche Differentialgleichung*, kurz **GDG** oder (*gewöhnliche*) **DGL**, ist eine (zunächst formale) Gleichung in der **impliziten Form**

$$g(\cdot, u, u', u'', \dots, u^{(m-1)}, u^{(m)}) \equiv 0 \quad (0.1)$$

oder der nach $u^{(m)}$ aufgelösten, **expliziten Form**

$$u^{(m)} = f(\cdot, u, u', u'', \dots, u^{(m-1)}). \quad (0.2)$$

Gegeben sind dabei eine Zahl $m \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, genannt¹ die **Ordnung der Gleichung**, normierte Räume \mathcal{X} und \mathcal{Z} über \mathbb{K} und die **Strukturfunktion** $g: \hat{D} \rightarrow \mathcal{Z}$ auf einem Definitionsbereich $\hat{D} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{X}^{1+m}$ beziehungsweise $f: D \rightarrow \mathcal{X}$ auf einem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{X}^m$. Gesucht ist bei (0.1) und (0.2) stets die **unbekannte Funktion** u .

Bemerkung. Die explizite Form ist weniger allgemein und entspricht dem Spezialfall $\hat{D} = D \times \mathcal{X}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $g(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) = x_m - f(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ der impliziten Form.

Die durch die Gleichungen (0.1) und (0.2) symbolisierten Forderungen an u sind wie folgt zu verstehen:

Definition 0.1 (Lösungen von DGLen). Eine m -mal differenzierbare Funktion $u: I \rightarrow \mathcal{X}$ (mit Ableitung $u': I \rightarrow \mathcal{X}$, zweiter Ableitung $u'': I \rightarrow \mathcal{X}$, ..., m -ter Ableitung $u^{(m)}: I \rightarrow \mathcal{X}$) heißt eine Lösung der Differentialgleichung (0.1) beziehungsweise (0.2) auf einem Intervall I positiver Länge in \mathbb{R} , wenn für alle $t \in I$ gilt: $(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(m-1)}(t), u^{(m)}(t)) \in \hat{D}$ erfüllt

$$g(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(m-1)}(t), u^{(m)}(t)) = 0 \quad \text{in } \mathcal{Z}$$

¹Im Fall der impliziten Form (0.1) ist es tatsächlich nur dann sinnvoll, m als Ordnung der Gleichung zu bezeichnen, wenn $f(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) \neq f(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, \tilde{x}_m)$ für gewisse $(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)$ und $(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, \tilde{x}_m)$ in \hat{D} vorkommt und somit sichergestellt ist, dass $u^{(m)}$ tatsächlich eine Rolle spielt. Im Fall der expliziten Form (0.2) ist die Ordnung m auch ohne eine solche Zusatzüberlegung wohldefiniert.

beziehungsweise $(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(m-1)}(t)) \in D$ erfüllt

$$u^{(m)}(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(m-1)}(t)) \quad \text{in } \mathcal{X}.$$

(Hierbei interpretiert man Differenzierbarkeit und Ableitungen in eventuell zu I gehörigen Randpunkten als einseitige Begriffsbildungen, also $u^{(k)}(a) := \lim_{h \searrow 0} \frac{u^{(k-1)}(a+h) - u^{(k-1)}(a)}{h}$ für einen linken Randpunkt a und $u^{(k)}(b) := \lim_{h \searrow 0} \frac{u^{(k-1)}(b) - u^{(k-1)}(b-h)}{h}$ für einen rechten Randpunkt b .)

Entscheidendes Merkmal von GDGen ist, dass die unbekannte Funktion u auf einer Teilmenge von \mathbb{R} definiert und somit eine **Funktion einer reellen Variablen** ist. Dies wird durch das Wort ‚gewöhnlich‘ zum Ausdruck gebracht und unterscheidet GDGen von den sogenannten **partiellen Differentialgleichungen**, bei denen die unbekannte Funktion von 2 oder mehr reellen Variablen abhängt und partielle Ableitungen nach diesen Variablen auftreten. Auch Differentialgleichungen für Funktionen einer komplexen Variablen gehören (wegen der Entsprechung $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$) eher ins Gebiet der partiellen Differentialgleichungen.

Grundlegende Fragen bei DGLen sind die nach

- (1) **expliziten Formeln** für Lösungen,
- (2) **Existenz** von Lösungen,
- (3) **Eindeutigkeit** von Lösungen,
- (4) **qualitativen Aussagen** über das Verhalten von Lösungen,
- (5) **Stabilität** der Lösungen gegen Störungen, Abhängigkeit der Lösungen von den Daten,
- (6) **numerischer Berechnung** der Lösungen.

Der erste Punkt, die Berechnung expliziter Lösungen, wird ein Hauptthema der Vorlesung sein. Es gibt hierzu etliche verschiedene Methoden, aber dennoch ist die Bestimmung solcher Formeln nur für spezielle (Typen von) Gleichungen möglich. Dies verhält sich ähnlich zur Integration und der Bestimmung von Stammfunktionen: Auch dort gibt es verschiedene Verfahrensweisen (Produktintegration, Substitutionen, Partialbruchzerlegung, ...), aber dennoch können Stammfunktionen nicht in allen Fällen als elementare Funktionen durch explizite Formeln angegeben werden. Wegen dieser prinzipiellen Ähnlichkeit, aber auch weil manche Lösungsverfahren für DGLen die Bestimmung von Stammfunktionen als Teilschritte beinhalten, spricht man bei der Bestimmung von Lösungen einer gegebenen DGL auch von der **Integration der DGL**.

Die obigen Punkte 2–6 sind insbesondere in denjenigen Fällen von Interesse, in denen nicht explizit gelöst werden kann. In dieser Vorlesung sollen insbesondere die grundlegenden Antworten auf die Fragen 2 und 3 in Form abstrakter Existenz- und Eindeutigkeitssätze vorgestellt werden. Aufbauend auf diesen Antworten macht es dann Sinn, sich mit den Fragen 4 und 5, also qualitativen Aussagen und Stabilitätstheorie, zu beschäftigen, was gegen Ende der Vorlesung zumindest angerissen werden soll. Sind auch diese Fragen positiv beantwortet, so kann man zur numerischen Berechnung von Lösungen kommen, was jedoch kein Vorlesungsthema sein wird.

Terminologie. Sind $N := \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{X} < \infty$ und $M := \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} < \infty$, so kann man direkt

$$\mathcal{X} = \mathbb{K}^N \quad \text{und} \quad \mathcal{Z} = \mathbb{K}^M$$

annehmen. Dann bildet (0.1) ein System von M (Komponenten-)Gleichungen für N unbekannte (Komponenten-)Funktionen. Man unterscheidet zwischen einer (**Einzel-)Gleichung** ($M = 1$)

oder einem **System von Gleichungen** ($M \geq 2$) für **eine skalare Funktion** ($N = 1$) oder **mehrere Funktionen** ($N \geq 2$). In der Regel ist nur der Fall $M = N$ mit genau so vielen Gleichungen wie unbekannt Funktionen sinnvoll, denn nur in diesem kann man allgemeine Sätze über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen erwarten. Für (0.2) gilt im Wesentlichen dasselbe, wobei man sinngemäß immer im Fall $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $M = N$ ist.

Bemerkung. Es ist sinnvoll, den Fall $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{X} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} = \infty$ zuzulassen, denn dies erlaubt es manchmal, partielle Differentialgleichungen formal als GDGen aufzufassen. Beispielsweise ist die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, x) \quad \text{für } (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

für Funktionen $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ formal äquivalent zur GDG

$$u'(t) = A[u(t)]$$

mit dem linearen Ableitungsoperator $A[f] := f''$, wobei $u(t)$ der partiellen Funktion $w(t, \cdot)$ entspricht und u daher Werte in einem ∞ -dimensionalen Funktionenraum $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$ annimmt.

Terminologie (Autonome DGLen, lineare DGLen).

- (1) *Hängt die Strukturfunktion in (0.1) beziehungsweise (0.2) nicht explizit von der ersten Variablen, der t -Variablen, ab und kann die Gleichung somit in der Form*

$$\tilde{g}(u, u', u'', \dots, u^{(m-1)}, u^{(m)}) \equiv 0 \quad \text{beziehungsweise} \quad u^{(m)} = \tilde{f}(u, u', u'', \dots, u^{(m-1)})$$

geschrieben werden, so spricht man von einer **autonomen DGL**.

- (2) *Ist die Strukturfunktion in (0.1) beziehungsweise (0.2) bei fixierter t -Variable (stetig und) **affin linear in allen weiteren Variablen**, und ist $\widehat{D} = I \times \mathcal{X}^{1+m}$ beziehungsweise $D = I \times \mathcal{X}^m$ mit $I \subset \mathbb{R}$, so spricht man von einer **linearen DGL**. Lineare DGL sind damit genau die, die in der Form*

$$A_m u^{(m)} + A_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + A_2 u'' + A_1 u' + A_0 u = b \quad \text{auf } I \quad (0.3)$$

mit **Koeffizienten(funktionen)** $A_k: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ und **Inhomogenität** $b: I \rightarrow \mathcal{Z}$ geschrieben werden können (bei expliziter Form mit $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$ und ohne $A_m \equiv \text{id}_{\mathcal{X}}$). Hierbei bezeichnet $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ den Raum der (stetigen) linearen Abbildungen von \mathcal{X} nach \mathcal{Z} . Daher kann man die Koeffizienten im Fall $\mathcal{X} = \mathbb{K}^N$, $\mathcal{Z} = \mathbb{K}^M$ als von der t -Variablen abhängige (reelle oder komplexe) $(M \times N)$ -Matrizen betrachten, und analog ist die Inhomogenität dann ein t -abhängiger Vektor in \mathbb{K}^M . Speziell im Fall $M = N = 1$ einer einzelnen skalaren Gleichung handelt es sich sowohl bei A_k als auch bei b einfach um einzelne \mathbb{R} - oder \mathbb{C} -wertige Funktionen von t (und man schreibt dann meist a_k statt A_k).

- (3) *Die lineare DGL in (0.3) hat **konstante Koeffizienten**, wenn die Koeffizientenfunktionen $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m$ alle konstant sind. Sie heißt **homogen**, wenn $b \equiv 0$ gilt, sonst heißt sie **inhomogen**.*

Beispiele (von einzelnen GDGen).

- (1) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist die Gleichung

$$u^{(m)} \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

für \mathbb{K} -wertiges u ein (trivial zu lösendes) Beispiel einer einzelnen, skalaren linearen GDG m -ter Ordnung, die genau die Polynomfunktionen der Ordnung $\leq (m-1)$ als Lösungen hat. Man erkennt an diesem Beispiel bereits den **typischen Effekt, dass die Lösung nicht völlig eindeutig ist, sondern von m Parametern abhängt**, nämlich von den m reellen oder komplexen Koeffizienten eines solchen Polynoms.

- (2) Ein weniger triviales Beispiel mit Parameter $\lambda \in \mathbb{K}$ ist die Gleichung

$$u' = \lambda u \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

für \mathbb{K} -wertiges u . Dies ist eine einzelne, skalare, homogene lineare GDG erster Ordnung mit konstantem Koeffizient λ . Leicht zu ratende Lösungen sind die (reellen oder komplexen) Exponentialfunktionen

$$u(t) = Ce^{\lambda t}$$

mit einer Konstante $C \in \mathbb{K}$ (und später wird klar, dass dies schon alle Lösungen sind).

- (3) Eine einzelne, nicht-autonome, nicht-lineare GDG erster Ordnung in expliziter Form ist²

$$u' = \frac{u^2}{t^3}$$

für \mathbb{K} -wertiges u . Hier ist allerdings $D = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{K}$ und daher kann man nur auf Teilintervallen von $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ lösen. Auf solchen Intervallen findet man die Lösungen $u \equiv 0$ und (mit etwas Herumprobieren) $u(t) = 2t^2$. Weitere Lösungen sind nicht gleichermaßen offensichtlich, später kann aber eine 1-Parameter-Schar von Lösungen leicht ausgerechnet werden; siehe Kapitel 1.1 und 1.3.

- (4) Dass bei impliziter Form viel mehr schief gehen kann, sieht man schon an den zwei einfachen Beispielen

$$e^{u'} \equiv 0 \quad \text{und} \quad u'(1-u') \equiv 0.$$

für \mathbb{K} -wertiges u . Beides sind einzelne, autonome GDGen erster Ordnung, aber die eine besitzt überhaupt keine Lösung und die andere besitzt die *zwei* 1-Parameter-Familien von Lösungen $u_0(t) = C$ und $u_1(t) = t+C$ mit einer Konstante $C \in \mathbb{K}$; somit hat man bei letzterer Gleichung einen Parameter aus $\{0, 1\} \times \mathbb{K}$ frei, und das ist auch schlecht (besonders für AWP; vergleiche unten). Insgesamt kann man wegen solcher Beispiele **keine gute Theorie von GDGen der allgemeinen impliziten Form (0.1) erwarten, und daher geht man in der Theorie fast immer von der expliziten Form (0.2) aus.**

Als Nächstes seien zwei ganz unterschiedliche allgemeine Prinzipien erwähnt:

Prinzip (Reduktion auf Ordnung 1). Die allgemeine GDG m -ter Ordnung in (0.1) für die

²Eigentlich vermeidet man die Vermischung von Funktionen (wie u' und u^2) und Termen (wie t^3). Da von den beiden konsequenteren Notationen (hier wären dies $u'(t) = \frac{u(t)^2}{t^3}$ und $u' = \frac{u^2}{(\cdot)^3}$) aber eine sperrig und eine schlecht lesbar ist, ist es üblich, bei konkreten GDGen eine Ausnahme zu machen und sie wie oben zu notieren.

unbekannte Funktion u ist äquivalent zum System von m GDGen erster Ordnung

$$\begin{aligned} u' &= u_1 \\ u'_1 &= u_2 \\ u'_2 &= u_3 \\ &\vdots \\ u'_{m-2} &= u_{m-1} \\ g(\cdot, u, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, u'_{m-1}) &= 0 \end{aligned} \tag{0.4}$$

für die m unbekanntenen Funktionen $(u, u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$; und auf dieselbe Art und Weise ist (0.2) äquivalent zu einem System erster Ordnung in expliziter Form. Daher kann man sich bei der Untersuchung von GDGen prinzipiell auf den einfacheren Fall der Ordnung 1 beschränken. Dies

ist **wichtig für die Theorie** und nicht immer, aber zumindest **manchmal nützlich für die explizite Berechnung** von Lösungen. Man zahlt aber natürlich einen Preis für die Reduktion der Ordnung, denn auch im Fall, dass (0.1) nur eine einzelne skalare Gleichung der Ordnung $m \geq 2$ ist, ist (0.4) stets ein System; und wenn (0.1) selbst schon ein System der Ordnung $m \geq 2$ mit N Gleichungen für N unbekannte Funktionen ist, so ist (0.4) ein noch größeres System mit mN Gleichungen für mN unbekannte Funktionen.

Prinzip (des Aneinandersetzens von Lösungen). Sei eine GDG m -ter Ordnung in der expliziten Form (0.2) gegeben. Kennt man sowohl eine Lösung u_1 auf einem Intervall (t_1, τ) als auch eine Lösung u_2 auf einem Intervall (τ, t_2) (mit $-\infty \leq t_1 < \tau < t_2 \leq \infty$), gilt

$$\lim_{t \nearrow \tau} u_1^{(k)}(t) = y_k = \lim_{t \searrow \tau} u_2^{(k)}(t) \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, m-1,$$

und ist die Strukturfunktion f stetig an der Stelle $(\tau, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) \in D$, so **erhält man durch Aneinandersetzen**

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t) & \text{für } t < \tau \\ y_0 & \text{für } t = \tau \\ u_2(t) & \text{für } t > \tau \end{cases}$$

eine **Lösung** u der GDG auf dem **Gesamtintervall** (t_1, t_2) . Insbesondere ist $u^{(m-1)}$ dann bei τ differenzierbar und weist dort keinen Knick auf.

Beweis. Für $k = 0, 1, \dots, m-1$ existiert die Ableitung $u^{(k)}$ auf ganz (t_1, t_2) und nimmt den Wert $u^{(k)}(\tau) = y_k$ stetig an. Auf den Teilintervallen (t_1, τ) und (τ, t_2) ist u sogar m -mal differenzierbar und löst die GDG. Mit der Stetigkeit von f in $(\tau, y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ ergibt sich daher

$$\lim_{t \rightarrow \tau} u^{(m)}(t) = \lim_{t \rightarrow \tau} f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m-1)}(t)) = f(\tau, u(\tau), u'(\tau), \dots, u^{(m-1)}(\tau)).$$

Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u^{(m-1)}(\tau+h) - u^{(m-1)}(\tau)}{h} = f(\tau, u(\tau), u'(\tau), \dots, u^{(m-1)}(\tau))$$

und somit die Existenz von $u^{(m)}(\tau)$ und die Lösungseigenschaft von u auf ganz (t_1, t_2) . \square

Schließlich werden noch einige weitere zentrale Begriffe eingeführt:

Terminologie (Allgemeine und spezielle Lösungen, Anfangswertproblem). Auch bei sehr gutartigen GDGen kann man nicht erwarten, dass sie auf einem Intervall I positiver Länge in \mathbb{R} eine eindeutige Lösung besitzen. Vielmehr ist es typisch, dass die Lösungsmenge, auch die **allgemeine Lösung** genannt, **von m Integrationskonstanten aus \mathcal{X} als Parametern abhängt** und man eine eindeutig bestimmte **spezielle Lösung** u erst durch die Forderung von m Nebenbedingungen erhält. Als verbreitetste Form von Nebenbedingungen stellt man **m Anfangsbedingungen (ABen)**

$$u(t_0) = y_0, \quad u'(t_0) = y_1, \quad u''(t_0) = y_2, \quad \dots \quad u^{(m-1)}(t_0) = y_{m-1} \quad (0.5)$$

mit gegebenem $t_0 \in I$ und gegebenen $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1} \in \mathcal{X}$. Koppelt man eine DGL der Form (0.1) oder (0.2) mit den Anfangsbedingungen aus (0.5), so spricht man von einem **Anfangswertproblem (AWP)**, für das man bei gutartigen GDGen die Existenz einer eindeutigen Lösung erwarten kann.

Eine andere häufige Form von Nebenbedingungen im Fall $I = [a, b]$ sind **m Randbedingungen**, die jeweils $u(a), u'(a), u''(a), \dots, u^{(m-1)}(a)$ oder $u(b), u'(b), u''(b), \dots, u^{(m-1)}(b)$ involvieren.

Kapitel 1

Lösungsmethoden für spezielle Typen von Gleichungen

In diesem Kapitel werden verschiedene Lösungsmethoden und Typen von explizit lösbaren DGLen vorgestellt.

1.1 Lösungsformel für die allgemeine skalare lineare GDG erster Ordnung

Die allgemeine skalare lineare GDG erster Ordnung in expliziter Form lautet

$$u' + au = b \quad (1.1)$$

mit Koeffizientenfunktion $a: I \rightarrow \mathbb{K}$ und Inhomogenität $b: I \rightarrow \mathbb{K}$ auf $I \subset \mathbb{R}$. Diese DGL kann mit höchstens zwei Quadraturen, d.h. Stammfunktionsbildungen beziehungsweise Integrationen, allgemein gelöst werden:

Satz 1.1. Sei I ein Intervall positiver Länge in \mathbb{R} und sei die Anfangsbedingung

$$u(t_0) = y_0 \quad (1.2)$$

gegeben durch $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$.

- (I) Im **homogenen Fall** $b \equiv 0$ und für stetiges $a \in C^0(I, \mathbb{K})$ ist die allgemeine Lösung der DGL (1.1) auf I von der Form $u = Ce^{-A}$ mit einer Stammfunktion A zu a auf I und einer Konstanten $C \in \mathbb{K}$, und die eindeutige Lösung des AWP's (1.1)–(1.2) ist auf I gegeben durch

$$u(t) = y_0 e^{A(t_0) - A(t)} = y_0 \exp \left[- \int_{t_0}^t a(s) \, ds \right].$$

- (II) Im **inhomogenen Fall** mit stetigen $a, b \in C^0(I, \mathbb{K})$ ist die allgemeine Lösung der DGL (1.1) auf I von der Form $u = e^{-A}(B+C)$ mit Stammfunktionen A zu a und B zu $e^A b$ auf I sowie einer Konstanten $C \in \mathbb{K}$, und die eindeutige Lösung des AWP's (1.1)–(1.2) auf I ist gegeben durch

$$u(t) = e^{-A(t)} [B(t) - B(t_0) + y_0 e^{A(t_0)}] = e^{-A(t)} \left[\int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) \, ds + y_0 e^{A(t_0)} \right].$$

Beweis. Dass $e^{-A}(B+C)$ Lösung von (1.1) ist, verifiziert man durch die Rechnung (mit HDI, Produkt- und Kettenregel; beachte $A' = a$, $B' = e^A b$)

$$[e^{-A}(B+C)]' + ae^{-A}(B+C) = -ae^{-A}(B+C) + e^{-A}e^A b + ae^{-A}(B+C) = b,$$

und insbesondere löst Ce^{-A} im homogenen Fall. Um zu zeigen, dass alle Lösungen die behauptete Form haben, argumentiert man wie folgt:

(I) Ist u Lösung der homogenen DGL, so folgt

$$(e^A u)' = e^A [u' + au] \equiv 0 \quad \text{auf } I.$$

Nach dem Konstanzsatz ist damit $e^A u \equiv C$ und $u = e^{-A} C$ auf I .

(II) Ist u Lösung der inhomogenen DGL, so folgt

$$(u - e^{-A} B)' = u' + ae^{-A} B - e^{-A} e^A b = -au + b + ae^{-A} B - b = -a(u - e^{-A} B) \quad \text{auf } I,$$

und daher löst $u - e^{-A} B$ die homogene DGL. Gemäß (I) ergibt sich erst $u - e^{-A} B = Ce^{-A}$ und dann $u = e^{-A}(B+C)$ auf I .

Die Behauptung über die Anfangswerte folgt problemlos, indem man die Konstante C durch Einsetzen bestimmt. \square

Beispiele.

(1) Bei

$$u' = \lambda u \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

mit $\lambda \in \mathbb{K}$ zeigt der Satz (mit $a \equiv -\lambda$, $A(t) = -\lambda t$), dass die zuvor geratenen Lösungen $u(t) = Ce^{\lambda t}$ schon *alle* Lösungen sind.

(2) Bei der Gleichung

$$u' + t^2 u = t^2 \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

rät man leicht die Lösung $u \equiv 1$. Dies ist aber noch nicht die allgemeine Lösung; letztere bestimmt man gemäß Teil (II) des Satzes mit $a(t) = b(t) = t^2$, $A(t) = \frac{1}{3}t^3$, $B(t) = e^{\frac{1}{3}t^3}$ zu

$$u(t) = 1 + Ce^{-\frac{1}{3}t^3}.$$

(3) Analog erkennt man $u(t) = 1 + Ce^{-A(t)}$ (mit einer Stammfunktion A zu a) als allgemeine Lösung zu $u' + au = a$ auf I mit beliebigem $a \in C^0(I, \mathbb{K})$.

(4) Als Lösung des AWP's auf dem Intervall $(0, \infty)$

$$u' = \frac{2}{t}u + t \log t, \quad u(1) = 2$$

(log steht für den natürlichen Logarithmus) berechnet man gemäß Teil (II) des Satzes mit $A(t) = -2 \log t$:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{2 \log t} \left[\int_1^t e^{-2 \log s} s \log s \, ds + 2e^{-2 \log 1} \right] \\ &= t^2 \left[\int_1^t \frac{\log s}{s} \, ds + 2 \right] \\ &= t^2 \left[\frac{1}{2}(\log t)^2 - \frac{1}{2}(\log 1)^2 + 2 \right] \\ &= \frac{1}{2}t^2(\log t)^2 + 2t^2. \end{aligned}$$

1.2 Exponentialansatz bei skalaren linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Assoziiert mit einer skalaren, homogenen linearen Gleichung

$$a_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u \equiv 0 \quad \text{auf } I \quad (1.3)$$

ist die t -abhängige Polynomfunktion p über \mathbb{K} zu

$$p(t, \lambda) := a_m(t)\lambda^m + a_{m-1}(t)\lambda^{m-1} + \dots + a_2(t)\lambda^2 + a_1(t)\lambda + a_0(t).$$

Man nennt p das **Symbol** der Gleichung (1.3) oder das **charakteristische Polynom** der Gleichung (1.3). Die Ordnung von p stimmt mit der Ordnung m der Gleichung überein, und man kann (1.3) äquivalent in der formalen Schreibweise

$$\left[a_m \frac{d^m}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \right] u \equiv 0$$

oder kurz

$$p\left(\cdot, \frac{d}{dt}\right) u \equiv 0 \quad \text{auf } I \quad (1.4)$$

ausdrücken. Besonders nützlich ist dies *im Fall konstanter Koeffizienten*, in dem p ein einzelnes, nicht von t abhängiges Polynom ist: Man macht dann — motiviert durch den bereits behandelten Erster-Ordnung-Fall — den **Exponentialansatz**

$$u(t) = e^{\lambda t},$$

und erhält wegen

$$p\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t} = p(\lambda) e^{\lambda t}$$

genau dann eine Lösung von (1.4) und (1.3), wenn $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von p ist. Der weitere Ausbau dieser Idee führt auf ...

Satz 1.2 (Lösung homogener linearer GDGen mit konstanten Koeffizienten über \mathbb{C}).

Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m \in \mathbb{C}$ mit $a_m \neq 0$, und seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Gleichung (1.3) mit zugehörigen Vielfachheiten $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{N}$ (folglich $d_1 + d_2 + \dots + d_k = m$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra). Dann ist die allgemeine \mathbb{C} -wertige Lösung von (1.3) auf einem Intervall I positiver Länge in \mathbb{R} eine \mathbb{C} -Linearkombination der m Funktionsterme

$$\begin{array}{cccccc} e^{\lambda_1 t}, & t e^{\lambda_1 t}, & t^2 e^{\lambda_1 t}, & \dots, & t^{d_1-1} e^{\lambda_1 t} & (d_1 \text{ Funktionen}), \\ e^{\lambda_2 t}, & t e^{\lambda_2 t}, & t^2 e^{\lambda_2 t}, & \dots, & t^{d_2-1} e^{\lambda_2 t} & (d_2 \text{ Funktionen}), \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ e^{\lambda_k t}, & t e^{\lambda_k t}, & t^2 e^{\lambda_k t}, & \dots, & t^{d_k-1} e^{\lambda_k t} & (d_k \text{ Funktionen}). \end{array}$$

Mit andern Worten ist die allgemeine \mathbb{C} -wertige Lösung u gegeben durch

$$u(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{d_i-1} C_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} \quad \text{mit } m \text{ Konstanten } C_{i,j} \in \mathbb{C}. \quad (1.5)$$

Bemerkungen.

- (1) Hat das charakteristische Polynom m verschiedene **Nullstellen** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, so haben diese alle **Vielfachheit** $d_i = 1$, und die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$u(t) = \sum_{i=1}^m C_i e^{\lambda_i t} \quad \text{mit Konstanten } C_1, C_2, \dots, C_m \in \mathbb{C}$$

(in diesem Fall keine Potenzen t^j , sondern ausschließlich Exponentialfunktionen).

- (2) Das **AWP** mit ABen

$$u(t_0) = y_0, \quad u'(t_0) = y_1, \quad u''(t_0) = y_2, \quad \dots \quad u^{(m-1)}(t_0) = y_{m-1}$$

(zu gegebenen Parametern $t_0 \in I$ und $y_0, y_1, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{C}$) **kann stets eindeutig gelöst werden**, indem man die allgemeine Form (1.5) der Lösung einsetzt und ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $C_{i,j}$ löst (m Gleichungen für m Koeffizienten). Eine einfache Begründung für die eindeutige Lösbarkeit dieses Systems ergibt sich aus später in der Vorlesung behandelte Theorie; siehe Bemerkung (4) in Kapitel 3.1.

- (3) Satz 1.2 ist im Hinblick auf die Ordnung der Gleichungen allgemeiner als Satz 1.1 (Ordnung $m \in \mathbb{N}$ statt nur Ordnung 1), im Hinblick auf die Koeffizienten und Inhomogenitäten aber spezieller (nur konstante Koeffizienten und keine Inhomogenitäten statt beliebigen stetigen).
- (4) Man kann auch **Inhomogenitäten** zulassen und im Fall $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m \in \mathbb{R}$ eine **allgemeine R-wertige Lösung** angeben (nicht trivial, da λ_i trotzdem nicht unbedingt reell sein müssen). Diese Themen werden in der Vorlesung aber erst **später im allgemeineren Kontext** linearer Systeme behandelt; siehe Kapitel 3.

Beweis des Satzes. Man argumentiert durch Induktion nach $m \in \mathbb{N}$, wobei der Induktionsanfang für $m = 1$ (nach Durchteilen durch a_m) durch Satz 1.1 abgedeckt ist. Für den Induktionsschluss von Ordnung $(m-1)$ auf Ordnung $m \geq 2$ faktorisiert man das charakteristische Polynom p in der Form $p(\lambda) = \tilde{p}(\lambda)(\lambda - \lambda_k)$ mit einem Polynom \tilde{p} der Ordnung $(m-1)$. Dann gilt für \mathbb{C} -wertiges u und eine ebenfalls \mathbb{C} -wertige Hilfsfunktion w auf I (genauere Erklärungen folgen unten)

$$\begin{aligned} p\left(\frac{d}{dt}\right)u \equiv 0 &\iff \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)u = w \text{ und } \tilde{p}\left(\frac{d}{dt}\right)w \equiv 0 \\ &\iff u' - \lambda_k u = w \text{ und } w(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{d_i-1} \tilde{C}_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} + \sum_{j=0}^{d_k-2} \tilde{C}_{k,j} t^j e^{\lambda_k t} \\ &\iff u(t) = e^{\lambda_k t} \left[\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{d_i-1} \tilde{C}_{i,j} \int t^j e^{(\lambda_i - \lambda_k)t} dt + \sum_{j=0}^{d_k-2} \tilde{C}_{k,j} \int t^j dt \right] \\ &\iff u(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{d_i-1} C_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} + C_{k,0} e^{\lambda_k t} + \sum_{j=0}^{d_k-2} C_{k,j+1} t^{j+1} e^{\lambda_k t}. \end{aligned}$$

Hierbei ergibt sich die erste Äquivalenz direkt aus der Faktorisierung von p sowie (implizit verwendeten) Rechenregeln für Ableitungen. Die zweite Äquivalenz resultiert aus der Anwendung

der Induktionsannahme für die zu \tilde{p} gehörige Gleichung der Ordnung $(m-1)$, wobei zu berücksichtigen ist, dass λ_k für \tilde{p} Nullstelle der um Eins verringerten Vielfachheit (d_k-1) ist. Die dritte Äquivalenz basiert auf Satz 1.1, wobei die unbestimmten Integrale als Notation für (beliebige) Stammfunktionen verwendet wurden. Bei der vierten und letzten Äquivalenz wurden diese Stammfunktionen bestimmt (bis auf den hier irrelevanten genauen Zusammenhang zwischen $\tilde{C}_{i,j}$ und $C_{i,j}$); beim vorderen Term geht dies mit j Produktintegrationen; $C_{k,0}$ bezeichnet die neu hinzugekommene Integrationskonstante. Da die letzte Formel für u bis auf eine Indexverschiebung mit (1.5) übereinstimmt, ist die Induktion vollständig und der Beweis komplett. \square

Beispiele.

(1) Zur Gleichung

$$u'' = u$$

gehört das charakteristische Polynom $\lambda^2-1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$ mit den einfachen Nullstellen 1 und -1 . Die allgemeine Lösung ist daher gegeben durch

$$u(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} = (C_1+C_2) \cosh t + (C_1-C_2) \sinh t.$$

(2) Zur Gleichung

$$u'' = -u$$

gehört das charakteristische Polynom $\lambda^2+1 = (\lambda-\mathring{\mathfrak{i}})(\lambda+\mathring{\mathfrak{i}})$ mit den einfachen Nullstellen $\mathring{\mathfrak{i}}$ und $-\mathring{\mathfrak{i}}$. Die allgemeine Lösung ist daher gegeben durch

$$u(t) = C_1 e^{\mathring{\mathfrak{i}}t} + C_2 e^{-\mathring{\mathfrak{i}}t} = (C_1+C_2) \cos t + (C_1-C_2)\mathring{\mathfrak{i}} \sin t.$$

(3) Zur Gleichung

$$u''' - 3u' - 2u \equiv 0$$

gehört das charakteristische Polynom $\lambda^3-3\lambda-2 = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$ mit doppelter Nullstelle -1 und einfacher Nullstelle 2. Die allgemeine Lösung ist daher gegeben durch

$$u(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 e^{2t}.$$

1.3 Separation der Variablen

Im nächsten Satz wird ein weiterer Typ von explizit lösbaren, skalaren Gleichungen erster Ordnung beschrieben. Diesmal erhält man **nur \mathbb{R} -wertige Lösungen**, im Gegensatz zu den vorherigen Abschnitten werden aber erstmals auch **manche nicht-linearen Gleichungen erfasst**. Die grundlegende Herangehensweise kann als Satz wie folgt formuliert werden:

Satz 1.3 (über GDGen mit separierten Variablen). *Gegeben sei eine GDG*

$$g(u)u' = h \tag{1.6}$$

mit Strukturfunktionen $g \in C^0(J, \mathbb{R})$ und $h \in C^0(I, \mathbb{R})$ auf Intervallen I und J positiver Länge in \mathbb{R} . Außerdem seien Stammfunktionen G zu g auf J und H zu h auf I gegeben.

(I) *Dann sind die \mathbb{R} -wertigen Lösungen von (1.6) auf I genau die differenzierbaren Funktionen $u: I \rightarrow J$ mit $G(u) = H+C$ für ein $C \in \mathbb{R}$.*

- (II) Hat g keine Nullstelle in J , so existiert eine auf $G(J)$ definierte, differenzierbare Umkehrfunktion G^{-1} zu G , und die allgemeine \mathbb{R} -wertige Lösung zu (1.6) auf I ist gegeben durch

$$u(t) = G^{-1}(H(t)+C) \quad \text{für } t \in I \quad (1.7)$$

mit $C \in \mathbb{R}$, so dass $H(I)+C \subset G(J)$.

Beweis. Gemäß Kettenregel ist $[G(u)]' = g(u)u'$, daher ist (1.6) durch Stammfunktionsbildung äquivalent zu $G(u) = H+C$ — wie in (I) behauptet. Hat g keine Nullstelle, so ist G strikt monoton mit Ableitung $G' = g \neq 0$, der Umkehrsatz liefert Existenz und Differenzierbarkeit von G^{-1} , und Anwendung von G^{-1} auf beiden Seiten der Gleichung aus (I) ergibt (1.7). \square

Bezeichnungen. Man kann auch $g \circ u$ statt $g(u)$ und $G \circ u$ statt $G(u)$ schreiben, die Notation $G(J) := \{G(x) : x \in J\}$ steht für das Bild von J unter G , und $H(I)$ ist analog zu verstehen.

Bemerkungen.

- (1) Wenn g zwar Nullstellen, aber keinen Vorzeichenwechsel hat und zumindest auf keinem Teilintervall positiver Länge verschwindet, so ist G noch strikt monoton und G^{-1} existiert als stetige, aber nicht überall differenzierbare Funktion. In diesem Fall bekommt man durch (1.7) eine stetige Funktion u , die auf Intervallen mit $g(u) \neq 0$ löst, aber an den Nullstellen von $g(u)$ unendliche Steigung und somit Nichtdifferenzierbarkeitsstellen aufweisen kann.
- (2) Natürlich lässt sich der **Satz auch anwenden, wenn die Form (1.6) nicht direkt vorliegt, aber durch Umformungen hergestellt werden kann.** Beim Herstellen der geeigneten Form handelt es sich um die eigentliche **Separation der Variablen u** (die auf die linke Seite gebracht wird) **und t** (die auf die rechte Seite gebracht wird). Aufpassen und eventuell **Fallunterscheidungen durchführen** muss man **bei Umformungen, die, genau genommen, keine Äquivalenzumformungen sind** — wie bei Division durch einen Term, der möglicherweise Null werden kann, oder beim Wurzelziehen; siehe die folgende Beispiele.

Beispiele (zur Separation der Variablen). Sei I Intervall positiver Länge, u stets \mathbb{R} -wertig.

- (1) Die GDG mit separierten Variablen

$$u^2 u' = e^{-t}$$

hat nach dem Satz und Bemerkung (1) (mit $J = \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, $G(x) = \frac{1}{3}x^3$, $G(J) = \mathbb{R}$, $G^{-1}(s) = \sqrt[3]{3s}$, $h(t) = e^{-t}$, $H(t) = -e^{-t}$) auf I die allgemeine Lösung¹

$$u(t) = \sqrt[3]{3(C - e^{-t})}.$$

mit $C \in \mathbb{R}$, so dass $C - e^{-t} \neq 0$ für $t \in I$; und falls es doch ein (hier stets eindeutiges) $t \in I$ mit $C - e^{-t} = 0$ gibt, so ist dieses Nichtdifferenzierbarkeitsstelle von u nach Bemerkung (1).

Die eindeutige Lösung, eventuell mit Nichtdifferenzierbarkeitsstelle, zur einer beliebigen AB $u(t_0) = y_0$ ergibt sich durch Einsetzen als

$$u(t) = \sqrt[3]{y_0^3 + 3(e^{-t_0} - e^{-t})}.$$

¹Hier steht $\sqrt[3]{s}$ für die eindeutige reelle Kubikwurzel mit $(\sqrt[3]{s})^3 = s$, die aus jeder reellen Zahl s , insbesondere auch aus negativem s , gezogen werden kann.

(2) Die GDG mit separierten Variablen

$$(1+u^2)u' = e^{2t} + \frac{1}{4}e^{6t}$$

hat nach dem Satz (mit $J = \mathbb{R}$, $g(x) = 1+x^2$, $G(x) = x + \frac{1}{3}x^3$, $G(J) = \mathbb{R}$, $h(t) = e^{2t} + \frac{1}{4}e^{6t}$, $H(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{24}e^{6t}$) die allgemeine Lösung

$$u(t) = G^{-1}\left(\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{24}e^{6t} + C\right)$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Die differenzierbare Umkehrfunktion G^{-1} existiert hier nach dem Umkehrsatz global auf \mathbb{R} , lässt sich jedoch nicht ohne Weiteres² ausrechnen. Zumindest eine Lösung, nämlich die zu $C = 0$, kann man durch $u(t) = G^{-1}\left(G\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)\right) = \frac{1}{2}e^{2t}$ leicht explizit angeben, aber dies geht nur wegen der sehr glücklichen Form der rechten Seite.

Bei dieser Gleichung folgt, dass beliebige AWPes auf Intervallen stets eindeutig lösbar sind.

(3) Bei der Gleichung

$$2uu' = t^2$$

lässt sich Teil (I) des Satzes (mit $J = \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$, $G(x) = x^2$, $h(t) = t^2$, $H(t) = \frac{1}{3}t^3$) ebenfalls anwenden, und Lösungen u sind charakterisiert durch

$$u(t)^2 = \frac{1}{3}t^3 + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Auflösen nach u ergibt die positiven und die negativen Lösungen

$$u(t) = \sqrt{\frac{1}{3}t^3 + C} \quad \text{und} \quad u(t) = -\sqrt{\frac{1}{3}t^3 + C},$$

jeweils auf Teilintervallen I von $(-\sqrt[3]{3C}, \infty)$. Die „Verdopplung“ der Lösungen rührt hier daher, dass g bei Null einen Vorzeichenwechsel hat und G nicht global auf \mathbb{R} invertierbar ist; somit können Teil (II) des Satzes und Bemerkung (1) zwar mit $J = (-\infty, 0]$, $G(J) = [0, \infty)$ und mit $J = [0, \infty)$, $G(J) = [0, \infty)$, aber eben nicht global mit $J = \mathbb{R}$ angewandt werden.

Durch Einsetzen findet man wieder Lösungen zur AB $u(t_0) = y_0$, nämlich

$$u(t) = \sqrt{\frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) + y_0^2} \quad \text{im Fall } y_0 \geq 0,$$

$$u(t) = -\sqrt{\frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) + y_0^2} \quad \text{im Fall } y_0 \leq 0.$$

Insbesondere gibt es für $y_0 = 0$ zwei verschiedene Lösungen zur selben Anfangsbedingung. Für $y_0 = 0 \neq t_0$ liegt aber Nichtdifferenzierbarkeit in t_0 selbst vor, und die Lösungseigenschaft der Definition 0.1 ist nur auf Teilintervallen von (t_0, ∞) , also nicht bis hin zu t_0 selbst gegeben. Für $y_0 = 0 = t_0$ allerdings sind die beiden Lösungen $u(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}t^{3/2}$ bei Null differenzierbar, und dies ist ein echtes **Beispiel für nicht-eindeutige Lösbarkeit eines AWPes** auf $[0, \infty)$. Ein ähnliches Beispiel für Nicht-Eindeutigkeit, bei dem t_0 sogar *im Innern* des Lösungsintervalls liegt, wird in den Übungen behandelt.

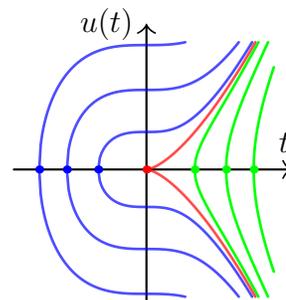


Abb. 1: Die Lösungen des Beispiels (3) mit $C < 0$, $C = 0$, $C > 0$.

²Tatsächlich liefern die Cardanischen Formeln zur Lösung reduzierter kubischer Gleichungen die Wurzel-darstellung $G^{-1}(s) = \sqrt[3]{\frac{3s}{2} + (1 + \frac{9s^2}{4})^{1/2}} + \sqrt[3]{\frac{3s}{2} - (1 + \frac{9s^2}{4})^{1/2}}$ von G^{-1} , aber diese Formel liefert kaum Informationen, die man nicht auch ohne sie erhalten kann. Bei einem leicht modifizierten Beispiel mit linker Seite $(1+u^4)u'$ statt $(1+u^2)u'$ verhält sich alles analog, aber dann besteht wirklich keine Chance mehr, G^{-1} explizit auszurechnen.

(4) Bei der Gleichung

$$u' = 3t^2(1+u^2)$$

führt Division durch $(1+u^2)$ auf die GDG mit separierten Variablen $(1+u^2)^{-1}u' = 3t^2$. Der Satz (mit $J = \mathbb{R}$, $g(x) = (1+x^2)^{-1}$, $G(x) = \arctan x$, $G(J) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $G^{-1}(s) = \tan s$, $h(t) = 3t^2$, $H(t) = t^3$) liefert dann auf I die allgemeine Lösung

$$u(t) = \tan(t^3+C)$$

mit $C \in \mathbb{R}$, so dass $I^3+C \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Die letzte Zusatzbedingung sorgt hierbei dafür, dass die Lösung u auf I keine Singularitäten hat und kann nur erfüllt werden, wenn das Intervall I^3 Länge $\leq \pi$ hat. Daher existieren auf $I = (a, b)$ nur dann Lösungen, wenn $b^3-a^3 \leq \pi$ gilt, und zulässig sind dann Konstanten $C \in [-\frac{\pi}{2}-a^3, \frac{\pi}{2}-b^3]$.

Auch im Fall $\text{Länge}(I^3) \leq \pi$ ist aber nicht jedes AWP mit AB $u(t_0) = y_0$, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ (ohne Singularitäten) auf ganz I lösbar: Zum Beispiel ist im Extremfall $\text{Länge}(I^3) = \pi$ nur eine einzige Konstante C zulässig, und eine (nicht-singuläre) Lösung des AWP's auf I existiert nur, wenn t_0 und y_0 zufällig die Bedingung $\tan(t_0^3+C) = y_0$ mit dem einen zulässigen C erfüllen.

(5) Bei

$$u' = u(u-1)$$

muss man direkt bei der ersten Umformung aufpassen, denn Division durch $u(u-1)$ ist nur erlaubt, wenn u die Werte $\{0, 1\}$ nicht annimmt. Behält man die (eventuell auf Teilintervallen) konstanten Lösungen $u \equiv 0$ und $u \equiv 1$ aber im Kopf, so kann man für die weitere Rechnung erst einmal annehmen, dass u Werte in $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ hat, und die Division durchführen. Man erhält dann die GDG mit separierten Variablen $\frac{1}{u(u-1)}u' \equiv 1$. Die Lösungen u auf I sind dann nach dem Satz (mit $g(x) = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$, $J \in \{(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)\}$, $G(x) = \log|x-1| - \log|x| = \log|1-\frac{1}{x}|$, $h(t) = 1$, $H(t) = t$) bestimmt durch

$$\log\left|1 - \frac{1}{u(t)}\right| = t+C,$$

und Auflösen nach u gibt die Lösungen

$$u(t) = (1 \pm e^C e^t)^{-1},$$

sofern $1 \pm e^C e^t \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Dies lässt sich noch vereinfachend umschreiben, und zusammenfassend besteht die allgemeine Lösung der ursprünglichen GDG auf I aus der Null-Lösung und den Lösungen

$$u(t) = (1 + \tilde{C}e^t)^{-1}$$

mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$, so dass $1 + \tilde{C}e^t \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt (die Lösung $u \equiv 1$ ist für $\tilde{C} = 0$ enthalten). Die Lösung zur AB $u(t_0) = 0$ ist hier stets $u \equiv 0$, und die Lösung zur AB $u(t_0) = y_0 \neq 0$ existiert genau dann und ist gegeben durch

$$u(t) = \left(1 + \frac{1-y_0}{y_0} e^{t-t_0}\right)^{-1},$$

wenn der Ausdruck in der Klammer für $t \in I$ nie Null wird.

Insgesamt zeigen die vorausgehenden Beispiele einige Effekte (Entwicklung von Singularitäten führt zu Lösbarkeit nur auf Teilintervallen, Nicht-Eindeutigkeit, unendliche Steigung), mit denen man bei nicht-linearen Gleichungen rechnen muss — teils aber nur dann, wenn sie nicht auf eine „gute“ explizite Form gebracht werden können; mehr dazu in Kapitel 2.

1.4 Exakte Differentialgleichungen

Wie im vorigen Abschnitt geht es auch hier um eine Klasse von skalaren, möglicherweise nicht-linearen Gleichungen erster Ordnung und um die Bestimmung der \mathbb{R} -wertigen Lösungen. Die Herangehensweise ist allerdings deutlich anders und erlaubt die Behandlung einer größeren Klasse von Gleichungen. Die grundlegende Beobachtung sei auch hier als Satz festgehalten:

Satz 1.4 (über **exakte Differentialgleichungen**). *Gegeben sei eine GDG*

$$f(t, u) + g(t, u)u' \equiv 0 \quad (1.8)$$

mit Strukturfunktionen $f, g \in C^0(D, \mathbb{R})$ auf einem Gebiet³ $D \subset \mathbb{R}^2$. Sind

$$f = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{und} \quad g = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{auf } D \quad (1.9)$$

die partiellen Ableitungen einer Funktion $\Phi \in C^1(D, \mathbb{R})$ der Variablen (t, x) , so sind die \mathbb{R} -wertigen Lösungen von (1.8) auf jedem Intervall I positiver Länge genau die differenzierbaren $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(t, u(t)) \in D$ und

$$\Phi(t, u(t)) = C \quad \text{für alle } t \in I, \quad (1.10)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Beweis. Gemäß Kettenregel und (1.9) gilt für differenzierbares u auf I und $t \in I$ mit $(t, u(t)) \in D$ stets

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, u(t)) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, u(t)) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, u(t))u'(t) = f(t, u(t)) + g(t, u(t))u'(t).$$

Somit sind Lösungen u von (1.8) auf I charakterisiert durch $(t, u(t)) \in D$ und $\frac{d}{dt}\Phi(t, u(t)) = 0$ für alle $t \in I$. Mit dem Konstanzsatz gelangt man dann zur Charakterisierung vermöge (1.10). \square

Bemerkungen.

- (1) Bei (1.10) handelt es sich um eine *implizite* Gleichung für die Lösung u . Um daraus eine *explizite* Formel zu gewinnen, versucht man bei konkreten Rechnungen meist nach u aufzulösen (was manchmal, doch nicht immer möglich ist; dazu macht der Satz keine Aussage).
- (2) Die **entscheidende Voraussetzung** des Satzes **ist die Existenz der Funktion Φ** mit (1.9). Die Gleichungen in (1.9) bedeuten dabei, dass das Vektorfeld (f, g) auf D das Gradientenfeld von Φ ist, also $(f, g) = \nabla \Phi$ auf D . Sind nur f und g gegeben, so muss man zur Anwendung des Satzes also zunächst eine **Stammfunktion** (oder ein **Potential**) Φ **zum Vektorfeld (f, g) finden**.

³Ein Gebiet ist eine nicht-leere, offene und zusammenhängende Menge.

- (3) Die **Terminologie** ‚exakte‘ DGL kommt aus der **Theorie der Differentialformen**. Man kann das Vektorfeld (f, g) nämlich mit der 1-Form $f(t, x)dt + g(t, x)dx$ auf D identifizieren und das Problem der Stammfunktionsfindung äquivalent für diese 1-Form formulieren. In Anlehnung daran, dass eine 1-Form exakt genannt wird, wenn sie eine Stammfunktion besitzt, **nennt man die GDG (1.8) exakt, wenn (f, g) eine Stammfunktion besitzt**.
- (4) **Stammfunktionen zu Vektorfeldern** (oder 1-Formen) **existieren nicht immer, sondern nur manchmal**. Notwendiges Kriterium für die Existenz einer Stammfunktion zu (f, g) (und damit für die Exaktheit der GDG (1.8)) ist die **Integrabilitätsbedingung**

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{auf } D,$$

und im Wesentlichen ist dieses Kriterium sogar notwendig und hinreichend: Genau genommen ist die Integrabilitätsbedingung zwar nur bei einem Gebiet D „ohne Löcher“⁴ hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion auf D , aber auf geeigneten Teilgebieten von D lässt sich dies stets anwenden und reicht damit für die Rechenpraxis völlig aus. Die **Berechnung einer Stammfunktion Φ** ist Thema einer Vorlesung über mehrdimensionale Integration und erfolgt im Wesentlichen **durch Integration von f nach t und/oder von g nach der u -Variablen x** sowie durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten (letztere Wahl wird in aller Regel beim Ableiten zur Probe offensichtlich).

- (5) Ist bei einer GDG der Form (1.8) die **Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt** und die Gleichung somit nicht exakt, so kann man versuchen, durch Multiplikation mit einem sogenannten **integrierenden Faktor** $h \in C^0(D, (0, \infty))$ auf eine äquivalente exakte DGL

$$h(t, u)f(t, u) + h(t, u)g(t, u)u' \equiv 0$$

zu transformieren. Manchmal lässt sich h raten, andernfalls kann man versuchen, in der Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial(hf)}{\partial x} - \frac{\partial(hg)}{\partial t} \equiv 0$ einen Ansatz wie $h(t, x) = \varphi(t)$, $h(t, x) = \varphi(x)$, $h(t, x) = \varphi(t+x)$ oder $h(t, x) = \varphi(tx)$ zu machen; tritt dabei nur dieselbe Variable t , x , $t+x$ oder tx auf, von der auch φ selbst abhängt, so kann man φ als Lösung einer linearen Erster-Ordnung-GDG erhalten. Sind φ und ein integrierender Faktor h bestimmt, so lässt sich die neue exakte DGL (hoffentlich) gemäß dem Satz und den vorigen Bemerkungen lösen.

- (6) Die **lineare Erster-Ordnung-GDG** $a(t)u - b(t) + u' \equiv 0$ wird durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor⁵ $e^{A(t)}$ exakt und hat dann die Potentialfunktion $\Phi(t, x) = e^{A(t)}x - B(t)$ (wobei $A' = a$, $B' = e^{A}b$). Die **GDG mit separierten Variablen** $g(u)u' = h(t)$ ist nach Umformung zu $-h(t) + g(u)u' \equiv 0$ offensichtlich exakt mit Potential $\Phi(t, x) = -H(t) + G(x)$ (wobei $G' = g$, $H' = h$). Somit stellen sich die Lösungsformeln der Sätze 1.1 und 1.3 als **Spezialfälle der Behandlung exakter DGLen** heraus.

⁴Die präzise Voraussetzung an D ist hier die, dass D einfach zusammenhängend im Sinne der Homotopietheorie ist. Im relevanten 2-dimensionalen Fall bedeutet dies, dass man keinen Punkt von $\mathbb{R}^2 \setminus D$ durch einen Weg in D vollständig umlaufen kann. Spezielle Klassen von einfach zusammenhängenden Gebieten sind konvexe Gebiete und allgemeiner sternförmige Gebiete D (letzteres bedeutet, dass ein $\omega_0 \in D$ existiert, so dass für alle $\omega \in D$ auch die Strecke von ω zum Sternpunkt ω_0 in D enthalten ist).

⁵Um diesen integrierenden Faktor gemäß Bemerkung (5) mit dem Ansatz $h(t, u) = \varphi(t)$ schematisch bestimmen zu können, muss man allerdings schon wissen, wie man *homogene* lineare Erster-Ordnung-GDGen löst. Deshalb ergibt sich hier eigentlich nur Teil (II) des Satzes 1.1 als Spezialfall, wenn man dessen Teil (I) schon kennt und benutzt.

Beispiele (zu exakten DGLen).

(1) Die DGL

$$1 + \frac{u}{t^2} - \frac{1}{t}u' \equiv 0$$

hat die Form aus Satz 1.4 mit $D = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ oder $D = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, mit $f(t, x) = 1 + \frac{x}{t^2}$ und $g(t, x) = -\frac{1}{t}$. Tatsächlich kann man eine Stammfunktion Φ zu (f, g) hier noch raten, nämlich

$$\Phi(t, x) = t - \frac{x}{t}.$$

Man kann die Berechnung von Φ auch schematisch angehen, indem man erst die Exaktheit der DGL durch die Rechnung $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} = 0$ nachprüft und dann zur Bestimmung von Φ integriert:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x) &= \int f(t, x) dt = \int \left(1 + \frac{x}{t^2}\right) dt = t - \frac{x}{t} + \text{const}(x), \\ \Phi(t, x) &= \int g(t, x) dx = \int \left(-\frac{1}{t}\right) dx = -\frac{x}{t} + \text{const}(t).\end{aligned}$$

Nun wird klar, wie die Konstanten zu wählen sind, und man kommt auf obiges Φ als eine Stammfunktion (wofür es auch gereicht hätte, nur die obere Integration durchführen und dann zur Probe abzuleiten). Insgesamt sind die Lösungen der GDG nach Satz 1.4 bestimmt durch

$$t - \frac{u(t)}{t} = C,$$

und durch Auflösen kommt man auf Teilintervallen von $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ auf die allgemeine Lösung

$$u(t) = t^2 - Ct \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

(2) Die DGL

$$2t + t^2 + u + (1 + t^2 + u)u' \equiv 0$$

hat die Form aus Satz 1.4 mit $D = \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = 2t + t^2 + x$, $g(t, x) = 1 + t^2 + x$. Wegen $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = 1 - 2t \neq 0$ ist diese DGL aber nicht exakt, und (f, g) besitzt keine Stammfunktion. Zur Bestimmung eines integrierenden Faktors h macht man (eventuell erst nach anderen, vergeblichen Versuchen) den Ansatz

$$h(t, x) = \varphi(t+x).$$

Als Integrabilitätsbedingung für die neue DGL aus Bemerkung (5) erhält man mit Produkt- und Kettenregel

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial(hf)}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial(hg)}{\partial t}(t, x) \\ &= \varphi'(t+x)f(t, x) + \varphi(t+x)\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) - \varphi'(t+x)g(t, x) - \varphi(t+x)\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \\ &= (2t-1)\varphi'(t+x) + (1-2t)\varphi(t+x).\end{aligned}$$

Wegen sehr günstiger Kürzungseffekte reduziert sich die Integrabilitätsbedingung daher auf die Erster-Ordnung-GDG $\varphi' = \varphi$ mit (spezieller) Lösung $\varphi(s) = e^s$. Man erhält somit den integrierenden Faktor $h(t, x) = e^{t+x}$ und die äquivalente exakte DGL

$$(2t + t^2 + u)e^{t+u} + (1 + t^2 + u)e^{t+u}u' \equiv 0.$$

Die zugehörigen (neuen) Strukturfunktionen sind $f_*(t, x) = (2t+t^2+x)e^{t+x}$ und $g_*(t, x) = (1+t^2+x)e^{t+x}$, und das zugehörige Potential

$$\Phi_*(t, x) = (t^2+x)e^{t+x}$$

lässt sich jetzt raten (oder wie in Beispiel (1) berechnen). Somit sind die Lösungen der neuen und auch der ursprünglichen DGL auf Intervallen I gemäß dem Satz bestimmt durch

$$(t^2+u(t))e^{t+u(t)} = C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R},$$

ein explizites Auflösen nach $u(t)$ ist aber diesmal nicht möglich.

1.5 Potenzreihenansatz

Ein allgemeiner Ansatz zur Lösung einer GDG beruht auf der (zu allermeist vernünftigen) Annahme, dass mindestens eine Lösung u auf einem Intervall I positiver Länge eine Darstellung

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(t-t_0)^i \quad \text{für } t \in I \quad (1.11)$$

als **Potenzreihe mit unbekanntem Koeffizienten** $c_i \in \mathbb{K}$ zum bekannten Entwicklungspunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ besitzt (bei einem gegebenen AWP ist t_0 oft der Punkt, an dem auch die ABen gestellt werden). Zur Berechnung von Lösungen geht man dann wie folgt vor:

Verfahren (Lösung von GDGen mittels Potenzreihenansatz).

- (I) Man beginnt mit dem **Einsetzen des Ansatzes (1.11)** in die gegebene GDG,
- (II) berechnet die Ableitungen durch **gliedweise Differentiation** und führt eventuell weitere Operationen (wie Produktbildungen) mit Potenzreihen durch.
- (III) Dann macht man einen **Koeffizientenvergleich bei Potenzreihen** und kommt unter günstigen Umständen auf **Rekursionsformeln für die Koeffizienten c_i** .
- (IV) **Manchmal** kann man die **Rekursion auflösen** und die Koeffizienten explizit bestimmen, und in seltenen Fällen stellt sich die Potenzreihe aus (1.11) sogar als bekannte Darstellung einer elementaren Funktion auf I heraus.
- (V) Handelt es sich nicht gerade um eine bekannte Potenzreihe, so muss man schließlich die **Konvergenz der Reihe sicherstellen** (auf I oder zumindest auf einem Teilintervall positiver Länge), indem man den Konvergenzradius der Potenzreihe bestimmt oder abschätzt; dies kann beispielsweise mit der Euler-Formel für den Konvergenzradius oder durch Analyse des Wachstums von $|c_i|$ bei $i \rightarrow \infty$ geschehen.
- (VI) Ist die Konvergenz gezeigt, so hat man eine **Lösung der GDG gefunden** — je nach Verlauf des Verfahrens in mehr oder weniger expliziter Form.

Bemerkung. Die Diskussion der Konvergenz der Reihe ist essentiell und wird zur Rechtfertigung des gesamten Vorgehens benötigt: **Es besteht nämlich die Möglichkeit, dass das Verfahren scheitert, weil die berechnete Potenzreihe den Konvergenzradius 0 aufweist** und somit nur im Entwicklungspunkt t_0 konvergiert; siehe Beispiel (4) unten. Dann hat man Pech gehabt und keine Lösung gefunden. **Dagegen ist bei positivem Konvergenzradius r_0 das Vorgehen**, jedenfalls auf Teilintervallen des offenen Konvergenzbereichs (t_0-r_0, t_0+r_0) , **berechtigt**. Insbesondere sind in letzterem Fall die gliedweise Differentiation und auch andere Operationen mit Potenzreihen, wie beispielsweise die Bildung des Cauchy-Produkts, erlaubt, und man erhält Lösungen in der zu Beginn angenommenen Form (1.11).

Beispiele (zum Lösen durch **Potenzreihenansatz** um den Entwicklungspunkt 0).

(1) Die bekannte GDG

$$u'' = -u$$

wurde bereits in Kapitel 1.2 gelöst, wird jetzt aber trotzdem zur Illustration der beschriebenen Vorgehensweise herangezogen: Einsetzen des Ansatzes (1.11) mit $t_0 = 0$ und gliedweise Berechnung der zweiten Ableitung führt bei dieser Gleichung auf

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i t^{i-2} = \sum_{i=0}^{\infty} (-c_i) t^i,$$

wobei links die Summanden für $i = 0, 1$ beim Ableiten Null geworden sind. Durch Indexverschiebung erreicht man die für den Koeffizientenvergleich günstige Form

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)c_{i+2} t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-c_i) t^i,$$

und Durchführung des Vergleichs gibt die Rekursionsbedingung zweiter Ordnung

$$c_{i+2} = \frac{-c_i}{(i+2)(i+1)} \quad \text{für } i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Die Rekursion lässt sich in Abhängigkeit von c_0 und c_1 auflösen zu

$$c_{2j} = \frac{(-1)^j}{(2j)!} c_0 \quad \text{und} \quad c_{2j+1} = \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} c_1 \quad \text{für } j \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

und für die Lösung u ergibt sich mit trigonometrischen Reihen, die bekanntlich für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergieren,

$$u(t) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} t^{2j} + c_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1} = c_0 \cos t + c_1 \sin t.$$

Die Koeffizienten $c_0, c_1 \in \mathbb{K}$ übernehmen hier also die Rolle der Integrationskonstanten, und man erhält erneut die schon früher berechnete allgemeine Lösung — beim hiesigen Verfahren allerdings erst einmal ohne die Information, dass keine weiteren Lösungen existieren und es sich wirklich um die *allgemeine* Lösung handelt.

(2) Bei der Gleichung

$$(2-t^2)u'' - 2tu' + \zeta u \equiv 0$$

mit Parameter $\zeta \in \mathbb{C}$ erhält man durch Einsetzen von (1.11) mit $t_0 = 0$ und Ableiten zuerst

$$(2-t^2) \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i t^{i-2} - 2t \sum_{i=1}^{\infty} i c_i t^{i-1} + \zeta \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = 0.$$

Dies lässt sich umschreiben in

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2(i+2)(i+1)c_{i+2} t^i - \sum_{i=0}^{\infty} [i(i-1) + 2i - \zeta] c_i t^i = 0,$$

und Koeffizientenvergleich ergibt die Zweiter-Ordnung-Rekursionsbedingung

$$c_{i+2} = \frac{(i+1)i - \zeta}{2(i+2)(i+1)} c_i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Im Allgemeinen⁶ erhält man aus dieser Rekursion keine bekannte Reihe. Schreibt man (1.11) aber als Summe $\sum_{j=0}^{\infty} c_{2j}(t^2)^j + t \sum_{j=0}^{\infty} c_{2j+1}(t^2)^j$ zweier Reihen in t^2 , so lassen sich mit der Euler-Formel und der Rekursionsvorschrift die Konvergenzradien $\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{2j}}{c_{2(j+1)}} \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{2(2j+2)(2j+1)}{(2j+1)2j-\zeta} \right| = 2$ und $\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{2j+1}}{c_{2(j+1)+1}} \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{2(2j+3)(2j+2)}{(2j+2)(2j+1)-\zeta} \right| = 2$ der Teilreihen bestimmen (falls $\zeta \neq (i+1)i$ für alle geraden beziehungsweise ungeraden $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; sonst abbrechende Reihen mit Konvergenzradius ∞). Deshalb konvergieren die Teilreihen und folglich auch die ganze Reihe aus (1.11) jedenfalls für $t^2 < 2$, mit anderen Worten also für $|t| < \sqrt{2}$. Insgesamt ist damit für beliebiges $\zeta \in \mathbb{C}$ die Existenz von Lösungen auf $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ mit den ABen $u(0) = c_0$, $u'(0) = c_1$ gezeigt, und die Lösbarkeit des entsprechenden AWP's ist für beliebige Anfangsdaten $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ bewiesen.

Bemerkungen (zum Lösen durch **Potenzreihenansatz**).

- (1) Ein **Nachteil** des Potenzreihenansatzes liegt in der Möglichkeit, dass man **eventuell nicht die allgemeine Lösung findet**. In vielen Fällen bekommt man zwar doch *alle* Lösungen, aber um sich dessen sicher sein zu können, muss man Zusatzwissen über die (Theorie der) betreffende(n) GDG zur Verfügung haben.
- (2) Ein Potenzreihenansatz **kann bei ganz verschiedenen Typen von GDGen funktionieren und mehr oder weniger Information über Lösungen bringen**. Ohne die Rechnung wirklich durchzuführen, lässt sich dies oft nur schwer voraussagen.

Die (tendenziell) **größten Erfolgsaussichten** hat ein Potenzreihenansatz um $t_0 \in \mathbb{R}$ bei **linearen GDGen** $a_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u = b$ auf I mit **rationalen Koeffizientenfunktionen** der Form

$$a_k(t) = \frac{p_k(t)}{(t-t_0)^{\ell_k}},$$

wobei p_k Polynome über \mathbb{K} und $\ell_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind. Man kann $a_k(t)$ dann nämlich als \mathbb{K} -Linearkombinationen von Potenzen $(t-t_0)^j$ mit $j \in \mathbb{Z}$ schreiben und wie im vorausgehenden Beispiel (2) „schön“ mit den Reihengliedern multiplizieren.

⁶Im Spezialfall $\zeta = 0$ allerdings kann man die Rekursion zu $c_{2j+2} = 0$ und $c_{2j+1} = \frac{c_1}{2^j(2j+1)}$ für $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ auflösen, und man bekommt durch Zurückführung auf die Logarithmus-Reihe eine explizite Lösungsformel:

$$\begin{aligned} u(t) &= c_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_1}{2^j(2j+1)} t^{2j+1} = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_1}{\sqrt{2}^{i-1} i} t^i - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_1}{\sqrt{2}^{2j-1} 2j} t^{2j} \\ &= c_0 - c_1 \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \left(\frac{-t}{\sqrt{2}} \right)^i + \frac{c_1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\frac{-t^2}{2} \right)^j \\ &= c_0 - c_1 \sqrt{2} \log \left(1 - \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + \frac{c_1}{\sqrt{2}} \log \left(1 - \frac{t^2}{2} \right) = c_0 + \frac{c_1}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \end{aligned}$$

für $|t| < \sqrt{2}$. Die so erhaltene Formel für den Spezialfall kann man jedoch auch anders und einfacher ableiten, beispielsweise durch Separation der Variablen in der Erster-Ordnung-Gleichung $(2-t^2)(u')' - 2tu' \equiv 0$ für u' .

Bei anderen Koeffizientenfunktionen zerstört die gliedweise Multiplikation im Allgemeinen die Struktur als Potenzreihe. Um diese Struktur zu erhalten, muss man vielmehr auch die Koeffizientenfunktionen selbst in Potenzreihen entwickeln und mittels des Cauchy-Produkts multiplizieren. Dies **kann bei konkreten Rechnungen sehr kompliziert werden**, und ist oft nicht zielführend. **Ähnliches gilt für nicht-lineare Gleichungen**, bei denen die Cauchy-Multiplikation von Reihen für u und seine Ableitungen erforderlich wird.

- (3) Die durch Koeffizientenvergleich erhaltene **Rekursionsbedingung ist in guten Fällen von derselben Ordnung m wie die betrachtete GDG**, d.h. für jedes $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ liefert sie c_{i+m} als Funktion von $c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, \dots, c_{i+m-1}$. Ist dies der Fall, so ist man in der typischen Situation, dass die allgemeine Lösung von den m Parametern $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{m-1}$ abhängt und AWPe mit m ABen sinnvoll sind.

Es gibt aber keine Garantie für dieses Verhalten, und insbesondere kann es vorkommen, dass nach Koeffizientenvergleich weniger als m Parameter frei bleiben. Dies ist oft ein Anzeichen dafür ist, dass nicht alle Lösungen als Potenzreihe darstellbar sind. Ein Beispiel hierfür folgt, ein weiteres wird (ansatzweise) in den Übungen behandelt.

- (4) Eine Variante des Potenzreihenansatzes ist der Ansatz $u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(t-t_0)^{i-\ell}$, $c_0 \neq 0$ mit einer Polstelle der Ordnung $\ell \in \mathbb{N}$ bei t_0 . Dieser Ansatz ist gelegentlich sinnvoll, typischerweise aber nur, wenn t_0 nicht-enthaltener Randpunkt von I ist.

Weitere Beispiele (zum Scheitern eines Potenzreihenansatzes).

- (3) Bei der Gleichung

$$t^3 u' = 2u$$

führt der Potenzreihenansatz (1.11) mit $t_0 = 0$ durch Einsetzen und Indexverschiebung auf

$$\sum_{i=3}^{\infty} (i-2)c_{i-2}t^i = \sum_{i=0}^{\infty} 2c_i t^i,$$

und Koeffizientenvergleich ergibt $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ und $2c_i = (i-2)c_{i-2}$ für $i \geq 3$. Folglich liefert der Potenzreihenansatz um 0 nur die Null-Lösung, aber Separation der Variablen zeigt, dass die allgemeine Lösung tatsächlich durch $u(t) = C_1 e^{-1/t^2}$ für $t < 0$, $u(0) = 0$ und $u(t) = C_2 e^{-1/t^2}$ für $t > 0$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{K}$ gegeben ist. Das Scheitern des Ansatzes erklärt sich daraus, dass die **C^∞ -Lösung** u mit $u^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ für $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$ bei 0 **nicht analytisch** ist, d.h. nicht in eine Potenzreihe um 0 entwickelt werden kann.

- (4) Bei der Gleichung

$$t^2 u' = t + u$$

führt (1.11) mit $t_0 = 0$ ähnlich wie beim vorigen Beispiel auf $c_0 = 0$, $c_1 = -1$ und $c_i = (i-1)c_{i-1}$ für $i \geq 2$. Man bekommt daher $c_i = -(i-1)!$ für $i \in \mathbb{N}$ und erhält die Potenzreihe

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{\infty} (i-1)! t^i.$$

Ungünstigerweise hat diese Reihe den **Konvergenzradius 0** und konvergiert für kein $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, daher hat man in diesem Fall tatsächlich keine Lösung gewonnen. Mit Satz 1.1 lässt sich der Grund hierfür einsehen (auch wenn die Stammfunktion B nicht elementar ist): Lösungen existieren auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$, werden aber bei 0 stets singulär und können daher nie in eine Potenzreihe um 0 entwickelt werden.

1.6 Reduktionsverfahren von d'Alembert

Bei der sogenannten d'Alembert-Reduktion handelt es sich um einen Lösungsansatz für skalare lineare Zweiter-Ordnung-GDGen, mit dem auch nicht-konstante Koeffizienten und Inhomogenitäten behandelt werden können. Die Verfahrensweise beruht auf folgendem Satz:

Satz 1.5 (über das **Reduktionsverfahren von d'Alembert**). *Gegeben sei die (eventuell) inhomogene lineare GDG*

$$u'' + a_1 u' + a_0 u = b \quad \text{auf } I \quad (1.12)$$

mit einem Intervall I positiver Länge in \mathbb{R} und $a_0, a_1, b: I \rightarrow \mathbb{K}$. Ist $u_0: I \rightarrow \mathbb{K}$ eine spezielle Lösung der zugehörigen homogenen GDG (d.h. ist $u_0'' + a_1 u_0' + a_0 u_0 \equiv 0$ auf I) und hat u_0 keine Nullstelle in I , so ist $u = v u_0$ mit $v: I \rightarrow \mathbb{K}$ genau dann Lösung von (1.12), wenn v' die Gleichung

$$(v')' + \left(\frac{2u_0'}{u_0} + a_1 \right) v' = \frac{b}{u_0} \quad \text{auf } I \quad (1.13)$$

löst.

Beweis. Durch Einsetzen der Gleichheit $u = v u_0$ und Anwendung der Produktregel lässt sich (1.12) in

$$v'' u_0 + 2v' u_0' + \underline{v u_0''} + a_1 v' u_0 + \underline{a_1 v u_0'} + \underline{a_0 v u_0} = b$$

umschreiben. Wegen der Lösungseigenschaft von u_0 heben sich die unterstrichenen Terme heraus, und Division durch $u_0 \neq 0$ führt auf

$$v'' + \frac{2u_0'}{u_0} v' + a_1 v' = \frac{b}{u_0},$$

was bis auf Ausklammern der GDG (1.13) entspricht. \square

Bemerkungen.

- (1) Der Satz **reduziert** die **Zweiter-Ordnung-Gleichung** (1.12) für u auf die **Erster-Ordnung-Gleichung** (1.13) für v' . Dies ist hilfreich, denn (1.13) kann für $a_1, b \in C^0(I, \mathbb{K})$ mit der **Lösungsformel** aus Satz 1.1 behandelt werden und hat die allgemeine Lösung

$$v'(t) = \frac{1}{e^{A_1(t)} u_0(t)^2} \left[\int e^{A_1(t)} u_0(t) b(t) dt + C \right] \quad (1.14)$$

mit einer Stammfunktion A_1 zu a_1 auf I und einer Konstanten $C \in \mathbb{K}$ (wobei das unbestimmte Integral für die Bildung einer beliebigen Stammfunktion steht). Hat man v' damit berechnet, so erhält man durch Integration auch v (wobei eine zweite Integrationskonstante ins Spiel kommt) und damit die allgemeine Lösung $u = v u_0$ zu (1.12).

- (2) Die **entscheidende Voraussetzung** für die Anwendung des Reduktionsverfahrens ist die **Kenntnis einer speziellen Lösung $u_0 \neq 0$** zu $u'' + a_1 u' + a_0 u \equiv 0$. Bei konstanten Koeffizienten $a_1, a_0 \in \mathbb{K} = \mathbb{C}$ kann eine solche spezielle (und sogar die allgemeine) Lösung der homogenen Gleichung schematisch gemäß Abschnitt 1.2 berechnet werden, und daher ist die d'Alembert-Reduktion in diesem Fall stets anwendbar. Bei nicht-konstanten Koeffizienten a_0, a_1 braucht man „Glück“ oder Erfahrung, um eine spezielle Lösung zu raten oder durch Ausprobieren zu finden, und das Verfahren lässt sich nur anwenden, wenn dies gelingt.

- (3) Im Prinzip funktioniert ein analoges Reduktionsverfahren auch bei linearen **Gleichungen höherer Ordnung** $m \geq 3$. Ist eine (nullstellenfreie) Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung bekannt, so kann man in diesem Fall auf eine Gleichung der Ordnung $(m-1)$ reduzieren, und das Verfahren dann eventuell iterieren. Da dieses Vorgehen in der Rechenpraxis aber selten relevant ist, wird hier nicht näher darauf eingegangen.

Beispiele (zum Reduktionsverfahren von d'Alembert).

- (1) Bei der inhomogenen Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$u'' - u = 3te^{2t} \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

stellt man zunächst fest, dass e^t , e^{-t} (und Linearkombinationen davon) Lösungen der zugehörigen homogenen GDG $u'' - u \equiv 0$ sind — entweder gemäß Abschnitt 1.2 oder einfach durch Hinsehen. Für die weitere Rechnung wird hier die spezielle Lösung $u_0(t) = e^t$ verwendet (man könnte aber auch e^{-t} , $\cosh t$ oder $\sinh t$ nehmen; wobei der \sinh eine Nullstelle hat und deshalb nicht die beste Wahl ist). Durch Anwendung der Formel (1.14) (mit $a_1 \equiv 0$, $A_1 \equiv 0$, $b(t) = 3te^{2t}$) kommt man auf

$$v'(t) = \frac{1}{e^{2t}} \left[\int 3te^{3t} dt + C \right] = e^{-2t} \left[te^{3t} - \frac{1}{3}e^{3t} + C \right] = \left(t - \frac{1}{3}\right)e^t + Ce^{-2t},$$

wobei das unbestimmte Integral gemäß $3te^{3t} = \frac{d}{dt}(t - \frac{1}{3})e^{3t}$ berechnet wurde (die Verwendung einer anderen Stammfunktion zu $3te^{3t}$ würde natürlich nur die Konstante C verändern). Durch eine weitere Integration mittels $te^t = \frac{d}{dt}(t-1)e^t$ erhält man

$$v(t) = \left(t - \frac{4}{3}\right)e^t + C_1e^{-2t} + C_2$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{K}$ (wobei $C = -2C_1$ gilt, aber dies ist unerheblich). Daraus ergibt sich mit $u = vu_0$ die allgemeine Lösung

$$u(t) = \left(t - \frac{4}{3}\right)e^{2t} + C_1e^{-t} + C_2e^t.$$

Die Erster-Ordnung-Gleichung für v' , die in der Rechnung jetzt gar nicht explizit, sondern nur implizit durch die Lösungsformel (1.14) vorkam, lautet in diesem Beispiel übrigens

$$v'' + 2v' = 3te^t.$$

- (2) Die homogene Gleichung

$$u'' + 2(\tan t)u' - u \equiv 0 \quad \text{auf } I$$

mit nicht-konstantem Koeffizienten $a_1(t) = 2 \tan t$ ist sinnvoll, wenn der Tangens auf dem Intervall I positiver Länge nicht singular wird, wenn also $I \cap (2\mathbb{Z}-1)\frac{\pi}{2} = \emptyset$ gilt; dies sei für das Folgende daher unterstellt. Als spezielle Lösung lässt sich $u_0(t) = \sin t$ raten, und durch Anwendung von (1.14) (mit $e^{A_1(t)} = (\cos t)^{-2}$, $b \equiv 0$) erhält man

$$v'(t) = C \frac{(\cos t)^2}{(\sin t)^2} = C(\cot t)^2.$$

Integration mittels $\frac{d}{dt} \cot t = -1 - (\cot t)^2$ gibt

$$v(t) = C_1(t + \cot t) + C_2$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{K}$, und durch Multiplikation mit u_0 kommt man schließlich auf die allgemeine Lösung

$$u(t) = C_1(t \sin t + \cos t) + C_2 \sin t.$$

Eigentlich sind die obige Anwendung des Satzes und die Rechnung dieses Beispiels dabei nur erlaubt, wenn I zusätzlich zur eingangs gestellten Bedingung auch $I \cap \mathbb{Z}\pi = \emptyset$ erfüllt, denn die spezielle Lösung u_0 hat Nullstellen in den Punkten von $\mathbb{Z}\pi$. Mit einem Stetigkeitsargument beziehungsweise dem Prinzip des Aneinandersetzens von Lösungen kann man diese Zusatzbedingung an I aber im Nachhinein wieder eliminieren.

Die Erster-Ordnung-Gleichung für v' kann in diesem Beispiel übrigens als

$$v'' + 2(\cot t + \tan t)v' \equiv 0 \quad \text{auf } I$$

geschrieben werden.

1.7 Variablentransformation bei Differentialgleichungen

Prinzipiell können GDGen m -ter Ordnung und ihre Lösungen $u: I \rightarrow \mathcal{X}$ (mit einem Intervall I positiver Länge in \mathbb{R} und einem normierten Raum \mathcal{X} über \mathbb{K}) auf zwei verschiedene Arten transformiert werden:

- Eine **Transformation der unabhängigen Variablen t** in eine neue unabhängige Variable \tilde{t} ist gegeben durch einen C^m -Diffeomorphismus T von \tilde{I} auf I . Man transformiert dann

$$\tilde{u}(\tilde{t}) = u(T(\tilde{t})) \quad \text{mit Rücktransformation} \quad u(t) = \tilde{u}(T^{-1}(t)).$$

- Eine **Transformation der abhängigen Variablen u** in eine neue abhängige Variable \tilde{u} ist gegeben durch einen C^m -Diffeomorphismus Y von (einer Teilmenge von) \mathcal{X} auf (eine Teilmenge von) $\tilde{\mathcal{X}}$. Man transformiert dann

$$\tilde{u}(t) = Y(u(t)) \quad \text{mit Rücktransformation} \quad u(t) = Y^{-1}(\tilde{u}(t)).$$

Auch eine **allgemeinere Transformation der abhängigen Variablen u** mittels einer 1-Parameter-Schar $(Y_t)_{t \in I}$ von C^m -Diffeomorphismen Y_t von (Teilmengen von) \mathcal{X} auf (Teilmengen von) $\tilde{\mathcal{X}}$, mit C^m -Abhängigkeit auch vom Parameter t , ist in der Praxis oft nützlich. In diesem Fall ist die Transformation gegeben durch

$$\tilde{u}(t) = Y_t(u(t)) \quad \text{mit Rücktransformation} \quad u(t) = Y_t^{-1}(\tilde{u}(t)).$$

In beiden Fällen kann man mit der Kettenregel eine neue GDG für die transformierten Funktionen \tilde{u} berechnen, und hat man eine ‚gute‘ Transformation T , Y oder Y_t gewählt, so kann man die Lösungen \tilde{u} der neuen GDG (hoffentlich) bestimmen. Gelingt dies, so kann man von \tilde{u} zu u rücktransformieren und erhält auch die Lösungen u der ursprünglichen GDG. Tatsächlich ist die Krux dieses Vorgehens aber das Finden geeigneter Transformationen, und nicht immer sind gute Wahlen leicht ersichtlich.

Im Folgenden werden zu diesem Themenkreis nur zwei Beispiele diskutiert (und in den Übungen wenige weitere); für eine ausführlichere Behandlung sei auf Fachliteratur verwiesen.

Beispiel (für eine **Transformation der unabhängigen Variablen**). Die **Eulersche DGL**

$$t^m u^{(m)} + a_{m-1} t^{m-1} u^{(m-1)} + \dots + a_2 t^2 u'' + a_1 t u' + a_0 u \equiv 0 \quad \text{auf } (0, \infty)$$

mit Konstanten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{K}$ ist homogen, weist aber (insgesamt) keine konstanten Koeffizienten auf. Bei dieser DGL ist durch

$$\tilde{u}(\tilde{t}) = u(e^{\tilde{t}}) \quad \text{mit Rücktransformation} \quad u(t) = \tilde{u}(\log t)$$

(d.h. durch die Wahl $T(\tilde{t}) = e^{\tilde{t}}$, $T^{-1}(t) = \log t$) die **Transformation in eine homogene lineare DGL** auf \mathbb{R} mit **konstanten Koeffizienten** möglich. Gemäß Abschnitt 1.2 kann man dann schematisch lösen.

Als konkretes Beispiel wird nun der Fall $m = 3$, $a_0 = a_1 = -2$, $a_2 = 3$, also die GDG

$$t^3 u''' + 3t^2 u'' - 2tu' - 2u \equiv 0 \quad \text{auf } (0, \infty)$$

betrachtet. Aus $u(t) = \tilde{u}(\log t)$ erhält man für die Ableitungen

$$\begin{aligned} u'(t) &= t^{-1} \tilde{u}'(\log t), \\ u''(t) &= t^{-2} \tilde{u}''(\log t) - t^{-2} \tilde{u}'(\log t), \\ u'''(t) &= t^{-3} \tilde{u}'''(\log t) - 3t^{-3} \tilde{u}''(\log t) + 2t^{-3} \tilde{u}'(\log t). \end{aligned}$$

Beim Einsetzen in die GDG kürzen sich alle t -Potenzen heraus, und Zusammenfassen von Termen der gleichen Ableitungsordnung gibt die transformierte Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\tilde{u}''' - 3\tilde{u}'' - 2\tilde{u} \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Letztere wurde in Beispiel (3) aus Abschnitt 1.2 bereits gelöst, und aus der dort erhaltenen Formel für die Lösung (jetzt \tilde{u} genannt) ergibt sich durch Rücktransformation die allgemeine Lösung der Ausgangs-GDG

$$u(t) = \tilde{u}(\log t) = C_1 e^{-\log t} + C_2 (\log t) e^{-\log t} + C_3 e^{2 \log t} = C_1 \frac{1}{t} + C_2 \frac{\log t}{t} + C_3 t^2$$

mit $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$.

Beispiel (für eine **Transformation der abhängigen Variablen**). Die nicht-autonome nicht-lineare GDG

$$u' = (t+u)^2$$

kann man durch

$$\tilde{u}(t) = t+u(t) \quad \text{mit Rücktransformation} \quad u(t) = \tilde{u}(t) - t$$

(d.h. durch die Wahl $Y_t(x) = t+x$, $Y_t^{-1}(\tilde{x}) = \tilde{x}-t$) auf eine autonome GDG zurückführen. Berechnet man nämlich $u'(t) = \tilde{u}'(t) - 1$ und setzt dann ein, so kommt man auf

$$\tilde{u}' - 1 = \tilde{u}^2.$$

Diese neue GDG kann durch Separation der Variablen gelöst werden (vergleiche mit Beispiel (4) in Abschnitt 1.3) und hat die allgemeine Lösung

$$\tilde{u}(t) = \tan(t+C).$$

Als Lösung der Ausgangsgleichung erhält man folglich

$$u(t) = \tan(t+C) - t$$

(auf Intervallen I positiver Länge und mit $C \in \mathbb{R}$, so dass \tan auf $I+C$ nicht singulär wird).

1.8 Zur geometrischen Interpretation von GDGen und GDG-Systemen

Manchmal lässt sich eine GDG oder ein GDG-System **geometrisch veranschaulichen**, und man kann durch eine Skizze eine Vorstellung von prinzipiellen Eigenschaften der Lösungen gewinnen. Oft lässt sich damit das qualitative Lösungsverhalten, insbesondere das Langzeitverhalten, vorhersagen, und auch wenn eine Skizze allein kein Beweis ist, so kann sie trotzdem auf die richtige Idee für einen Beweisansatz führen. Drei Fälle, in denen man tatsächlich **Skizzen in der Zeichenebene** anfertigen kann, folgen:

- (A) Der erste Fall sind **skalare Erster-Ordnung-Gleichungen** in expliziter Form

$$u' = f(\cdot, u)$$

mit einer Strukturfunktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge D von \mathbb{R}^2 . Hier versteht man f als **Steigungsfeld**, durch das zu jedem Punkt $(t, x) \in D$ eine Steigung $f(t, x)$ vorgegeben wird, und Lösungen der GDG sind genau die differenzierbaren Funktionen $u: I \rightarrow \mathbb{R}$, für die $u'(x)$ stets mit der vorgegebenen Steigung $f(x, u(x))$ am Punkt $(x, u(x)) \in D$ übereinstimmt. Die Punkte der Form $(x, u(x))$ bilden hierbei den Graph der Funktion u , daher lässt sich aus einer Skizze des Steigungsfelds f und eines Graphen u (prinzipiell) ablesen, ob u eine Lösung ist. Abbildung 2 zeigt ein Beispiel hierzu (bei dem man mit Transformation wie im vorausgehenden Abschnitt 1.7 übrigens auch eine explizite Formel für Lösungen bekommen kann).

- (B) Der zweite Fall sind **autonome Systeme erster Ordnung** in expliziter Form für \mathbb{R}^2 -wertiges u

$$u' = \Phi(u) \quad (1.15)$$

mit einer Strukturfunktion $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf einer Teilmenge D von \mathbb{R}^2 . Dieser **für die Vorlesung wichtigste Fall** wird hier ausführlich beschrieben:

- Man fasst Φ als **Vektorfeld** auf D auf, stellt sich also vor, dass an jeden Punkt $x \in D \subset \mathbb{R}^2$ der zugehörige Vektor $\Phi(x) \in \mathbb{R}^2$ angeheftet ist, oder, etwas präziser, dass am Punkt x ein Vektorpfeil von x nach $x + \Phi(x)$ befestigt ist.
- Eine über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ **parametrisierte Kurve** $u: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ veranschaulicht man in \mathbb{R}^2 durch Skizzierung des **Bildes der Kurve** u und ihres Durchlaufsinns. Üblicherweise wird die Durchlaufgeschwindigkeit $|u'|$

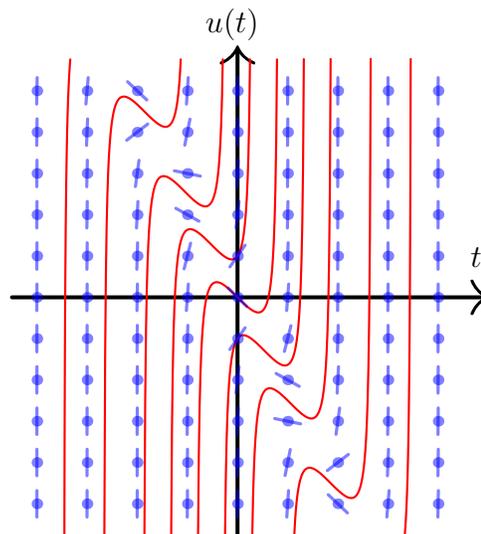


Abb. 2: Das Steigungsfeld $f(t, x) = (2t+x)^2 - 1$ auf \mathbb{R}^2 und die Graphen einiger Lösungen der zugehörigen GDG $u' = (2t+u)^2 - 1$.

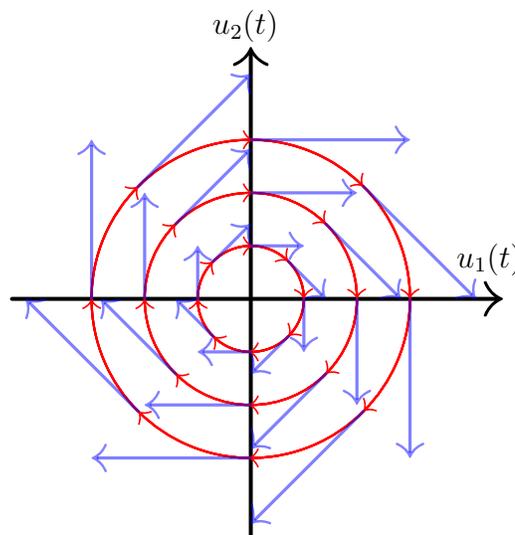


Abb. 3: Das Vektorfeld $\Phi(x) = (x_2, -x_1)$ auf \mathbb{R}^2 und einige Lösungskurven des zugehörigen Systems $u'_1 = u_2, u'_2 = -u_1$.

dabei nicht kenntlich gemacht, weshalb nicht die gesamte Information über u in die Skizze einfließt. Zu beachten ist auch, dass im Gegensatz zu anderen Darstellungen nur das *Bild*, aber nicht der *Graph* von u skizziert wird (denn letzteren kann man bei \mathbb{R}^2 -wertigem u überhaupt nicht in der Ebene zeichnen).

- Dass eine Kurve u **Lösung des Systems** (1.15) ist, manifestiert sich darin, dass die Ableitung $u'(t)$ stets mit dem zum Punkt $u(t)$ gehörigen Vektor $\Phi(u(t))$ übereinstimmt. Man nennt die Lösungen von (1.15) daher auch die **Trajektorien**, **Bahnl**inien oder **Integralkurven** des Vektorfelds Φ . Genau genommen lässt sich an einer Skizze der beschriebenen Art zwar nicht ablesen, ob u eine Lösung ist, aber zumindest das folgende notwendige Kriterium⁷ lässt sich prinzipiell überprüfen: Für die Lösungseigenschaft von $u: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist erforderlich, dass $u'(t)$ stets in *dieselbe Richtung* zeigt wie $\Phi(u(t))$, oder genauer, dass $u'(t)$ und $\Phi(u(t))$ stets positiv linear abhängig sind, oder mit noch etwas anderen Worten, dass **die Kurve u sich bei jedem Punkt $u(t)$ in die Richtung des dort befestigten Vektors $\Phi(u(t))$ bewegt**.

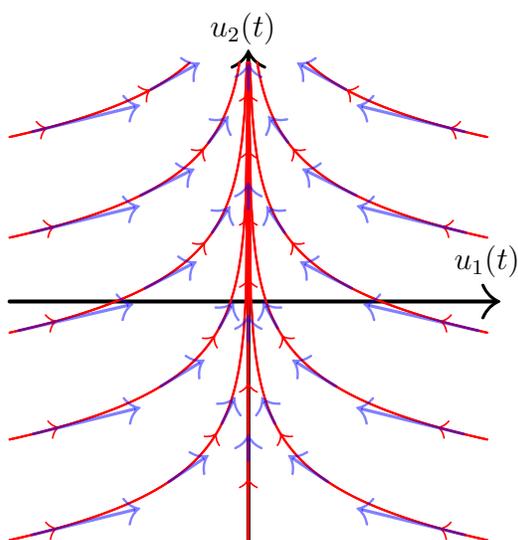


Abb. 4: Das Vektorfeld $\Phi(x) = (-\frac{x_1}{2}, 1)$ auf \mathbb{R}^2 und einige Lösungskurven des zugehörigen Systems $u'_1 = -\frac{u_1}{2}$, $u'_2 \equiv 1$.

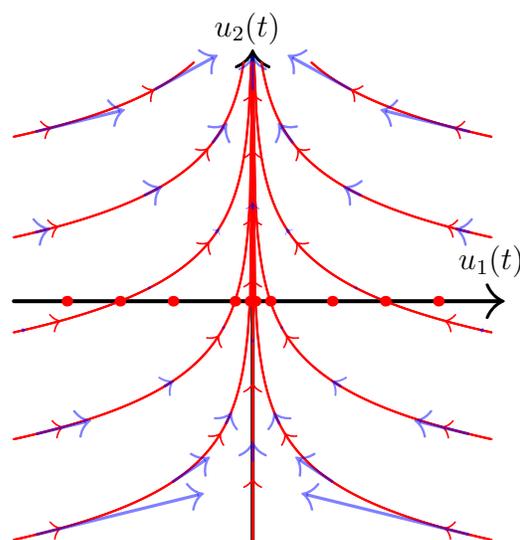


Abb. 5: Das Vektorfeld $\Phi(x) = \frac{x_2^2}{50}(-\frac{x_1}{2}, 1)$ auf \mathbb{R}^2 und einige Lösungskurven des zugehörigen Systems $u'_1 = -\frac{u_2^2 u_1}{100}$, $u'_2 = \frac{u_2^2}{50}$.

Die Abbildungen 3, 4 und 5 zeigen Beispiele der beschriebenen Skizzen. Dabei unterscheiden sich die Vektorfelder der Abbildungen 4 und 5 nur um den skalaren Faktor $\frac{x_2^2}{50}$, durch den die Vektoren in Abbildung 5 nahe der x_1 -Achse stark verkürzt werden, so dass sie teils nur noch andeutungsweise dargestellt werden können. Da die Richtung der Vektoren dennoch erhalten bleibt, gleichen sich die Bilder der Lösungskurven in den beiden Abbildungen, während die Durchlaufgeschwindigkeiten und damit die Lösungen selbst differieren. Bei den Nullstellen des Vorfaktors auf der x_1 -Achse selbst kommt es allerdings zu qualitativen Unterschieden im Lösungsverhalten. In Abbildung 4 überqueren die Lösungen die x_1 -Achse ohne Singularitäten, in Abbildung 5 erreichen sie die x_1 -Achse nur im Limes $t \rightarrow \pm\infty$. Hinzu kommen

⁷Weg von Nullstellen von u' und für $\Phi \in C^0(D, \mathbb{R}^2)$ ist das Kriterium auch hinreichend dafür, dass eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von u eine Lösung ist; die Umparametrisierung erhält man dabei aus einem allgemeinen Existenzsatz, der erst im späteren Abschnitt 2.4 behandelt wird.

in Abbildung 5 außerdem Lösungen, die einen Wert auf der x_1 -Achse konstant annehmen, was durch die roten Punkte auf dieser Achse angedeutet wird. Insgesamt zeigt der Vergleich dieser beiden Beispiele also, **dass die beschriebene geometrische Interpretation zwar viele, doch nicht alle Informationen über Lösungen des Systems (1.15) liefern kann.**

Außerdem ist zu beachten, dass die allgemeine Lösung von (1.15) typischerweise von *zwei* reellen Konstanten als Parametern abhängt, was in den Skizzen nicht direkt ersichtlich ist. Vielmehr scheinen die roten Lösungskurven nur *Ein*-Parameter-Scharen zu bilden, doch der scheinbar fehlende Parameter erklärt sich aus einer **generellen Eigenschaft autonomer GDGen** und GDG-Systeme: Aus einer Lösung u erhält man durch **Verschiebung der t -Variablen** $\tilde{u}(t) = u(t+C)$ um jedes beliebige $C \in \mathbb{R}$ weitere Lösungen \tilde{u} , und all diese Lösungen kommen zeichnerisch auf derselben Bildkurve zu liegen. Der scheinbar fehlende Parameter entspricht also dem in den Skizzen nicht auflösbaren C der Verschiebungen

Zum Abschluss dieses Punktes sei angemerkt, dass die graphische Darstellung von Trajektorien der Gleichung (1.15) selbst im homogenen linearen Fall, also für $\Phi(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, sinnvoll und hilfreich sein kann. Beispiele hierzu sind Thema der Übungen.

- (C) Der dritte Fall sind **autonome, skalare Zweiter-Ordnung-Gleichungen** in expliziter Form

$$u'' = \psi(u, u')$$

mit einer Strukturfunktion $\psi: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge D von \mathbb{R}^2 . Bei solchen Gleichungen kann man durch **Reduktion auf Ordnung 1** zu einem autonomen System wie in (B) übergehen, nämlich zu $u'_1 = u_2$, $u'_2 = \psi(u_1, u_2)$ mit dem zugehörigen Vektorfeld $\Phi(x_1, x_2) = (x_2, \psi(x_1, x_2))$. Dieses Vektorfeld und die Trajektorien lassen sich nun genau wie in (B) beschrieben graphisch darstellen, wobei die Variable auf der x_1 -Achse nun $u(t)$ und die auf der x_2 -Achse der Ableitung $u'(t)$ entspricht.

Als konkretes Beispiel kann man an die Gleichung $u'' = -u$ denken. Dann erhält man das Vektorfeld Φ der Abbildung 3 und folglich genau das dort gezeigte Bild — einzig mit dem Unterschied, dass man sich die Achsen nun mit $u(t)$ und $u'(t)$ beschriftet vorstellen sollte.

Schließlich sei für ganz allgemeine GDGen festgehalten:

Terminologie. Bei einer GDG oder einem GDG-System der Ordnung m für \mathcal{X} -wertige Funktionen u nennt man \mathcal{X}^m in seiner Funktion als Wertebereich von $(u, u', u'', \dots, u^{(m-1)})$ den **Phasenraum** der Gleichung oder des Systems. Daher heißen die graphischen Darstellungen der vorausgehenden Punkte (B) und (C) auch **Phasenraumportraits** — wobei in (B) der Fall $m = 1$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ betrachtet wurde und in (C) der Fall $m = 2$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, so dass es jeweils um Portraits in $\mathcal{X}^m = \mathbb{R}^2$ ging. Als **erweiterten Phasenraum** bezeichnet man den Wertebereich $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^m$ von $t \mapsto (t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(m-1)}(t))$, und in diesem sind die die unter Punkt (A) beschriebenen Darstellungen angesiedelt — denn dort war $m = 1$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, also $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^m = \mathbb{R}^2$.

Prinzipiell gibt es Phasenraumportraits natürlich auch in höheren Dimensionen, und bei autonomen Erster-Ordnung-Systemen für drei (Komponenten-)Funktionen, also im Fall $m = 1$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{X}^m = \mathbb{R}^3$, kann man sich dies noch ähnlich wie unter (B) mit Lösungskurven in \mathbb{R}^3 vorstellen; das Zeichnen wird in diesem räumlichen Fall aber deutlich schwieriger. Auch bei nicht-autonomen Systemen $u' = \Phi(\cdot, u)$ für zwei oder drei Funktionen kann man sich eventuell noch eine anschauliche Vorstellung des Typs (B) machen, wenn man t als Zeitvariable auffasst und Φ als zeitabhängiges Vektorfeld. In zu großen Dimensionen versagt aber im Allgemeinen jede einfache Vorstellungsmöglichkeit.

Kapitel 2

Die Hauptsätze der Theorie

In diesem Kapitel sei \mathcal{X} stets ein Banach-Raum (d.h. ein vollständiger normierter Raum) über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit Norm $|\cdot| = \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$. Am relevantesten sind die Fälle $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$ und $\mathcal{X} = \mathbb{C}^N$ mit der Euklidischen Norm, aber auch Räume unendlicher Dimension $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{X} = \infty$ werden nicht ausgeschlossen (sofern nicht explizit etwas anderes gesagt wird).

2.1 Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf

Es folgt der (vielleicht) grundlegendste Satz der Vorlesung über die Lösbarkeit von AWPen (~ 1890 , benannt nach Émile Picard und Ernst Leonard Lindelöf). Der Satz wird zuerst für GDGen erster Ordnung formuliert, die Verallgemeinerung auf GDGen beliebiger Ordnung $m \in \mathbb{N}$ ist aber nicht schwierig und wird später in diesem Abschnitt auch angegeben.

Hauptsatz 2.1 (Satz von Picard-Lindelöf; Erster-Ordnung-Version). *Gegeben sei das AWP*

$$u' = f(\cdot, u), \quad u(t_0) = y_0 \quad (2.1)$$

mit Strukturfunktion $f \in C^0(D, \mathcal{X})$ auf $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{X}$ und $(t_0, y_0) \in D$. Gibt es $\delta, r, L, M \in (0, \infty)$ mit $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \bar{B}_r(y_0) \subset D$ und

$$|f(t, x)| \leq M, \quad (\text{B})$$

$$|f(t, \tilde{x}) - f(t, x)| \leq L|\tilde{x} - x| \quad (\text{pLB})$$

für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ und $x, \tilde{x} \in \bar{B}_r(y_0)$, so existiert für jedes $0 < \varepsilon \leq \min\{\delta, r/M\}$ **genau eine Lösung u des AWP**s (2.1) **auf** $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, und diese erfüllt $u([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]) \subset \bar{B}_r(y_0)$.

Bezeichnungen. Hier stehen $B_r(y_0) := \{x \in \mathcal{X} : |x - y_0| < r\}$ und $\bar{B}_r(y_0) = \{x \in \mathcal{X} : |x - y_0| \leq r\}$ für die offene und die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt y_0 und Radius r in \mathcal{X} .

Bemerkungen (zum Satz von Picard-Lindelöf).

- (1) Der Satz erfasst **sowohl einzelne skalare GDGen als auch GDG-Systeme**.
- (2) Die Beschränktheits-Voraussetzung (B) folgt automatisch aus der Stetigkeit von f , im Fall $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{X} = \infty$ zusammen mit (pLB). Die explizite Form von (B) wurde oben aber dennoch aufgenommen, um mit Hilfe der Schranke M auch ε explizit angeben zu können.

- (3) Die **entscheidenden Voraussetzungen** des Satzes sind die **explizite Form** der GDG in (2.1) und die **partielle Lipschitz-Bedingung (pLB)**, wobei das Wort ‚partiell‘ anzeigt, dass die Lipschitz-Bedingung nur die x -Variable und nicht die t -Variable betrifft. Die Gültigkeit von (pLB) folgt aus dem Schrankensatz, wenn $x \mapsto f(t, x)$ für $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ auf $B_r(y_0)$ total differenzierbar ist mit Ableitungsschranke $\|D_x f(t, x)\| \leq L$ (in der Operatornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$).
- (4) Der Satz gilt **analog für einseitige Intervalle** mit Randpunkt t_0 , d.h. unter denselben Voraussetzungen mit $[t_0, t_0 + \delta]$ anstelle von $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ bekommt man die Existenz genau einer Lösung auf $[t_0, t_0 + \varepsilon]$.
- (5) Der Satz wurde hier als **lokaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz** für Lösungen des AWP formuliert. Betrachtet man die beiden enthaltenen Fragestellungen aber separat, so stellt man fest, dass Lösungen im Allgemeinen **tatsächlich nur lokal existieren** (vergleiche die Beispiele mit dem Tangens in 1.3 und 1.7), während **Eindeutigkeit automatisch auch global** auf jedem vorgegebenen Intervall positiver Länge $I \ni t_0$ vorliegt (vorausgesetzt (pLB) ist nahe jedem $(t, x) \in D \cap (I \times \mathcal{X})$ erfüllt).

Begründung der globalen Eindeutigkeit. Man überlegt zuerst, dass zwei Lösungen u, \tilde{u} des AWP (2.1) auf I auf $[t_0, \infty) \cap I$ übereinstimmen müssen. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein größtes τ mit $t_0 \leq \tau < \text{rechterRandpunkt}(I)$ und $\tilde{u} = u$ auf $[t_0, \tau]$ (wobei wegen Stetigkeit von u und \tilde{u} direkt ein beim Randpunkt τ abgeschlossenes Intervall betrachtet werden kann). Der Satz, mit τ anstelle von t_0 und eventuell in der einseitigen Version angewandt, gäbe dann ein $\varepsilon > 0$ mit $\tilde{u} = u$ auch auf $[t_0, \tau + \varepsilon]$, doch dies widerspricht der Wahl von τ . Somit muss $\tilde{u} = u$ auf $[t_0, \infty) \cap I$ gelten. Ein analoges Argument gibt $\tilde{u} = u$ auf $(-\infty, t_0] \cap I$, und die Eindeutigkeit auf ganz I ist gezeigt. \square

Gegenbeispiel („ohne explizite Form und pLB keinerlei Eindeutigkeit“). Die skalare Gleichung

$$(u')^3 = u \quad \text{oder äquivalent} \quad u' = \sqrt[3]{u}.$$

ist nicht in expliziter Form (erste Darstellung), oder ihre Strukturfunktion $\sqrt[3]{x}$ erfüllt nahe $x = 0$ keine Lipschitz-Bedingung (zweite Darstellung). Daher ist der **Satz von Picard-Lindelöf** auf das AWP mit AB $u(0) = 0$ **nicht anwendbar**, und im Folgenden wird begründet, dass bei diesem AWP keine Eindeutigkeit vorliegt. Dazu berechnet man durch Separation der Variablen die Lösungen $u(t) = \pm(\frac{2}{3}t - C)^{\frac{3}{2}}$ auf $[\frac{3}{2}C, \infty)$. Diese können — wie in Abbildung 6 skizziert — mit der Null-Lösung zusammengesetzt werden, und tatsächlich hat dann das AWP auf ganz \mathbb{R} mit AB $u(0) = 0$ die **überabzählbar vielen Lösungen**

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq \frac{3}{2}C \\ \pm(\frac{2}{3}t - C)^{\frac{3}{2}} & \text{für } t \geq \frac{3}{2}C \end{cases}$$

mit Parameter $C \in [0, \infty]$. Insbesondere sind auch auf jedem Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ oder $[0, \varepsilon]$ mit $\varepsilon > 0$ überabzählbar viele dieser Lösungen verschieden, und somit liegt **nicht einmal lokale Eindeutigkeit** von Lösungen vor.

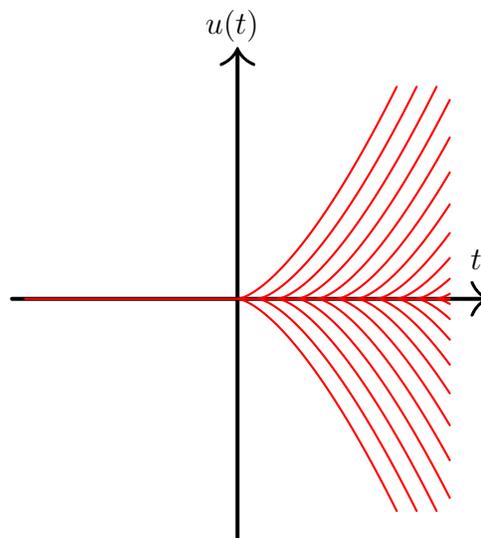


Abb. 6: Die **Graphen einiger Lösungen** des AWP (s) $(u')^3 = u, u(0) = 0$.

Als Nächstes folgt eine Höherer-Ordnung-Version des Satzes von Picard-Lindelöf. Diese könnte völlig analog zu Hauptsatz 2.1 formuliert werden, wird hier aber bewusst in einer leicht anderen Form angegeben. Insbesondere wird obige Bemerkung (5) direkt eingebunden, wodurch der Satz zu einem **lokalen Existenz- und globalen Eindeigkeitsatz** wird:

Korollar 2.2 (Satz von Picard-Lindelöf; eine m -ter-Ordnung-Version). *Gegeben sei eine Strukturfunktion $f \in C^0(D, \mathcal{X})$ auf offenem $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{X}^m$. Ist f lokal auf D bezüglich der \mathcal{X}^m -Variablen Lipschitz-stetig¹, so hat das AWP*

$$u^{(m)} = f(\cdot, u^{[m-1]}), \quad u^{[m-1]}(t_0) = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}) \quad (2.2)$$

für alle $(t_0, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}) \in D$ stets ...

- (**Existenz**) mindestens eine Lösung auf $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ mit ausreichend kleinem² $\varepsilon > 0$,
- (**Eindeutigkeit**) höchstens eine Lösung auf jedem Intervall I positiver Länge mit $t_0 \in I$.

Bezeichnung. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und eine k -mal differenzierbare Funktion u auf einem Intervall positiver Länge wurde hier die Abkürzung

$$u^{[k]} := (u, u', u'', \dots, u^{(k-1)}, u^{(k)})$$

für den sogenannten **k -Jet** von u verwendet.

Zur Ableitung des Korollars reduziert man das AWP (2.2), wie im einführenden Kapitel der Vorlesung erläutert, **auf Ordnung 1**. Die Behauptung ergibt sich dann problemlos durch Anwendung von Hauptsatz 2.1 und Bemerkung (5) auf das reduzierte System. \square

Als Nächstes wird ein Beweis von Hauptsatz 2.1 ausgeführt. Wesentliches Hilfsmittel ist dabei folgendes, aus der Analysis-Grundvorlesung bekannte Resultat, an das hier erinnert wird:

Satz (Banachscher Fixpunktsatz, auch Kontraktionssatz genannt). *Ist $A \neq \emptyset$ vollständiger metrischer Raum mit Metrik d und $T: A \rightarrow A$ strikte Kontraktion (d.h. $d(T(\tilde{a}), T(a)) \leq \kappa d(\tilde{a}, a)$ für alle $a, \tilde{a} \in A$ mit einem $\kappa < 1$), so gibt es genau einen Fixpunkt von T in A (d.h. ein $a \in A$ mit $a = T(a)$).*

Beweis von Hauptsatz 2.1. Die Argumentation basiert auf der **Formulierung des AWP als Fixpunktproblem**

$$u = Tu \quad (2.3)$$

¹Hier wird \mathcal{X}^m als normierter Raum mit Norm $\|(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1})\|_{\mathcal{X}^m} := \sum_{i=0}^{m-1} |x_i|$ verstanden, andere Wahlen wie $(\sum_{i=0}^{m-1} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ geben aber äquivalente Normen und könnten genauso gut verwendet werden.

²Dieses ε hängt — in hier nicht näher spezifizierter Weise — von f , D und $(t_0, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$ ab.

mit folgendem **Integraloperator**³ T auf stetigen Funktionen $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \overline{B}_r(y_0)$:

$$\begin{aligned} T: C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \overline{B}_r(y_0)) &\rightarrow C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathcal{X}), w \mapsto Tw, \\ Tw(t) &:= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, w(s)) ds \in \mathcal{X} \quad \text{für } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]. \end{aligned}$$

Dass dieser Operator wohldefiniert ist, folgt aus den Voraussetzungen $\varepsilon \leq \delta$, $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_r(y_0) \subset D$ und $f \in C^0(D, \mathcal{X})$ sowie dem HDI, wobei letzterer garantiert, dass der Integralausdruck eine stetige und tatsächlich sogar eine differenzierbare Funktion ergibt. Durch Ausschreiben der Definition von T in (2.3) sieht man außerdem, dass die Fixpunktgleichung (2.3) durch Ableiten in die im Satz betrachtete GDG übergeht und umgekehrt die GDG durch Stammfunktionsbildung in die Fixpunktgleichung. Dabei sind allerdings noch Integrationskonstanten zu berücksichtigen, und in Anbetracht dessen, dass Tu per Definition stets $Tu(t_0) = y_0$ erfüllt, kommt man für $u \in C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \overline{B}_r(y_0))$ insgesamt auf die Äquivalenz

$$u \text{ löst } u' = f(\cdot, u) \text{ auf } [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \text{ und } u(t_0) = y_0 \iff Tu = u \text{ in } C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathcal{X}) \quad (2.4)$$

(wobei insbesondere jede stetige Lösung der Fixpunktgleichung automatisch differenzierbar ist, denn Tu ist ja nach dem HDI differenzierbar).

Zwecks Anwendung des Fixpunktsatzes wird $C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathcal{X})$ versehen mit der **Norm der gleichmäßigen Konvergenz** (auch sup-Norm genannt)

$$\|w\|_\infty := \sup_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} |w|.$$

Die Vollständigkeit⁴ des normierten Raums $C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathcal{X})$ und seiner abgeschlossenen Teilmenge

$$A := C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \overline{B}_r(y_0))$$

ist dann im Wesentlichen aus den Analysis-Grundvorlesungen bekannt: Sie folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium⁵ für gleichmäßige Konvergenz und dem Satz, dass Stetigkeit von Funktionen unter gleichmäßiger Konvergenz erhalten bleibt.

Zur Anwendung des Fixpunktsatzes bleiben schließlich noch zwei Eigenschaften des Operators T auf A zu prüfen:

³Beim Integral in der Definition von T handelt es sich um das Riemann-Integral einer stetigen, \mathcal{X} -wertigen Funktion. Im Fall $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{X} < \infty$ kann dieses Integral durch komponentenweise Riemann-Integration erklärt werden, es macht aber auch im ∞ -dimensionalen Fall Sinn. Dazu geht man in der bei Kurvenintegralen üblichen Weise vor und definiert für $t > t_0$ in \mathbb{R} und Banach-Raum-wertiges $g \in C^0([t_0, t], \mathcal{X})$ ganz allgemein $\int_{t_0}^t g(s) ds$ als Limes der Näherungssummen $\sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1})g(s_i)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $t_0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < s_k < t_k = t$ bei gegen Null strebender Feinheit $\max_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} (t_i - t_{i-1})$ der Zerlegung $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_k)$ — wobei der Limes unter den gemachten Voraussetzungen stets in \mathcal{X} existiert. Für $t < t_0$ setzt man $\int_{t_0}^t g(s) ds := -\int_t^{t_0} g(s) ds$, und für $t = t_0$ trifft man natürlich die Konvention, dass das Integral verschwindet. Der HDI und andere Basis-Resultate über „normale“ \mathbb{K} -wertige Integrale bleiben für diese Bildung ohne wesentliche Probleme gültig.

⁴Es sei an die Definition der Vollständigkeit im Kontext normierter oder metrischer Räume erinnert: Vollständigkeit eines solchen Raums bedeutet, dass jede Cauchy-Folge in diesem Raum konvergiert.

⁵Das Kriterium besagt, dass jede Funktionenfolge, die gleichmäßige Cauchy-Folge ist, auch gleichmäßig konvergiert. Dies gilt selbstverständlich nur bei vollständigem Zielraum, benutzt im vorliegenden Kontext also die Vollständigkeit von \mathcal{X} .

- Zum **Nachweis, dass T die Menge A in sich selbst abbildet**, ist zu zeigen, dass Tw mit $w \in A$ stets Werte in $\bar{B}_r(y_0)$ hat. Dies gelingt unter wesentlicher Verwendung der Voraussetzungen $\varepsilon \leq \min\{\delta, r/M\}$ und (B) mit der Abschätzung

$$|Tw(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, w(s)) \, ds \right| \leq \int_{t_0}^t \underbrace{|f(s, w(s))|}_{\leq M \text{ weil } w(s) \in \bar{B}_r(y_0)} \, ds \leq |t-t_0|M \leq \varepsilon M \leq r$$

für $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$, und für $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]$ folgt es ganz analog, wenn man nur die Grenzen des zweiten Integrals in der Abschätzung vertauscht.

- Zum **Nachweis, dass T auf A strikte Kontraktion ist**, schätzt man für $w, \tilde{w} \in A$ gemäß (pLB) wie folgt ab:

$$|T\tilde{w}(t) - Tw(t)| = \left| \int_{t_0}^t \underbrace{[f(s, \tilde{w}(s)) - f(s, w(s))]}_{|\cdot| \leq L|\tilde{w}(s) - w(s)|} \, ds \right| \leq |t-t_0|L\|\tilde{w}-w\|_\infty \quad (2.5)$$

für $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Insgesamt folgt $\|T\tilde{w} - Tw\|_\infty \leq \varepsilon L\|\tilde{w} - w\|_\infty$ und somit die strikte Kontraktionseigenschaft, *vorausgesetzt dass $\varepsilon L < 1$ gilt*. Unter der letzten Zusatzvoraussetzung könnte man den Beweis nun abschließen, aber man kann diese Voraussetzung — die im Hauptsatz ja nicht auftaucht — tatsächlich vermeiden: Dazu schließt man aus (2.5) zunächst nur im Fall $t \geq t_0$ weiter auf

$$\begin{aligned} |T^2\tilde{w}(t) - T^2w(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, T\tilde{w}(s)) - f(s, Tw(s))] \, ds \right| \leq L \int_{t_0}^t |T\tilde{w}(s) - Tw(s)| \, ds \\ &\leq \int_{t_0}^t |s-t_0| \, ds L^2\|\tilde{w}-w\|_\infty = \frac{1}{2}|t-t_0|^2 L^2\|\tilde{w}-w\|_\infty. \end{aligned}$$

Die resultierende Abschätzung bleibt für alle $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ richtig, denn für $t \leq t_0$ muss man in der vorigen Abschätzung nur einige Integralgrenzen vertauschen. Durch induktive Fortsetzung derselben Argumentation ergibt sich für die k -fache Iteration von T mit $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dann die Abschätzung

$$|T^k\tilde{w}(t) - T^kw(t)| \leq \frac{1}{k!}|t-t_0|^k L^k\|\tilde{w}-w\|_\infty \quad \text{für } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon].$$

Insbesondere ist

$$\|T^k\tilde{w} - T^kw\|_\infty \leq \frac{(\varepsilon L)^k}{k!}\|\tilde{w}-w\|_\infty,$$

wegen des über-exponentiellen Fakultäten-Wachstums gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{(\varepsilon L)^{k_0}}{k_0!} < 1$, und zumindest **T^{k_0} ist daher strikte Kontraktion** — unter nur den im Hauptsatz formulierten Voraussetzungen.

An dieser Stelle lässt sich der **Banachsche Fixpunktsatz anwenden**, und es folgt, dass T^{k_0} genau einen Fixpunkt u in A besitzt. Wegen $T^{k_0}Tu = TT^{k_0}u = Tu$ ist auch Tu ein Fixpunkt von T^{k_0} in A , und in Anbetracht der Eindeutigkeit dieses Fixpunkts folgt $u = Tu$, also die Gültigkeit von (2.3) für u . Damit ist die eindeutige Lösbarkeit der Fixpunktgleichung (2.3) in $A = C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \bar{B}_r(y_0))$ gezeigt (eindeutig, da jeder Fixpunkt von T auch Fixpunkt von T^{k_0} ist), und wegen der Äquivalenz (2.4) folgt sofort die eindeutige Lösbarkeit des AWP's (2.1). \square

Bemerkung. Als ein Nebenprodukt des Beweises ergibt sich ein **iteratives Verfahren zur Berechnung von Näherungslösungen** mit zugehöriger A-priori-Fehlerabschätzung: Beginnt man mit einem beliebigen $u_0 \in C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \overline{B}_r(y_0))$ (im einfachsten Fall mit $u_0 \equiv y_0$), so zeigt die Abschätzung

$$\|u - T^k u_0\|_\infty = \|T^k u - T^k u_0\|_\infty \leq \frac{(\varepsilon L)^k}{k!} \|u - u_0\|_\infty \leq \frac{(\varepsilon L)^k}{k!} (r + \|u_0 - y_0\|_\infty),$$

dass die sogenannten **Picard-Iterationen** $T^k u_0$ bei $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig und über-exponentiell schnell gegen die Lösung u konvergieren.

2.2 Der Satz über die maximale Lösung

Es folgt ein weiterer zentraler Satz der Theorie, der sich aus dem Satz von Picard-Lindelöf ergibt und im Wesentlichen unter denselben Voraussetzungen gilt:

Hauptsatz 2.3 (über die **maximale Lösung**). *Die Strukturfunktion $f \in C^0(D, \mathcal{X})$ auf offenem $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{X}$ sei lokal auf D bezüglich der \mathcal{X} -Variablen Lipschitz-stetig. Dann existiert zu jedem Anfangsdatum $(t_0, y_0) \in D$ ein maximales Intervall I_{\max} mit $t_0 \in I_{\max}$, so dass das AWP*

$$u' = f(\cdot, u), \quad u(t_0) = y_0$$

auf I_{\max} eine (eindeutige) Lösung u besitzt. Das Intervall $I_{\max} = (\alpha, \omega)$ ist offen mit $-\infty \leq \alpha < t_0 < \omega \leq \infty$, und bei den Grenzübergängen $t \searrow \alpha$ und $t \nearrow \omega$ verlässt $(t, u(t))$ jede kompakte Teilmenge von D endgültig.

Bemerkungen.

- (1) Dabei heißt $u: I_{\max} \rightarrow \mathcal{X}$ die **maximale Lösung** und I_{\max} das **maximale Lösungsintervall** des betrachteten AWP. Sinnvoll sind diese Begriffe dabei nur, wenn Eindeutigkeit (und lokale Existenz) schon garantiert sind — hier durch Picard-Lindelöf.
- (2) Die **wesentliche** (und auch am schwierigsten zu beweisende) **Aussage** des Satzes ist die über das **Verhalten bei $t \searrow \alpha$ und $t \nearrow \omega$** . Im endlich-dimensionalen Fall $D = \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ impliziert dieses Verhalten, dass
 - entweder $\omega = \infty$ („Lösung für alle Zukunft“)
 - oder $\omega < \infty$, $\lim_{t \nearrow \omega} |u(t)| = \infty$ („Lösungsexplosion zur endlichen Zeit ω “)

sowie eine analoge Alternative für $t \searrow \alpha$ statt $t \nearrow \omega$ gelten.

- (3) Durch Reduktion auf Ordnung 1 lässt sich eine **Version** des Satzes **für AWPe beliebiger Ordnung $m \in \mathbb{N}$** ableiten. Das Verhalten für $t \searrow \alpha$ und $t \nearrow \omega$ sieht dann so aus, dass $(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(m-1)}(t))$ jede kompakte Teilmenge von D endgültig verlässt, und eine Alternative wie in (2) gilt im Fall $D = \mathbb{R} \times (\mathbb{K}^N)^m$ mit $|u(t)| + |u'(t)| + |u''(t)| + \dots + |u^{(m-1)}(t)|$ anstelle von $|u(t)|$ (also mit Lösungsexplosion im Phasenraum).

Beweis von Hauptsatz 2.3. Man erhält I_{\max} als **Vereinigung aller Intervalle I** in \mathbb{R} mit $t_0 \in I$, **auf denen eine Lösung u_I des AWP existiert**. Gemäß dem Satz von Picard-Lindelöf ist dann ...

- I_{\max} ein Intervall positiver Länge um t_0 , das das Picard-Lindelöf-Intervall $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ enthält;
- die Zusammensetzung (wegen Eindeutigkeit wohldefiniert)

$$u(x) := u_I(x) \text{ für } x \in I$$

der Lösungen u_I eine Lösung u des AWP's auf ganz I_{\max} ;

- $I_{\max} = (\alpha, \omega)$ offen, denn wäre etwa der rechte Randpunkt ω in I_{\max} enthalten, so wäre $(\omega, u(\omega)) \in D$ und man könnte die Lösung u auf $(\omega, \omega + \varepsilon]$ fortsetzen — im Widerspruch zur Definition von I_{\max} .

Zum Nachweis des behaupteten Verhaltens bei $t \nearrow \omega$ argumentiert man durch ‚reductio ad absurdum‘: Angenommen es gäbe eine Folge $t_n \nearrow \omega$ mit $(t_n, u(t_n)) \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein Kompaktum $K \subset D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{X}$. Dann ist $\omega < \infty$ wegen der Beschränktheit von K , und gemäß Extremalsatz existiert $M := \max_K |f| < \infty$. Außerdem gibt es ein $\delta > 0$, so dass für die offene δ -Umgebung $U_\delta(K)$ von K bezüglich der Norm $\|(t, x)\|_{\mathbb{R} \times \mathcal{X}} := |t| + |x|$ gilt:

$$\overline{U_\delta(K)} \subset \{(t, x) \in D : |f(t, x)| < 1 + M\} \quad (2.6)$$

(denn K ist kompakt, und die Menge auf der rechten Seite der Inklusion ist eine offene Obermenge von K ; somit hat K notwendig positiven Abstand zum Komplement dieser Obermenge).

Die nächste Behauptung ist, dass

$$\text{ein } n_0 \in \mathbb{N} \text{ existiert, so dass } (t, u(t)) \in U_\delta(K) \text{ für alle } t \in (t_{n_0}, \omega) \text{ gilt,} \quad (2.7)$$

und dies wird mit einem weiteren (Widerspruch-im-)Widerspruchsargument gezeigt. Wäre (2.7) nämlich falsch, so gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein t_n^* mit $t_n < t_n^* < \omega$ und $(t_n^*, u(t_n^*)) \notin U_\delta(K)$. Außerdem lässt sich annehmen, dass t_n^* sogar minimal mit dieser Eigenschaft gewählt wurde — dies geht wegen Stetigkeit von u , Abgeschlossenheit des Komplements von $U_\delta(K)$, und weil t_n selbst wegen $(t_n, u(t_n)) \in K$ nicht in Frage kommt. Mit diesen Wahlen und dem Schrankensatz ergäbe sich

$$\delta \leq \|(t_n^*, u(t_n^*)) - (t_n, u(t_n))\|_{\mathbb{R} \times \mathcal{X}} = (t_n^* - t_n) + |u(t_n^*) - u(t_n)| \leq (t_n^* - t_n) \left[1 + \sup_{(t_n, t_n^*)} |u'| \right],$$

wobei das Maximum auf der rechten Seite wegen der Lösungseigenschaft $u' = f(\cdot, u)$, wegen der aus der Minimalität von t_n^* resultierenden Inklusion $(t, u(t)) \in U_\delta(K)$ für $t \in (t_n, t_n^*)$ und wegen (2.6) durch $1 + M$ abgeschätzt werden könnte. Daher würde man mit

$$\delta \leq (\omega - t_n)[2 + M] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

einen Widerspruch erhalten. Somit ist (2.7) gezeigt.

Aus der Lösungseigenschaft von u , (2.7) und (2.6) liest man ab, dass $|u'(t)| = |f(\cdot, u)| < 1 + M$ bei $t \nearrow \omega$ beschränkt bleibt. Nach Schrankensatz und Cauchy-Kriterium existiert dann $y_\omega := \lim_{t \nearrow \omega} u(t)$ in \mathcal{X} . Unter erneuter Verwendung von (2.7) und (2.6) folgt $(\omega, y_\omega) \in \overline{U_\delta(K)} \subset D$, und nun kann der Satz von Picard-Lindelöf angewandt werden, um das AWP zu $u' = f(\cdot, u)$ mit AB $u(\omega) = y_\omega$ lokal zu lösen. Eine Lösung dieses AWP's existiert insbesondere auf einem Intervall $[\omega, \omega + \varepsilon]$ mit $\varepsilon > 0$ und kann mit u zu einer Lösung des ursprünglichen AWP's auf $(\alpha, \omega + \varepsilon]$ zusammengesetzt werden. Dies widerspricht der Definition von I_{\max} und bestätigt, in Anbetracht der eingangs gemachten Annahme, das behauptete Verhalten beim Grenzübergang $t \nearrow \omega$.

Die Behauptung über das Verhalten für $t \searrow \alpha$ beweist man völlig analog. \square

2.3 Kriterien für globale Existenz von Lösungen

Die *globale* Lösbarkeit von AWPen kann nur in speziellen Fällen sichergestellt werden. Der wohl wichtigste solche Fall folgt und **erfasst insbesondere alle linearen GDGen und GDG-Systeme mit stetigen Koeffizienten** (mehr dazu im späteren Abschnitt 3.1):

Satz 2.4 (Globaler Existenzsatz im Fall linearen Wachstums). *Sei I Intervall positiver Länge in \mathbb{R} , und die Strukturfunktion $f \in C^0(I \times \mathcal{X}, \mathcal{X})$ sei lokal auf $I \times \mathcal{X}$ bezüglich der \mathcal{X} -Variablen Lipschitz-stetig. Erfüllt f außerdem eine **lineare Wachstumsbedingung in der \mathcal{X} -Variablen***

$$|f(t, x)| \leq g(t)|x| + h(t) \quad \text{für alle } t \in I, x \in \mathcal{X}$$

mit stetigen Funktionen $g, h: I \rightarrow [0, \infty)$, so ist das AWP

$$u' = f(\cdot, u), \quad u(t_0) = y_0 \tag{2.8}$$

für alle $t_0 \in I, y_0 \in \mathcal{X}$ **auf dem gegebenen Intervall I (eindeutig) lösbar.**

Bemerkung. Ein analoger Sachverhalt gilt bei GDGen $u^{(m)} = f(\cdot, u^{[m-1]})$ beliebiger Ordnung $m \in \mathbb{N}$ mit Wachstumsbedingung $|f(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1})| \leq g(t)(\sum_{i=0}^{m-1} |x_i|) + h(t)$ für alle $t \in I, x \in \mathcal{X}$; dies beweist man durch Reduktion auf Ordnung 1.

Der Beweis des Satzes beruht auf einer **Analyse des genauen Existenzintervalls im Satz von Picard-Lindelöf**. Im Einzelnen argumentiert man wie folgt:

Beweis. Zunächst sei I als kompakt angenommen. Dann sind g und h auf I beschränkt, und somit gilt $\sup_I(g+h) \leq K$ für eine Schranke $K \in (0, \infty)$. Es folgt

$$|f(t, x)| \leq K(|y_0|+1) \quad \text{für alle } (t, x) \in I \times \bar{B}_1(y_0),$$

und nach Picard-Lindelöf hat das AWP (2.8)

$$\text{eine Lösung } u \text{ auf } I \cap [t_0, t_0+\varepsilon_1], \varepsilon_1 = \frac{1}{K(|y_0|+1)}, \text{ mit Werten in } \bar{B}_1(y_0).$$

Ist $t_0+\varepsilon_1 \in I$, so wendet man im nächsten Schritt Picard-Lindelöf mit dem neuen Anfangsdatum $(t_0+\varepsilon_1, u(t_0+\varepsilon_1)) \in I \times \bar{B}_1(y_0)$ an und setzt die so erhaltene Lösung mit Werten in $\bar{B}_1(u(t_0+\varepsilon_1)) \subset \bar{B}_2(y_0)$ an u heran. Wegen

$$|f(t, x)| \leq K(|y_0|+2) \quad \text{für alle } (t, x) \in I \times \bar{B}_1(u(t_0+\varepsilon_1))$$

findet man für das AWP (2.8) somit auch

$$\text{eine Lösung } u \text{ auf } I \cap [t_0, t_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2], \varepsilon_2 = \frac{1}{K(|y_0|+2)}, \text{ mit Werten in } \bar{B}_2(y_0).$$

Ist auch $t_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \in I$, so kann man Picard-Lindelöf ein weiteres Mal anwenden und bekommt

$$\text{eine Lösung } u \text{ auf } I \cap [t_0, t_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3], \varepsilon_3 = \frac{1}{K(|y_0|+3)}, \text{ mit Werten in } \bar{B}_3(y_0).$$

Dieses Vorgehen lässt sich induktiv fortsetzen, und wegen der Divergenz der harmonischen Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{K(|y_0|+i)} = \infty$$

ist dadurch die Existenz einer Lösung von (2.8) auf $I \cap [t_0, \infty)$ sichergestellt. Analog bekommt man eine Lösung auf $I \cap (-\infty, t_0]$ und durch noch ein letztes Aneinandersetzen auch eine auf ganz I . Für kompaktes I ist der Satz somit bewiesen, und bei nicht-kompaktem I erhält man die Lösung auf I einfach durch Zusammensetzen der Lösungen auf allen kompakten Teilintervallen von I , die t_0 enthalten (wobei die Zusammensetzung wegen Eindeutigkeit wohldefiniert ist). \square

Bemerkung. Im vorausgehenden Beweis wurde der Satz von Picard-Lindelöf stets mit $r = 1$ angewandt. Eine Alternative ist, bei der i -ten Anwendung $r_i := |u(t_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{i-1})| + 1$ zu wählen; dann kann man bei kompaktem I oder beschränktem g und h erreichen, dass die Intervalllängen ε_i bei $i \rightarrow \infty$ nicht gegen Null gehen, sondern konstant bleiben.

Manchmal lässt sich die **globale Existenz von Lösungen** auch anders, nämlich **durch Zurückführung auf den Satz über die maximale Lösung**, sicherstellen. Genauer verwendet man dazu folgende direkte Konsequenz dieses Satzes:

Sind bei einem gegebenen AWP $u' = f(\cdot, u)$, $u(t_0) = y_0$ die Voraussetzungen von Hauptsatz 2.3 an D , f , t_0 , y_0 erfüllt, und bleibt $\{(t, u(t)) : t \in J\}$ für jede Lösung u des AWP auf einem beschränkten Teilintervall J mit $t_0 \in J \subset I$ in einer kompakten Teilmenge von D , so ist das AWP auf ganz I lösbar.

Anwendungsmöglichkeiten für diese Aussage bieten sich **bei autonomen Systemen**

$$u' = \Phi(u), \quad u(t_0) = y_0 \quad (2.9)$$

mit $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $f(t, x) = \Phi(x)$. Dann ist obige Voraussetzung erfüllt, sobald alle Lösungen u auf (beschränkten) Teilintervallen J von I beschränkt bleiben, und dies wiederum verifiziert man beispielsweise ...

- (A) für $I = \mathbb{R}$, wenn das Vektorfeld Φ tangential zu einer kompakten C^1 -Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ ohne Rand mit $y_0 \in M$ ist (z.B. für eine Kugel M);
- (B) für $I = \mathbb{R}$, wenn Φ tangential zum Rand ∂G eines beschränkten C^1 -Gebietes $G \subset \mathbb{R}^N$ mit $y_0 \in \overline{G}$ ist; (z.B. für eine Kugel G);
- (C) für $I = [t_0, \infty)$, wenn Φ auf dem Rand ∂G eines beschränkten C^1 -Gebietes $G \subset \mathbb{R}^N$ mit $y_0 \in \overline{G}$ nirgends nach außen zeigt (auch dies z.B. für eine Kugel G).

In diesen Fällen lässt sich nämlich zeigen, dass **alle Lösungen** in M beziehungsweise \overline{G} **gefangen** und damit beschränkt sind. Anschaulich ist dies sehr einleuchtend und in Phasenraumportraits typischerweise leicht ersichtlich. Der formale Beweis, dass M beziehungsweise \overline{G} nicht verlassen werden können, ist aber trotzdem etwas technisch und wird hier nur skizziert:

Im Fall (A) reicht es zu zeigen, dass es zu jeder Lösung u auf $J \subset I$ (oder auch nur auf $J = I_{\max}$) und jeder Stelle $\tau \in J$ mit $u(\tau) \in M$ ein kleines Intervall um τ gibt, auf dem u in M bleibt. Dies verifiziert man durch lokales Geradebiegen von M nahe $u(\tau)$ mit einem C^1 -Diffeomorphismus und zugehörige Transformation der abhängigen Variablen bei der GDG. Man kann sich dann im Wesentlichen auf den Fall zurückziehen, dass M ein L -dimensionaler Unterraum von \mathbb{R}^N ist, und durch Anwendung von Picard-Lindelöf auf ein System von nur L (statt N) Gleichungen eine Lösung finden, die bei τ denselben Anfangswert wie u besitzt und lokal im Unterraum M bleibt. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage von Picard-Lindelöf gilt dasselbe schließlich auch für das ursprüngliche, beliebige u — wie benötigt.

Für den Fall (B) ist mit der vorausgehenden Argumentation schon gezeigt, dass Lösungen mit Anfangsdatum in ∂G stets in ∂G bleiben. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage von Picard-Lindelöf folgt dann auch, dass Lösungen mit Anfangsdatum in G nie den Rand ∂G und folglich auch nicht das Äußere $\mathbb{R}^N \setminus \overline{G}$ erreichen können. Daher bleiben alle Lösungen mit Anfangsdatum in \overline{G} stets in \overline{G} , und (B) ist erledigt.

Bei (C) argumentiert man ebenfalls durch Geradebiegen und kann dann im Wesentlichen auf eine einzelne, skalare, allerdings nicht mehr unbedingt autonome GDG reduzieren. In den Übungen wird (etwas) mehr zu diesem Fall und insbesondere der skalaren GDG gesagt.

Alles in allem kann man jedenfalls in allen drei Fällen (A), (B) und (C) auf **globale Lösbarkeit** des AWP's (2.9) auf dem entsprechenden Intervall I schließen.

Kapitel 2 wird nun unterbrochen und erst auf Seite 75 fortgesetzt.

Kapitel 3

Lineare GDG-Systeme

3.1 Allgemeine Theorie linearer GDG-Systeme

Hier seien \mathcal{X} (mit Norm $|\cdot| = \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$) und \mathcal{Z} beliebige normierte Räume über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, I sei ein Intervall positiver Länge in \mathbb{R} , und es sei erinnert an die allgemeine Form eines linearen GDG-Systems

$$A_m u^{(m)} + A_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + A_2 u'' + A_1 u' + A_0 u = b \quad \text{auf } I \quad (3.1)$$

mit gegebenen Funktionen $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ und $b: I \rightarrow \mathcal{Z}$. Im wichtigsten Fall $\mathcal{X} = \mathbb{K}^N$, $\mathcal{Z} = \mathbb{K}^M$ sind die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m$ einfach t -abhängige reelle oder komplexe $(M \times N)$ -Matrizen, und die Inhomogenität b ist ein t -abhängiger reeller oder komplexer M -Vektor.

Mit dem Differentialoperator $P = \sum_{k=0}^m A_k \frac{d^k}{dt^k}$, der eine m -mal differenzierbare Funktion $u: I \rightarrow \mathcal{X}$ in die Funktion $Pu = \sum_{k=0}^m A_k u^{(k)}: I \rightarrow \mathcal{Z}$ überführt, kann die Notation verkürzt werden, und das GDG-System (3.1) lässt sich dann einfach durch $Pu = b$ auf I ausdrücken. Unter Verwendung dieser Schreibweise seien folgende Beobachtungen über lineare GDGen festgehalten:

Satz 3.1 (Grundeigenschaften bei linearen GDGen). Für $P = \sum_{k=0}^m A_k \frac{d^k}{dt^k}$ mit gegebenen $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ und $b: I \rightarrow \mathcal{Z}$ gelten:

- (I) P ist ein \mathbb{K} -linearer Operator, d.h. für m -mal differenzierbare $u_j: I \rightarrow \mathcal{X}$ und $C_j \in \mathbb{K}$ gilt $P(C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n) = C_1 P u_1 + C_2 P u_2 + \dots + C_n P u_n$.
- (II) Die **Lösungen der homogenen GDG** $Pu \equiv 0$ auf I bilden einen \mathbb{K} -Vektorraum, nämlich einen Untervektorraum des Raums m -mal differenzierbarer Funktionen $I \rightarrow \mathcal{X}$. Mit anderen Worten gilt das sogenannte **Superpositionsprinzip**: Für Lösungen u_j zu $Pu \equiv 0$ und $C_j \in \mathbb{K}$ ist auch $C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n$ stets Lösung, und insbesondere ist die Null-Funktion stets eine Lösung zu $Pu \equiv 0$, genannt die **triviale Lösung**.
- (III) Ist u_{sp} eine spezielle Lösung zu $Pu = b$ auf I , so hat die **inhomogene GDG** $Pu = b$ auf I als **Lösungsraum den affinen Unterraum**

$$u_{\text{sp}} + \mathcal{L}_{\text{hom}} = \{u_{\text{sp}} + \tilde{u} : \tilde{u} \in \mathcal{L}_{\text{hom}}\}$$

des Raums m -mal differenzierbarer Funktionen $I \rightarrow \mathcal{X}$, wobei \mathcal{L}_{hom} den Lösungsraum der homogenen Gleichung $Pu \equiv 0$ auf I bezeichnet.

- (IV) Sind die **Koeffizienten** A_k **reelle** $(M \times N)$ -**Matrizen** und ist die **Inhomogenität** b ein **reeller** M -**Vektor**, so **sind die Realteile der komplexen Lösungen** zu $Pu = b$ (diese entsprechen der Auffassung $\mathcal{X} = \mathbb{C}^N$, $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^M$) **genau die reellen Lösungen** zu $Pu = b$ (diese entsprechen $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$, $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^M$), und die **Imaginärteile der komplexen Lösungen** zu $Pu = b$ sind **genau die reellen Lösungen der homogenen Gleichung** $Pu \equiv 0$.

Beweis. Die Behauptung (I) ergibt sich aus der Linearität der Ableitungsoperatoren $\frac{d^k}{dt^k}$ und Rechenregeln für die Matrix-Vektor-Multiplikation, und (II), (III) sind dann direkte Folgen von (I). Die letzte Behauptung (IV) schließlich erhält man aus der Beobachtung, dass die Gleichung $Pu = b$ durch Real- und Imaginärteilverteilung auf beiden Seiten in $P(\operatorname{Re} u) = b$ und $P(\operatorname{Im} u) \equiv 0$ aufgespalten werden kann. \square

Bemerkungen.

- (1) Teil (III) des Satzes besagt insbesondere, dass die **allgemeine Lösung zu $Pu = b$ die Summe einer speziellen Lösung zu $Pu = b$ und der allgemeinen Lösung zu $Pu \equiv 0$ ist**. Dies konnte in früheren Beispielen (wie etwa Beispiel (1) in Abschnitt 1.6) bereits beobachtet werden, und die Kenntnis dieser Tatsache kann natürlich helfen, die Rechnung zu vereinfachen und den Überblick zu bewahren.
- (2) Für A_k , b wie im Satz mit allgemeinen normierten Räumen \mathcal{X} , \mathcal{Z} über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann (IV) ebenfalls formuliert werden. Komplexe Lösungen sind dann solche mit Werten in der Komplexifizierung $\mathcal{X} + \mathfrak{i}\mathcal{X}$ von \mathcal{X} (wobei zur Formulierung der GDG für $(\mathcal{X} + \mathfrak{i}\mathcal{X})$ -wertige u auch die Komplexifizierung $\mathcal{Z} + \mathfrak{i}\mathcal{Z}$ von \mathcal{Z} herangezogen wird).

Der **wichtigste Fall** bei linearen GDG-Systemen ist natürlich der Fall $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, und das bedeutet im Matrizenfall $\mathcal{Z} = \mathcal{X} = \mathbb{K}^N$, dass alle A_k **quadratische** $(N \times N)$ -**Matrizen** sind und genauso viele Gleichungen wie unbekannte Funktionen vorliegen. Ist $A_m(t)$ im Fall $\mathcal{X} = \mathcal{Z}$ für alle $t \in I$ in $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ invertierbar, so kann man durch Multiplikation von (3.1) mit der Inversen $A_m(t)^{-1}$ auf den Fall $A_m(t) = \operatorname{id}_{\mathcal{X}}$ (mit der Identität $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$) reduzieren. **Im Folgenden wird nur noch dieser Fall, der einem System in expliziter Form entspricht, betrachtet.** Im Matrizenfall reicht es für Invertierbarkeit natürlich, $\det(A_m(t)) \neq 0$ für alle $t \in I$ zu prüfen, und Stetigkeit von b und allen A_k bleibt bei der Herstellung der expliziten Form dann erhalten (denn gemäß der Cramerschen Regel hängt auch $A_m(t)^{-1}$ stetig von t ab).

Die wesentlichen Sachverhalte bei linearen GDG-Systemen der beschriebenen Form werden im folgenden Satz und seinen Korollaren zusammengestellt.

Hauptsatz 3.2 (Globaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz für lineare GDGen). Sei \mathcal{X} vollständig, und sei $P = \frac{d^m}{dt^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k \frac{d^k}{dt^k}$ mit $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1} \in C^0(I, \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}))$ und $b \in C^0(I, \mathcal{X})$. Dann besitzt das AWP¹ $Pu = b$, $u^{[m-1]}(t_0) = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$ für alle $t_0 \in I$ und $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1} \in \mathcal{X}$ stets eine eindeutige Lösung auf ganz I .

Beweis. Die Strukturfunktion der auf explizite Form gebrachten GDG

$$f(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) = -A_{m-1}(t)x_{m-1} - \dots - A_1(t)x_1 - A_0(t)x_0 + b(t),$$

¹Die Notation $u^{[m-1]} := (u, u', u'', \dots, u^{(m-1)})$ wurde im Zusammenhang mit Korollar 2.2 bereits eingeführt.

erfüllt eine lineare Wachstumsbedingung und eine lokale pLB auf $I \times \mathcal{X}^m$; dies sieht man aus den Abschätzungen (wobei $\|\cdot\|$ für die Operatornorm in $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ steht)

$$|f(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1})| \leq \max \{ \|A_1(t)\|, \|A_2(t)\|, \dots, \|A_{m-1}(t)\| \} \sum_{i=0}^{m-1} |x_i| + |b(t)|$$

und

$$\begin{aligned} & |f(t, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{m-1}) - f(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1})| \\ & \leq \max \left\{ \sup_K \|A_0\|, \sup_K \|A_1\|, \dots, \sup_K \|A_{m-1}\| \right\} \sum_{i=0}^{m-1} |\tilde{x}_i - x_i|, \end{aligned}$$

letztere gültig für alle t im Kompaktum $K \subset I$. In Anbetracht von Wachstumsbedingung und pLB folgt die Aussage von Hauptsatz 3.2 nun aus der globalen Existenzaussage des Satzes 2.4 (zuzüglich der Bemerkung zu m -ter-Ordnung-Analoga) und dem Eindeigkeitsteil des Satzes von Picard-Lindelöf (in der m -ter-Ordnung-Version des Korollars 2.2). \square

Aus Hauptsatz 3.2 ergeben sich folgende Korollare (gültig unter denselben Voraussetzungen):

Korollar 3.3. Für jede nicht-triviale² Lösung u zu $Pu \equiv 0$ auf I besitzt $u^{[m-1]}$ keine Nullstelle in I , d.h. $u, u', u'', \dots, u^{(m-1)}$ besitzen keine gemeinsame Nullstelle in I .

Beweis. Ist τ eine solche Nullstelle, so ist u wegen Eindeigkeit der Lösung des AWP's $Pu \equiv 0$, $u^{[m-1]}(\tau) = 0$ notwendigerweise die triviale Lösung. \square

Korollar 3.4. Sind A_k und b reell, so gilt für (potentiell) komplexe Lösungen u zu $Pu = b$:

$$u \text{ ist reelle Lösung auf } I \iff u \text{ hat an einer Stelle } \tau \in I \text{ reelle AWe } u^{[m-1]}(\tau)$$

(wobei reelle und komplexe Lösungen wie in Teil (IV) des vorigen Satzes beziehungsweise wie in der zugehörigen Bemerkung (2) zu verstehen sind).

Beweis. $, \implies$ ' gilt trivial, $, \longleftarrow$ ' folgt aus Existenz der reellen und Eindeigkeit der komplexen Lösung. \square

Korollar 3.5. Für jedes $t_0 \in I$ ist die Abbildung von $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$ auf die eindeutige Lösung des AWP's $Pu \equiv 0$, $u^{[m-1]}(t_0) = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$ ein Isomorphismus³ von \mathcal{X}^m auf den Lösungsraum \mathcal{L}_{hom} der GDG $Pu \equiv 0$ auf I . Daher ist $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}_{\text{hom}}) = m \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{X})$, und für $\mathcal{X} = \mathbb{K}^N$ gilt $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}_{\text{hom}}) = mN = (\text{Ordnung}) \cdot (\text{Anzahl Gleichungen})$.

Beweis. Die angegebene Abbildung ist wohldefiniert (gemäß Hauptsatz), \mathbb{K} -linear (gemäß Superpositionsprinzip) und bijektiv (trivial). Gemäß Basis-Resultaten der linearen Algebra ist sie damit Isomorphismus und erfüllt $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Definitionsbereich}) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Zielbereich})$. \square

²Nicht-triviale Lösungen nennt man alle Lösungen außer der als triviale Lösung bezeichneten Null-Funktion.

³Hier ist ein Isomorphismus von \mathbb{K} -Vektorräumen, d.h. eine \mathbb{K} -lineare Bijektion mit \mathbb{K} -linearer Umkehrabbildung, gemeint und nicht — wie oft in der Funktionalanalysis — ein Isomorphismus von normierten Räumen über \mathbb{K} (wobei man für letzteren Begriff auch erst sagen müsste, welche Norm man auf dem Lösungsraum verwendet).

Korollar 3.6. Seien u_1, u_2, \dots, u_L mit $L = m \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{X}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ Lösungen zu $Pu \equiv 0$ auf I . Dann sind **äquivalent**:

- u_1, u_2, \dots, u_L ist Basis des Lösungsraum zu $Pu \equiv 0$ auf I ;
- $u_1^{[m-1]}(t), u_2^{[m-1]}(t), \dots, u_L^{[m-1]}(t)$ ist für **ein** $t \in I$ Basis von \mathcal{X}^m ;
- $u_1^{[m-1]}(t), u_2^{[m-1]}(t), \dots, u_L^{[m-1]}(t)$ ist für **alle** $t \in I$ Basis von \mathcal{X}^m .

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Korollar 3.5 (da Isomorphismen Basen in Basen überführen). \square

Definition 3.7 (Fundamentalsysteme, Fundamentalmatrizen).

- Eine Basis des Lösungsraums eines homogenen linearen GDG-Systems $Pu \equiv 0$ auf I nennt man ein **Fundamentalsystem (FS)** (oder, seltener, ein **Hauptsystem**) zu $Pu \equiv 0$ auf I .
- Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes mit $\mathcal{X} = \mathbb{K}^N$ heißt jede aus mN beliebigen Lösungen u_1, u_2, \dots, u_{mN} zu $Pu \equiv 0$ gebildete, t -abhängige quadratische Matrix

$$W(t) := \left(u_1^{[m-1]}(t) \left| u_2^{[m-1]}(t) \right| \dots \left| u_{mN}^{[m-1]}(t) \right. \right) \in (\mathbb{K}^N)^{m \times mN} = \mathbb{K}^{mN \times mN}$$

eine **Wronski-Matrix** zur Stelle $t \in I$, und $\det(W(t))$ heißt die zugehörige **Wronski-Determinante**. Ist u_1, u_2, \dots, u_{mN} sogar Fundamentalsystem, so heißt W **Fundamentalmatrix (FM)** des GDG-Systems $Pu \equiv 0$ auf I .

Bemerkungen (zu Wronski- und Fundamentalmatrizen). Hier seien die Voraussetzungen des Hauptsatzes mit $\mathcal{X} = \mathbb{K}^N$ erfüllt, und es sei $L = mN$ die Anzahl der Funktionen eines FSs.

- (1) Die **Berechnung eines Fundamentalsystems** u_1, u_2, \dots, u_L zu $Pu \equiv 0$ ist **im Wesentlichen dasselbe wie die Berechnung der allgemeinen Lösung** $C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_L u_L$ mit Konstanten $C_1, C_2, \dots, C_L \in \mathbb{K}$. Mit der aus u_1, u_2, \dots, u_L gebildeten Fundamentalmatrix W kann man die allgemeine Lösung (im Fall $m > 1$ samt Ableitungen bis Ordnung $m-1$) auch als Matrix-Vektor-Produkt⁴

$$u^{[m-1]}(t) = W(t)C \quad \text{für } t \in I \quad (3.2)$$

von $W(t) \in \mathbb{K}^{L \times L}$ mit dem konstanten Vektor $C = (C_1, C_2, \dots, C_L) \in \mathbb{K}^L$ schreiben.

- (2) **Fundamentalmatrizen und -systeme sind** (solange man nicht zusätzlich eine AB fordert) **nicht völlig eindeutig**. Kennt man eine Fundamentalmatrix W beziehungsweise ein Fundamentalsystem u_1, u_2, \dots, u_L zu $Pu \equiv 0$, so erhält man alle weiteren in der Form WA beziehungsweise $\sum_{i=1}^L a_{i1} u_i, \sum_{i=1}^L a_{i2} u_i, \dots, \sum_{i=1}^L a_{iL} u_i$ mit einer konstanten, invertierbaren Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,L} \in \mathbb{K}^{L \times L}$; dies folgt aus der Definition eines Fundamentalsystems als Basis des Lösungsraums und dem Superpositionsprinzip.

⁴Hier wird $u^{[m-1]}(t)$ als *Spaltenvektor* mit m Einträgen aus \mathbb{K}^N , also mit insgesamt mN Zeilen verstanden. Auch (C_1, C_2, \dots, C_L) und jedes mit Kommata gekennzeichnete Tupel werden als *Spaltenvektoren* interpretiert.

(3) Gemäß Korollar 3.6 und linearer Algebra gilt für eine Wronski-Matrix $W: I \rightarrow \mathbb{K}^{L \times L}$:

$$\begin{aligned} W \text{ Fundamentalmatrix} &\iff W(t) \text{ invertierbar für ein } t \in I \\ &\iff W(t) \text{ invertierbar für alle } t \in I \\ &\iff \det W(t) \neq 0 \text{ für ein } t \in I \\ &\iff \det W(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in I. \end{aligned}$$

(4) Ist die allgemeine Lösung $C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_L u_L$ zu $Pu \equiv 0$ bestimmt, so führt das **Einssetzen einer AB** $u^{[m-1]}(t_0) = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$ mit $t_0 \in I$ und $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{K}^N$ auf das lineare Gleichungssystem mit m Gleichungen in \mathbb{K}^N (also insgesamt L Komponentengleichungen)

$$\begin{array}{ccccccc} C_1 u_1(t_0) & + & C_2 u_2(t_0) & + & \dots & + & C_L u_L(t_0) & = & y_0 \\ C_1 u_1'(t_0) & + & C_2 u_2'(t_0) & + & \dots & + & C_L u_L'(t_0) & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ C_1 u_1^{(m-1)}(t_0) & + & C_2 u_2^{(m-1)}(t_0) & + & \dots & + & C_L u_L^{(m-1)}(t_0) & = & y_{m-1} \end{array}$$

für die L Koeffizienten C_1, C_2, \dots, C_L . Mit der aus u_1, u_2, \dots, u_L gebildeten Fundamentalmatrix W und $C = (C_1, C_2, \dots, C_L)$ kann dies analog zu (3.2) als

$$W(t_0)C = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{oder auch als} \quad C = W(t_0)^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$$

zusammengefasst werden. Dabei wurde natürlich auf die Invertierbarkeit von $W(t_0)$ zurückgegriffen, und es folgt, dass das Gleichungssystem stets eindeutig lösbar ist (was für den Spezialfall $N = 1$ bereits in Abschnitt 1.2 behauptet wurde, aber dort noch nicht so leicht begründet werden konnte). Insgesamt erhält man für die eindeutige Lösung u des AWP's $Pu \equiv 0$ auf I , $u^{[m-1]}(t_0) = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$ die Formel

$$u^{[m-1]}(t) = W(t)W(t_0)^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in I. \quad (3.3)$$

(5) Wronski-Matrizen W zu $Pu \equiv 0$ auf I sind charakterisiert durch die Matrix-DGL

$$W' = AW \quad \text{auf } I$$

mit der t -abhängigen Matrix

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_N & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_N & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbb{I}_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbb{I}_N \\ -A_0(t) & -A_1(t) & -A_2(t) & \dots & -A_{m-2}(t) & -A_{m-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{L \times L},$$

die neben $(N \times N)$ -Einheitsblöcken \mathbb{I}_N die Koeffizienten A_k von P enthält. Diese Charakterisierung folgt direkt aus der Beobachtung, dass die Spalten von W das aus $Pu \equiv 0$ durch Reduktion auf Ordnung 1 entstehende System $U' = AU$ auf I (für \mathbb{K}^L -wertiges U) lösen.

Auch die Wronski-Determinante genügt einer DGL, nämlich der skalaren Gleichung

$$(\det W)' = -(\text{Spur } A_{m-1}) \det W \quad \text{auf } I,$$

und kann daher zu $\det W(t) = C \exp(-\int (\text{Spur } A_{m-1}(t)) dt)$ mit $C \in \mathbb{K}$ bestimmt werden. Um die Gültigkeit der DGL einzusehen sind die Regel $(\partial_\Gamma \det)(\mathbb{I}_L) = \text{Spur } \Gamma$, $\Gamma \in \mathbb{K}^{L \times L}$ für Richtungsableitungen der Determinante in der Einheitsmatrix und die daraus folgende Beobachtung $\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \det(\Phi(s)) = (\partial_{\Phi'(0)} \det)(\Phi(0)) = \text{Spur}(\Phi'(0))$ für $\mathbb{K}^{L \times L}$ -wertiges Φ mit $\Phi(0) = \mathbb{I}_L$ nützlich. Zusammen mit weiteren Rechenregeln für Determinanten, der DGL $W' = AW$ und schließlich der Invarianz der Spur unter Ähnlichkeitstransformation verifiziert man dann

$$\begin{aligned} (\det W)'(t) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \det W(t+s) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \det(W(t)^{-1}W(t+s)) \det W(t) \\ &= \text{Spur} \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} W(t)^{-1}W(t+s) \right) \det W(t) = \text{Spur}(W(t)^{-1}W'(t)) \det W(t) \\ &= \text{Spur}(W(t)^{-1}A(t)W(t)) \det W(t) = (\text{Spur } A(t)) \det W(t) = -(\text{Spur } A_{m-1}(t)) \det W(t), \end{aligned}$$

zunächst nur wo $W(t)$ invertierbar. Im Nachhinein gilt die DGL aber aus Stetigkeitsgründen allgemein auf ganz I .

- (6) Mit Hilfe einer Fundamentalmatrix W des homogenen Systems $Pu \equiv 0$ auf I lassen sich **Lösungsformeln für das inhomogene System** $Pu = b$ angeben, die einerseits die Formeln aus Satz 1.1 für den skalaren Erster-Ordnung-Fall, andererseits auch (3.2) und (3.3) verallgemeinern: Die allgemeine Lösung zu $Pu = b$ auf I ist gegeben durch

$$u^{[m-1]}(t) = W(t) \left[\int W(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} dt + C \right] \quad \text{für } t \in I \quad (3.4)$$

mit Konstante $C \in \mathbb{K}^L$ und mit $L-N = (m-1)N$ Null-Einträgen im Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^L$, und die Lösung des AWP's $Pu = b$ auf I , $u^{[m-1]}(t_0) = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$ mit $t_0 \in I$, $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{K}^N$ ist gegeben durch

$$u^{[m-1]}(t) = W(t) \left[\int_{t_0}^t W(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b(s) \end{pmatrix} ds + W(t_0)^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix} \right] \quad \text{für } t \in I. \quad (3.5)$$

Zum Nachweis dieser Formeln bleibt wegen Teil (III) von Satz 3.1 und der vorausgehenden Diskussion homogener Systeme nur nachzurechnen, dass $U_{\text{sp}}(t) = W(t) \int W(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} dt$ eine spezielle Lösung des auf Ordnung 1 reduzierten inhomogenen Systems $U' = AU + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ gibt. Letzteres gelingt problemlos mit der Produktregel, dem HDI und der DGL aus (5).

Für konkrete Lösungsberechnungen bei Systemen sind die Formeln (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) aber weniger nützlich, als es zunächst scheinen mag; denn zum einen muss das homogene System bereits gelöst haben, um eine Fundamentalmatrix W zu kennen, und zum anderen verursacht das Invertieren von W oft einen nicht unerheblichen Aufwand.

Im späteren Abschnitt 3.3 wird noch etwas mehr zur Lösung inhomogener Systeme gesagt.

- (7) Alles Obige kann auf möglicherweise ∞ -dimensionale Banachräume \mathcal{X} verallgemeinert werden, wenn man in geeigneter Weise mit $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -wertigen Funktionen W arbeitet.

3.2 Matrix-Exponentialansatz bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten

Um die Theorie des vorausgehenden Abschnitts bei der Berechnung von Lösungen konkreter linearer GDGen anwenden zu können, muss man zunächst ein Fundamentalsystem beziehungsweise eine Fundamentalmatrix (der zugehörigen homogenen Gleichung) bestimmen. Bei *skalaren* linearen GDGen mit konstanten Koeffizienten lassen sich hierzu die Methoden des Abschnitts 1.2 verwenden, im Folgenden sollen aber auch homogene lineare Erster-Ordnung-Systeme in expliziter Form

$$u' = Au \quad \text{auf } I \quad (3.6)$$

mit konstanter $(N \times N)$ -Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ (also N Komponentengleichungen für N Komponentenfunktionen von u) behandelt werden. Homogene lineare Höherer-Ordnung-Systeme mit konstanten Koeffizienten lassen sich dann durch Reduktion auf Ordnung 1 darauf zurückführen und werden deshalb nicht mehr eigens betrachtet.

Wie in Abschnitt 1.2 bietet sich auch bei (3.6) ein Ansatz mit Exponentialfunktionen an, und tatsächlich liefert der **Exponentialansatz**

$$u(t) = e^{\lambda t} v$$

mit $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in \mathbb{K}^N$ **genau dann eine nicht-triviale Lösung** von (3.6) auf I , **wenn v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ ist**. Aus solchen Eigenwert-Eigenvektor-Lösungen lässt sich zwar noch nicht allgemein ein Fundamentalsystem zusammensetzen (denn über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ muss es nicht einmal einen Eigenwert geben und über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gibt es zwar ‚genug‘ Eigenwerte, aber die Summe der Dimensionen der Eigenräume kann immer noch kleiner sein als die Dimension N des Lösungsraums), aber man kann die Idee dieses Ansatzes ähnlich wie in Abschnitt 1.2 ausbauen und dann ganz allgemein ein Fundamentalsystem erhalten. Statt hierauf genauer einzugehen, soll jetzt aber ein eleganterer Zugang betrachtet werden, der (zumindest vordergründig) direkt mit der Matrix A statt mit ihren Eigenwerten und -vektoren arbeitet. Die Grundidee hierbei ist, dass als Lösung der GDG $W' = AW$ für die Wronski-Matrix W heuristisch der kurze Ausdruck $W(t) = e^{tA}$ in Frage kommt. Um dies zu formalisieren, muss man ‚e hoch Matrix‘ aber erst einmal sinnvoll erklären, was in Analogie zur bekannten Exponentialreihe $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ für $z \in \mathbb{C}$ folgendermaßen geschehen kann:

Definition 3.8 (Exponentialabbildung von Matrizen). Für $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ sei

$$\exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \in \mathbb{K}^{N \times N}, \quad (3.7)$$

wobei $A^k = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ (mit k Faktoren A auf der rechten Seite) das k -fache Matrix-Produkt von A mit sich selbst bezeichnet und A^0 per Konvention für die $(N \times N)$ -Einheitsmatrix \mathbb{I}_N steht. Die Konvergenz der Reihe in (3.7) bezüglich der Operatornorm⁵ $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^{N \times N}$ ist dabei sichergestellt, weil die Abschätzung $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ auf die konvergente Majoranten-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$ führt. Tatsächlich liegt aber auch eintragsweise sowie bezüglich jeder anderen Norm auf $\mathbb{K}^{N \times N}$ Konvergenz vor (denn alle Normen auf einem endlich-dimensionalen Raum wie $\mathbb{K}^{N \times N}$ sind bekanntlich äquivalent).

⁵Es sei daran erinnert, dass die Operatornorm $\|\Gamma\|$ einer Matrix $\Gamma \in \mathbb{K}^{N \times N}$ die kleinste Schranke $M \in [0, \infty)$ mit $|\Gamma v| \leq M|v|$ für alle Vektoren $v \in \mathbb{K}^N$ ist.

Bemerkungen (zu Grundeigenschaften der Matrix-Exponentialabbildung).

- (1) **Für eine** vom Grad $\ell \in \mathbb{N}$ **nilpotente Matrix** $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ (d.h. im Fall $A^\ell = 0 \neq A^{\ell-1}$) **vereinfacht sich die Exponentialreihe zur endlichen Summe**

$$e^A = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1}{k!} A^k$$

und kann (für nicht zu großes ℓ und N) problemlos berechnet werden.

- (2) Für **Diagonalmatrizen** mit Einträgen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}, \lambda_N \in \mathbb{K}$ gilt die Regel

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_N} \end{pmatrix},$$

insbesondere ist $e^{\lambda \mathbb{I}_N} = e^\lambda \mathbb{I}_N$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $e^{0_N} = \mathbb{I}_N$ für die $(N \times N)$ -Nullmatrix 0_N .

- (3) Allgemeiner gilt für **Dreiecks(block)matrizen**

$$\exp \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * & * \\ 0 & A_2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{\ell-1} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{A_1} & * & \dots & * & * \\ 0 & e^{A_2} & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{A_{\ell-1}} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{A_\ell} \end{pmatrix},$$

wobei $A_1, A_2, \dots, A_{\ell-1}, A_\ell$ sowohl einzelne Zahlen $\in \mathbb{K}$ als auch quadratische Blöcke (eventuell unterschiedlicher Größe) sein können und die Sterne für weitere, nicht spezifizierte Zahlen oder Blöcke stehen.

- (4) Die Exponentialabbildung ist **mit komplexer Konjugation, Transposition und Ähnlichkeitstransformation** (letztere entspricht einem Basiswechsel und wird auch innere Konjugation genannt) **vertauschbar**, d.h. für $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ gelten

$$\overline{e^A} = e^{\overline{A}}, \quad (e^A)^t = e^{(A^t)} \quad \text{und} \quad e^{TAT^{-1}} = Te^AT^{-1} \quad \text{für invertierbares } T \in \mathbb{K}^{N \times N}.$$

Als gemeinsame Erklärung für diese Regeln kann man die allgemeinere Vertauschbarkeitsregel $\Phi(e^A) = e^{\Phi(A)}$ für Algebren(anti)endomorphismen $\Phi: \mathbb{K}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{K}^{N \times N}$ heranziehen.

- (5) Ist $D \in \mathbb{K}^{N \times N}$ **diagonalisierbar** mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}, \lambda_N \in \mathbb{K}$, also

$$D = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} T^{-1}$$

für invertierbares $T \in \mathbb{K}^{N \times N}$, so folgt aus (2) und (4) die Regel

$$e^D = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_N} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Symmetrische Matrizen über \mathbb{R} und normale Matrizen über \mathbb{C} sind stets diagonalisierbar und können daher mit dieser Regel behandelt werden (wofür es aber zunächst gilt, die Diagonaltransformation, also die Eigenwerte und -vektoren auszurechnen).

(6) Für $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt die **Ableitungsregel**

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = e^{tA} A = A e^{tA}.$$

(7) **Für kommutierende Matrizen** $A, B \in \mathbb{K}^{N \times N}$ (also solche mit $AB = BA$) **gilt das Exponentialgesetz**

$$e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A.$$

Insbesondere ist e^A für jedes $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ invertierbar mit inverser Matrix

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Beweise. Die Regeln (1)–(4) sind direkte Folgerungen aus Definition 3.8, Regel (5) wurde bereits erläutert, und die Beweise der Regeln (6) und (7) sind Thema der Übungen. \square

Der für die Anwendung auf das GDG-System (3.6) wichtigste Sachverhalt zur Matrix-Exponentialabbildung folgt:

Satz 3.9 (Lösung von $u' = Au$ mit konstantem A durch Matrix-Exponentialansatz).
Für jedes $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ ist durch

$$W(t) = e^{tA}$$

die *Fundamentalmatrix W des homogenen linearen Erster-Ordnung-GDG-Systems*

$$u' = Au \quad \text{auf } \mathbb{R} \tag{3.8}$$

mit $W(0) = \mathbb{I}_N$ gegeben, und für die eindeutige Lösung u des AWP zu (3.8) mit $u(t_0) = y_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{K}^N$ erhält man die Formel

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Gemäß der vorausgehenden Bemerkung (6) gilt $W'(t) = A e^{tA} = A W(t)$, also erfüllt W die DGL einer Wronski-Matrix zu (3.8). Nach Bemerkung (7) ist $W(t)$ außerdem für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar, also ist W gemäß Abschnitt 3.1 Fundamentalmatrix zu (3.8). Insbesondere ist damit $u(t) = W(t) e^{-t_0 A} y_0 = e^{(t-t_0)A} y_0$ Lösung von (3.8), die die Anfangsbedingung erfüllt und deren Eindeutigkeit bereits aus Hauptsatz 3.2 bekannt ist. \square

Von der theoretischen Seite sind GDG-Systeme des Typs (3.8) mit Satz 3.9 vollständig abgehandelt, zu konkreten Rechenverfahren gibt es aber noch eine ganze Menge zu sagen:

Weitere Bemerkungen (zur **Berechnung von e^{tA} und anderen FMen über \mathbb{C}**). Die praktische Bestimmung von Lösungen beziehungsweise Fundamentalmatrizen zu (3.8) erfordert (in den allermeisten Fällen) etwas lineare Algebra, nämlich zunächst die Berechnung der verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$ von A und ihrer Vielfachheiten. Je nach Ergebnis bieten sich dann unterschiedliche Möglichkeiten für das weitere Vorgehen an:

(8) Ist für $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ und jeden Eigenwert $\lambda_i \in \mathbb{C}$ von A die Dimension des zugehörigen Eigenraums $E_{\lambda_i}(A)$ gleich der algebraischen Vielfachheit d_i von λ_i als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A , so ist man **im diagonalisierbaren Fall** und die Berechnung von e^{tA} gelingt im Prinzip mit obiger Bemerkung (5). Genauer kann man eine Basis

von \mathbb{C}^N aus Eigenvektoren $v_1, v_2, \dots, v_{d_1} \in E_{\lambda_1}(A)$, $v_{d_1+1}, v_{d_1+2}, \dots, v_{d_1+d_2} \in E_{\lambda_2}(A)$, \dots , $v_{N-d_\ell+1}, v_{N-d_\ell+2}, \dots, v_N \in E_{\lambda_\ell}(A)$ finden, und es gilt

$$e^{tA} = T \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} \mathbb{I}_{d_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \mathbb{I}_{d_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_{\ell-1}} \mathbb{I}_{d_{\ell-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{t\lambda_\ell} \mathbb{I}_{d_\ell} \end{pmatrix} T^{-1} \quad \text{mit } T = \left(v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_N \right).$$

Möchte man nicht unbedingt e^{tA} , sondern nur ein beliebiges Fundamentalsystem oder eine beliebige Fundamentalmatrix berechnen, so kann man allerdings den Rechenaufwand zur Berechnung der Inversen T^{-1} vermeiden, denn im diagonalisierbaren Fall bilden die zu Beginn des Abschnitts erwähnten Eigenwert-Eigenvektor-Lösungen $e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_1 t} v_2, \dots, e^{\lambda_1 t} v_{d_1}$, $e^{\lambda_2 t} v_{d_1+1}, e^{\lambda_2 t} v_{d_1+2}, \dots, e^{\lambda_2 t} v_{d_1+d_2}, \dots, e^{\lambda_\ell t} v_{N-d_\ell+1}, e^{\lambda_\ell t} v_{N-d_\ell+2}, \dots, e^{\lambda_\ell t} v_N$ bereits ein Fundamentalsystem mit zugehöriger Fundamentalmatrix

$$e^{tA} T = \left(e^{\lambda_1 t} v_1 \mid e^{\lambda_1 t} v_2 \mid \dots \mid e^{\lambda_\ell t} v_N \right).$$

- (9) Ein **allgemeiner Zugang** zur Berechnung von e^{tA} für beliebiges, möglicherweise nicht diagonalisierbares $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ beruht auf der sogenannten **Diagonalisierbar-plus-Nilpotent-Zerlegung**: Man kann stets $A = D + R$ mit *kommutierenden* (!) Matrizen $D, R \in \mathbb{C}^{N \times N}$ schreiben, so dass D diagonalisierbar und R nilpotent ist. Nach Bemerkung (7) erhält man dann $e^{tA} = e^{tR} e^{tD}$, wobei e^{tR} und e^{tD} gemäß (1) und (8) berechnet werden können. Wie in (8) erfordert die Berechnung von e^{tA} selbst das Aufstellen und Invertieren einer (jetzt zu D gehörigen) Transformationsmatrix T , möchte man allerdings nur eine beliebige Fundamentalmatrix ermitteln, so kann man sich das Invertieren von T wieder ersparen, indem man $e^{tA} T$ statt e^{tA} berechnet.

In der Rechenpraxis ist die Verwendung der Diagonalisierbar-plus-Nilpotent-Zerlegung **sehr empfehlenswert**, wenn man die Summanden D und R leicht sehen oder raten kann. Insbesondere ist dies immer dann der Fall, **wenn man feststellt, dass es nur einen einzigen Eigenwert λ_1 gibt**, der notwendigerweise algebraische Vielfachheit N hat; dann funktioniert die Zerlegung nämlich mit den (offensichtlich kommutierenden) Matrizen $D = \lambda_1 \mathbb{I}_N$, $e^{tD} = e^{t\lambda_1} \mathbb{I}_N$ und $R = A - \lambda_1 \mathbb{I}_N$.

Allgemein gelingen ein Beweis für die Möglichkeit der Zerlegung und auch ihre Berechnung mit denselben Methoden, die auch bei der Herstellung der eng verwandten Jordanschen Normalform eine Rolle spielen: Die diagonalisierbare Matrix D ist bestimmt durch die Festlegung $Dv = \lambda_i v$ für jeden Vektor v im Hauptraum $H_{\lambda_i}(A)$ zu einem Eigenwert λ_i von A , und die nilpotente Matrix R ergibt sich dann einfach als $R = A - D$.

- (10) Ein **alternativer allgemeiner Zugang** verwendet direkt die (eher zum Standard-Kanon der linearen Algebra gehörende) **Jordansche Normalform**. Man benutzt hierbei für einen Jordan-Block

$$J_{\alpha,d} := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{d \times d}$$

der Größe $d \in \mathbb{N}$ mit Eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$ die Regel

$$e^{tJ_{\alpha,d}} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{(d-1)!}t^{d-1} \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \dots & \dots & \frac{1}{(d-2)!}t^{d-2} \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \dots & \frac{1}{(d-3)!}t^{d-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{d \times d}. \quad (3.9)$$

Begründung für (3.9). Mit Induktion verifiziert man, dass $(J_{\alpha,d})^k \in \mathbb{C}^{d \times d}$ die obere Dreiecksmatrix ist, auf deren i -ter oberer Nebendiagonale lauter gleiche Einträge $\binom{k}{i}\alpha^{k-i}$ mit Binomialkoeffizienten $\binom{k}{i}$ (per Konvention =0 für $i > k$) stehen. Gemäß Exponentialreihe ist dann $e^{tJ_{\alpha,d}}$ die obere Dreiecksmatrix, auf deren i -ter oberer Nebendiagonale sich lauter gleiche Einträge $\sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \binom{k}{i} \alpha^{k-i} = \frac{1}{i!} t^i \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{(k-i)!} (\alpha t)^{k-i} = \frac{1}{i!} t^i e^{\alpha t}$ befinden. \square

Für beliebiges $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ lässt sich nun wie in der linearen Algebra eine Transformationsmatrix $T \in \mathbb{C}^{N \times N}$ bestimmen, deren Spalten geeignete Basen aller Haupträume von A enthalten und durch die A auf die als Jordansche Normalform bekannte Block-Diagonalform mit Jordan-Blöcken auf der Diagonalen gebracht werden kann. Konkret bedeutet dies

$$A = T \begin{pmatrix} J_{\alpha_1, d_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{\alpha_2, d_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\alpha_{h-1}, d_{h-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{\alpha_h, d_h} \end{pmatrix} T^{-1}$$

mit $h \in \mathbb{N}$, den (jetzt nicht unbedingt verschiedenen) Eigenwerten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h-1}, \alpha_h \in \mathbb{C}$ von A und Blockgrößen $d_1, d_2, \dots, d_{h-1}, d_h \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^h d_i = N$. Mit (5) folgt

$$e^{tA} = T \begin{pmatrix} e^{tJ_{\alpha_1, d_1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_{\alpha_2, d_2}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{tJ_{\alpha_{h-1}, d_{h-1}}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{tJ_{\alpha_h, d_h}} \end{pmatrix} T^{-1}, \quad (3.10)$$

wobei die Blöcke auf der rechten Seite durch (3.9) gegeben sind. Auch hier ist die Fundamentalmatrix $e^{tA}T$ im Allgemeinen leichter zu berechnen als e^{tA} selbst.

Beispiel (für eine **Anwendung der Diagonalisierbar-plus-Nilpotent-Zerlegung**). Beim GDG-System

$$u' = Au \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist 2 der einzige Eigenwert von A . Gemäß Bemerkung (9) arbeitet man daher mit der Zerlegung der Koeffizientenmatrix $A = 2\mathbb{I}_3 + R$ in die Diagonalmatrix $2\mathbb{I}_3$ und die nilpotente Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei der Berechnung der Potenzen von R stellt man fest, dass schon R^2 verschwindet, also R vom Grad 2 nilpotent ist. Somit erhält man die Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = e^{2t\mathbb{I}_3} e^{tR} = e^{2t\mathbb{I}_3} (\mathbb{I}_3 + tR) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & -3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und die Funktionen

$$\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3te^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

bilden ein Fundamentalsystem.

Beispiel (für eine **Berechnung von e^{tA} mittels der Jordanschen Normalform**). Beim GDG-System

$$u' = Au \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -25 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -28 & 9 \end{pmatrix}$$

bestimmt man das charakteristische Polynom der Block-Dreiecksmatrix A zu

$$(\lambda-2)^2[(\lambda+6)(\lambda-9) + 28 \cdot 2] = (\lambda-2)^2[\lambda^2 - 3\lambda + 2] = (\lambda-2)^3(\lambda-1),$$

somit treten der dreifache Eigenwert 2 und der einfache Eigenwert 1 auf. Als Eigenraum und Hauptraum zum Eigenwert 2 (über \mathbb{C}) berechnet man

$$\begin{aligned} E_2(A) &= \text{Kern}(2\mathbb{I}_4 - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & -7 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 28 & -7 \end{pmatrix} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ H_2(A) &= \text{Kern}(2\mathbb{I}_4 - A)^2 = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 28 & -7 \end{pmatrix} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zur Herstellung der Jordanschen Normalform verwendet man nun eine Basis von $H_2(A)$, deren erster Vektor in $E_2(A)$ liegt und deren zweiter Vektor in $E_2(A)$ das $(A - 2\mathbb{I}_4)$ -Bild des dritten Vektors aus $H_2(A) \setminus E_2(A)$ ist. Wegen $(A - 2\mathbb{I}_4) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine solche Basis durch die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegeben. Einen vierten Basisvektor erhält man durch Berechnung des 1-dimensionalen Eigen- und Hauptraums zum Eigenwert 1

$$E_1(A) = H_1(A) = \text{Kern}(\mathbb{I}_4 - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 25 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 28 & -8 \end{pmatrix} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix},$$

und insgesamt bekommt man die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix leistet die Transformation

$$A = T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

und mit den Regeln (3.9), (3.10) und zwei Matrix-Multiplikationen berechnet man nun

$$e^{tA} = T \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & (-4-21t)e^{2t} + 4e^t & (1+6t)e^{2t} - e^t \\ 0 & 0 & -7e^{2t} + 8e^t & 2e^{2t} - 2e^t \\ 0 & 0 & -28e^{2t} + 28e^t & 8e^{2t} - 7e^t \end{pmatrix}.$$

Geht es nur um die Bestimmung einer beliebigen Fundamentalmatrix W des GDG-Systems, nicht um die spezielle Matrix e^{tA} , so erhält man mit weniger Rechenaufwand (nämlich ohne explizite Berechnung von T^{-1})

$$W(t) = e^{tA}T = T \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3e^{2t} & 3te^{2t} & e^t \\ 0 & 0 & e^{2t} & 2e^t \\ 0 & 0 & 4e^{2t} & 7e^t \end{pmatrix},$$

und natürlich bilden die Spalten von W ein Fundamentalsystem.

Weitere Bemerkungen (zur Berechnung reeller Fundamentalsysteme und -matrizen).

Bei reeller Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ macht auch die Frage nach der Berechnung reeller Lösungen, Fundamentalsysteme und -matrizen zu

$$u' = Au \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

Sinn. Man kann allerdings nicht hoffen, die zuvor diskutierten Rechenverfahren immer analog über \mathbb{R} statt \mathbb{C} durchführen zu können, denn die Eigenwerte und -vektoren von $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ müssen nicht notwendigerweise reell sein. Vielmehr muss man in Fällen mit nicht-reellen Eigenwerten nach wie vor über \mathbb{C} rechnen und am Ende der Rechnung eventuell und wie im Folgenden erläutert vom komplexen zu einem reellen Ergebnis übergehen:

- (11) Ohne solch einen Übergang am Ende lässt sich allerdings noch die **Berechnung der reellen Fundamentalmatrix** e^{tA} mit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ durchführen, denn, auch wenn eine Rechnung mit komplexen Eigenwerten und -vektoren erforderlich wird, so ist das korrekte Endergebnis automatisch reell; das ergibt sich aus der Definition über die Exponentialreihe und auch aus der Vertauschbarkeit der Exponentialabbildung mit komplexer Konjugation.

- (12) Bei der **Berechnung anderer reeller Fundamentalsysteme und -matrizen** wie e^{tAT} können dagegen nach einer Rechnung über \mathbb{C} noch weitere Überlegungen erforderlich werden. Nützlich ist hierzu zunächst die Beobachtung, dass **nicht-reelle Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ stets in zueinander konjugierten Paaren $(\lambda, \bar{\lambda})$ mit zueinander konjugierten Eigen- und Haupträumen $E_{\bar{\lambda}}(A) = \overline{E_{\lambda}(A)}$, $H_{\bar{\lambda}}(A) = \overline{H_{\lambda}(A)}$ auftreten** (dies folgt direkt aus der Beobachtung $(\lambda \mathbb{I}_N - A)^k v = 0 \iff (\bar{\lambda} \mathbb{I}_N - A)^k \bar{v} = 0$). Behandelt man bei der Berechnung komplexer Fundamentalsysteme u_1, u_2, \dots, u_N (beziehungsweise der Matrix e^{tAT}) gemäß (8), (9), (10) nun λ und $\bar{\lambda}$ völlig analog, so erreicht man problemlos, dass mit einer Funktion u_i stets auch die konjugierte Funktion \bar{u}_i im Fundamentalsystem auftritt (beziehungsweise, dass e^{tAT} mit einer Spalte auch die konjugierte Spalte enthält). Nach eventuellem Umsortieren der Funktionen (beziehungsweise Spalten) bedeutet dies $u_{2i} = \overline{u_{2i-1}}$ für $i = 1, 2, \dots, \ell$, während u_i für die restlichen Indizes $i = 2\ell+1, 2\ell+2, \dots, N$ sowieso reell ist. Es liegt somit ein **komplexes Fundamentalsystem** (beziehungsweise eine komplexe Fundamentalmatrix mit den Spalten)

$$u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2, \dots, u_{2\ell-1}, \bar{u}_{2\ell-1}, \underbrace{u_{2\ell+1}, u_{2\ell+2}, u_N}_{\text{reell}}$$

vor, und **daraus ergibt sich durch Real- und Imaginärteilbildung ein reelles Fundamentalsystem** (beziehungsweise eine reelle Fundamentalmatrix mit den Spalten)

$$\text{Re } u_1, \text{Im } u_1, \text{Re } u_2, \text{Im } u_2, \dots, \text{Re } u_{2\ell-1}, \text{Im } u_{2\ell-1}, u_{2\ell+1}, u_{2\ell+2}, \dots, u_N.$$

Zur Erklärung dieses Sachverhalts reicht es, bei den allgemeinen Lösungen gemäß Teil (IV) von Satz 3.1 zu den Realteilen überzugehen: Die allgemeine komplexe Lösung kann mit obigem Fundamentalsystem als $\sum_{i=1}^{\ell} [C_{2i-1} u_{2i-1} + C_{2i} \bar{u}_{2i-1}] + \sum_{i=2\ell+1}^N C_i u_i$ mit Konstanten $C_1, C_2, \dots, C_N \in \mathbb{C}$ geschrieben werden, und durch Realteilbildung erhält man die allgemeine reelle Lösung $\sum_{i=1}^{\ell} [\tilde{C}_{2i-1} \text{Re } u_{2i-1} - \tilde{C}_{2i} \text{Im } u_{2i-1}] + \sum_{i=2\ell+1}^N \tilde{C}_i u_i$ mit neuen Konstanten $\tilde{C}_{2i-1} = \text{Re } C_{2i-1} + \text{Re } C_{2i}$ und $\tilde{C}_{2i} = \text{Im } C_{2i-1} - \text{Im } C_{2i}$ für $i = 1, 2, \dots, \ell$ sowie $\tilde{C}_i = \text{Re } C_i$ für $i = 2\ell+1, 2\ell+2, \dots, N$. Somit bilden die zuvor angegebenen Funktionen ein reelles Fundamentalsystem.

Als Folgerung aus den Resultaten und Rechenverfahren dieses Abschnitts ergibt sich auch folgende Zusammenstellung von Aussagen über Fundamentalsysteme:

Korollar 3.10 (Struktur von Fundamentalsystemen zu $u' = Au$). Gegeben sei ein homogenes lineares GDG-System

$$u' = Au \quad \text{auf } \mathbb{R} \quad (3.11)$$

mit konstanter Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$.

- (I) Im **komplexen Fall** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gibt es ein komplexes Fundamentalsystem zu (3.11) von folgender Struktur: Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A der algebraischen Vielfachheit d gehen insgesamt d Funktionen ins FS ein, und ihre Komponentenfunktionen sind \mathbb{C} -Linearkombinationen von

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{\ell-1} e^{\lambda t}.$$

- (II) *Im reellen Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gibt es ein reelles Fundamentalsystem zu (3.11) von folgender Struktur: Für jeden reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A der algebraischen Vielfachheit d gehen insgesamt d Funktionen ins FS ein, und ihre Komponentenfunktionen sind \mathbb{R} -Linearkombinationen von

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \dots, t^{\ell-1}e^{\lambda t}.$$

Nicht-reelle Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ treten in zueinander konjugierten Paaren $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ der gleichen algebraischen Vielfachheit d auf. Für jedes solche Paar gehen insgesamt $2d$ Funktionen ins FS ein, und mit den Bezeichnungen $\mu := \operatorname{Re} \lambda$, $\nu := \operatorname{Im} \lambda$ sind ihre Komponentenfunktionen \mathbb{R} -Linearkombinationen von

$$\begin{aligned} &e^{\mu t} \cos(\nu t), te^{\mu t} \cos(\nu t), t^2e^{\mu t} \cos(\nu t), \dots, t^{\ell-1}e^{\mu t} \cos(\nu t), \\ &e^{\mu t} \sin(\nu t), te^{\mu t} \sin(\nu t), t^2e^{\mu t} \sin(\nu t), \dots, t^{\ell-1}e^{\mu t} \sin(\nu t). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\ell \in \{1, 2, \dots, d\}$ die Größe des größten Jordan-Blocks zu λ in der Jordan-Normalform von A und damit den Nilpotenzgrad von $(\lambda \mathbb{I}_N - A)$ auf $H_\lambda(A)$. Speziell gilt $\ell=1$ im Fall $H_\lambda(A) = E_\lambda(A)$ und somit stets im diagonalisierbaren Fall.

Beweis. Teil (I) ergibt sich direkt aus den Formeln (3.9) und (3.9) zur Berechnung der Fundamentalmatrix e^{tA} . Teil (II) folgt daraus gemäß Bemerkung (12), denn Real- und Imaginärteildarstellung bei $e^{\lambda t} = e^{(\mu + i\nu)t} = e^{\mu t} e^{i\nu t}$ ergibt $e^{\mu t} \cos(\nu t)$ und $e^{\mu t} \sin(\nu t)$. \square

Bemerkung (zum Zusammenhang mit skalaren linearen GDGen m -ter Ordnung). Die in Abschnitt 1.2 beschriebene Theorie kann als Spezialfall der allgemeineren Resultate dieses Kapitels erklärt werden. Reduktion auf Ordnung 1 überführt nämlich die in 1.2 betrachtete skalare Gleichung (ohne Einschränkung mit Leitkoeffizient 1)

$$u^{(m)} + a_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + a_2u'' + a_1u' + a_0u \equiv 0 \quad (3.12)$$

in ein System $U' = AU$ für \mathbb{R}^m -wertiges U (das dem $(m-1)$ -Jet $u^{[m-1]}$ entspricht). Die (bei konstanten a_k ebenfalls konstante) Koeffizientenmatrix A hat dabei die Form

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times m},$$

und als ihr charakteristisches Polynom erhält man durch Entwicklung nach der letzten Zeile $\det(\lambda \mathbb{I}_m - A) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. Dieses Polynom stimmt also mit dem in 1.2 definierten charakteristischen Polynom der Gleichung (3.12) überein, und die Eigenwerte von A sind genau die in 1.2 betrachteten Nullstellen. Die in Teil (I) des vorigen Korollars beschriebenen komplexen Lösungen sind folglich dieselben wie die des Satzes 1.2, und aus Teil (II) des Korollars erhält man nun auch reelle Analoga.

Eine Besonderheit des skalaren Falls besteht übrigens darin, dass in obigem Korollar stets der Fall $\ell = d$ eintritt, das heißt, es treten immer Potenzfunktionen bis hin zu t^{d-1} (mit der Vielfachheit d der Nullstelle λ) auf. Dies wurde mit Satz 1.2 bereits gezeigt, aber nun lässt es sich auch abstrakt begründen — und dies sogar auf zwei Weisen: Zum einen ist $\ell \leq d$ nach dem Korollar, und $\ell < d$ ist ausgeschlossen, da man sonst zu wenige Funktionen für ein Fundamentalsystem erhielte. Zum anderen sind die ersten $(m-1)$ Zeilen von $(\lambda \mathbb{I}_m - A)$ linear unabhängig; somit ist der Eigenraum $E_\lambda(A)$ nur 1-dimensional, zu λ gehört nur ein einziger Jordan-Block der maximalen Größe d , und damit folgt (erneut) $\ell = d$ im Korollar.

3.3 Inhomogene lineare Gleichungen und Systeme

In diesem Abschnitt geht es um inhomogene lineare GDG-Systeme (für \mathbb{K}^N -wertiges u)

$$Pu := u^{(m)} + A_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + A_2u'' + A_1u' + A_0u = b \quad \text{auf } I$$

mit $m \in \mathbb{N}$, einem Intervall I positiver Länge, Koeffizientenfunktionen $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1} \in C^0(I, \mathbb{K}^{N \times N})$ und — das ist hier das Entscheidende — mit Inhomogenität $b \in C^0(I, \mathbb{K}^N)$. Zur Lösung solcher Systeme geht man typischerweise in zwei Schritten vor. Der erste Schritt besteht in der Berechnung der allgemeinen Lösung (beziehungsweise eines Fundamentalsystems) des zugehörigen homogenen Systems $Pu \equiv 0$ mit rechter Seite Null statt b . Bei konstanten Koeffizientenfunktionen $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ wurden allgemeine Methoden hierfür im vorausgehenden Abschnitt 3.2 behandelt. Bei nicht-konstanten Koeffizienten gibt es keine ähnlich guten Verfahren, und man kann nur in glücklichen Fällen explizite Lösungen berechnen. Ist das homogene System jedenfalls gelöst, so kann man sich in einem zweiten Schritt der Lösung des inhomogenen Systems $Pu = b$ zuwenden, und Methoden für diesen zweiten Schritt sind das Thema dieses Abschnitts. Dafür ist es dann wieder unerheblich, ob die Koeffizienten konstant sind oder nicht, und tatsächlich wurde in Abschnitt 3.1 mit den Lösungsformeln der Bemerkung (6) schon eine Möglichkeit zur Durchführung des zweiten Schritts bereitgestellt. Statt mit diesen Lösungsformeln kann man die im Prinzip völlig analoge Rechnung aber auch unter folgendem etwas anderen Blickwinkel angehen:

Satz 3.11 (über die **Variation der Konstanten**). *Seien $m, N \in \mathbb{N}$, $L := mN$, P wie oben, und u_1, u_2, \dots, u_L ein (bereits bekanntes) Fundamentalsystem des homogenen linearen GDG-Systems $Pu \equiv 0$ auf I . Dann ist jede Lösung u des inhomogenen GDG-Systems $Pu = b$ auf I von der Form*

$$u(t) = C_1(t)u_1(t) + C_2(t)u_2(t) + \dots + C_L(t)u_L(t) \quad \text{für } t \in I \quad (3.13)$$

mit differenzierbaren Funktionen $C_1, C_2, \dots, C_L: I \rightarrow \mathbb{K}$, und die Ableitungen C'_1, C'_2, \dots, C'_L können aus dem linearen Gleichungssystem (mit m Gleichungen in \mathbb{K}^N , also insgesamt L Gleichungen)

$$\begin{aligned} C'_1 u_1^{(k)} + C'_2 u_2^{(k)} + \dots + C'_L u_L^{(k)} &\equiv 0 \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, m-2, \\ C'_1 u_1^{(m-1)} + C'_2 u_2^{(m-1)} + \dots + C'_L u_L^{(m-1)} &= b. \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt werden.

Beweis. Gemäß Korollar 3.6 bildet $u_1^{[m-1]}(t), u_2^{[m-1]}(t), \dots, u_L^{[m-1]}(t)$ für jedes $t \in I$ eine Basis von $(\mathbb{K}^N)^m = \mathbb{K}^L$, und daher bestimmt das Gleichungssystem des Satzes eindeutige Funktionen C'_1, C'_2, \dots, C'_L . Mit der Cramerschen Regel folgt die Stetigkeit dieser Funktionen, daher sind sie tatsächlich Ableitungen von Stammfunktionen C_1, C_2, \dots, C_L . Nun definiert man u durch (3.13) und schließt mit den ersten $(m-1)$ Gleichungen des Gleichungssystems iterativ auf $u^{(k)} = C_1 u_1^{(k)} + C_2 u_2^{(k)} + \dots + C_L u_L^{(k)}$ für $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ und mit der m -ten Gleichung schließlich auf $u^{(m)} = C_1 u_1^{(m)} + C_2 u_2^{(m)} + \dots + C_L u_L^{(m)} + b$. Mit diesen Beobachtungen und $Pu_1 = Pu_2 = \dots = Pu_L \equiv 0$ erhält man

$$Pu = C_1 Pu_1 + C_2 Pu_2 + \dots + C_L Pu_L + b = b \quad \text{auf } I,$$

also die Lösungseigenschaft von u . Da dieser Schluss auch bei Ersetzung von C_1, C_2, \dots, C_L durch $C_1 + K_1, C_2 + K_2, \dots, C_L + K_L$ mit anderen Integrationskonstanten $K_1, K_2, \dots, K_L \in \mathbb{K}$

richtig bleibt, ist eine Lösungsschar der Form $u + K_1 u_1 + K_2 u_2 + \dots + K_L u_L$ gefunden, und dies ist gemäß Teil (III) von Satz 3.1 schon die allgemeine Lösung. \square

Bemerkungen.

- (1) Die **variieren Konstanten sind** natürlich die **Funktionen** C_1, C_2, \dots, C_L ; sie nehmen nämlich den Platz ein, an dem bei der allgemeinen Lösung des *homogenen* Systems wirklich nur Konstanten stehen.
- (2) Mit dem Satz ergibt sich folgendes **Rechenverfahren zur Lösung des inhomogenen Systems** (bei bereits gelöstem homogenen System): Man bestimmt zuerst die Ableitungen C'_1, C'_2, \dots, C'_L durch Lösung des im Satz angegebenen linearen Gleichungssystems und danach die Stammfunktionen C_1, C_2, \dots, C_L durch Integrationen. Einsetzen in den Ansatz (3.13) ergibt dann die Lösung des inhomogenen Systems (je nach Behandlung der Integrationskonstanten als spezielle oder allgemeine Lösung; hierzu vergleiche mit dem Beweis).
- (3) Bei **Ordnung $m = 1$ erhält man** für C'_1, C'_2, \dots, C'_N das **einfachere Gleichungssystem** mit N (Komponenten-)Gleichungen $C'_1 u_1 + C'_2 u_2 + \dots + C'_N u_N = b$, und diese Formel muss man sich nicht einmal explizit merken. Sie ergibt sich nämlich automatisch, wenn man in $u' = -A_0 u + b$ den Ansatz (3.13) macht, mit der Produktregel ausdifferenziert und dann benutzt, dass sich alle Terme mit C_i wegen der Lösungseigenschaft $u'_i = -A_0 u_i$ wegheben.

Beispiel. Beim inhomogenen linearen GDG-System mit konstanten Koeffizienten

$$u' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2te^{2t} \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

liefert der Eigenwert-Eigenvektor-Ansatz (nach sehr kurzer Rechnung) das Fundamentalsystem

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad u_2(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

des zugehörigen homogenen GDG-Systems. Man setzt dann den Ansatz $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$ in das inhomogene System ein und kommt auf

$$\underline{C_1 u'_1 + C_2 u'_2} + C'_1 u_1 + C'_2 u_2 = C_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u_1 + C_2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u_2 + \begin{pmatrix} 2te^{2t} \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Wegen der Lösungseigenschaft von u_1 und u_2 heben sich die unterstrichenen Terme heraus, und durch Einsetzen der Formeln für u_1 und u_2 entsteht das (erwartete) lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^t C'_1 - 3e^{2t} C'_2 &= 2te^{2t}, \\ e^{2t} C'_2 &= 4e^{-2t}. \end{aligned}$$

Daraus erhält man nacheinander (mit reellen oder komplexen Integrationskonstanten K_1, K_2)

$$\begin{aligned} C'_2(t) &= 4e^{-4t}, & C'_1(t) &= 12e^{-3t} + 2te^t, \\ C_2(t) &= -e^{-4t} + K_2, & C_1(t) &= -4e^{-3t} + (2t-2)e^t + K_1, \end{aligned}$$

und als allgemeine Lösung des inhomogenen Systems bekommt man schließlich

$$u(t) = C_1(t)u_1(t) + C_2(t)u_2(t) = \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + K_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Manchmal kann man die Variation der Konstanten (beziehungsweise den Einsatz der äquivalenten Lösungsformel) vermeiden und mit weniger Rechenaufwand Lösungen erhalten, indem man einen auf die gegebene spezielle Inhomogenität zugeschnittenen Ansatz macht. Die wichtigste Regel für solche Ansätze folgt:

Satz 3.12 (über **inhomogene, skalare lineare GDGen mit konstanten Koeffizienten**).
Gegeben sei eine inhomogene, skalare lineare Gleichung

$$u^{(m)} + a_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + a_2u'' + a_1u' + a_0u = b \quad \text{auf } I \quad (3.14)$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{K}$ und zugehörigem charakteristischem Polynom

$$p(\lambda) := \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

Hat die Inhomogenität die spezielle Form

$$b(t) = t^\ell e^{\zeta t} \quad \text{für } t \in I$$

mit $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\zeta \in \mathbb{K}$, so besitzt (3.14) eine spezielle Lösung u_{sp} der Form

$$u_{\text{sp}}(t) = [c_\ell t^\ell + c_{\ell-1}t^{\ell-1} + \dots + c_1t + c_0]e^{\zeta t}, \quad \text{falls } \zeta \text{ keine Nullstelle von } p \text{ ist,}$$

und

$$u_{\text{sp}}(t) = [c_\ell t^\ell + c_{\ell-1}t^{\ell-1} + \dots + c_1t + c_0]t^d e^{\zeta t}, \quad \text{falls } \zeta \text{ eine } d\text{-fache Nullstelle von } p \text{ ist,}$$

jeweils mit Konstanten $c_0, c_1, \dots, c_{\ell-1}, c_\ell \in \mathbb{K}$ und im zweiten Fall mit Vielfachheit $d \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen.

- (1) Zu Satz 3.12 gehört folgendes naheliegende **Rechenverfahren** (bei Vorliegen der obigen Voraussetzungen): Man berechnet zuerst die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p und erhält gemäß dem früheren Satz 1.2 die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen GDG. Als Nächstes setzt man den jeweiligen Ansatz für u_{sp} in die inhomogene GDG (3.14) ein und bestimmt die Konstanten $c_0, c_1, \dots, c_{\ell-1}, c_\ell$ durch Koeffizientenvergleich mit der Inhomogenität b . Man erhält dann ein konkretes u_{sp} , und die allgemeine Lösung der inhomogenen GDG ergibt sich als Summe von u_{sp} und der allgemeinen Lösung des homogenen GDG; vergleiche mit Teil (III) von Satz 3.1.
- (2) Wegen der Linearität der GDG (3.14) ergeben sich auch Ansätze für Inhomogenitäten der Form $b(t) = \sum_{i=1}^h \gamma_i t^{\ell_i} e^{\zeta_i t}$ mit $\gamma_i \in \mathbb{K}$. Damit können **endliche Summen und Produkte von Polynom- und Exponentialfunktionen als Inhomogenitäten** behandelt werden, und insbesondere werden auch Terme der Bauart $\cosh(\nu t)$, $\sinh(\nu t)$, $\cos(\nu t)$ oder $\sin(\nu t)$ mit $\nu \in \mathbb{K}$ erfasst.
- (3) Prinzipiell lassen sich auch im Fall von inhomogenen Systemen statt inhomogenen skalaren Gleichungen ähnliche Aussagen treffen. Die daraus resultierenden Ansätze werden in der Rechenpraxis jedoch seltener verwendet.

Anwendung (auf **Schwingungsgleichungen**).

- (1) Ein Fundamentalsystem der **homogenen Schwingungsgleichung** mit reellem Parameter $\omega > 0$

$$u'' + \omega^2 u \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

ist durch $e^{i\omega t}$ und $e^{-i\omega t}$ oder alternativ durch $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ gegeben. Diese Gleichung gehört zum (idealisierten) physikalischen Modell des sogenannten **harmonischen Oszillators**, und die Lösungen beschreiben freie Schwingungen des Oszillators, ohne Einfluss zusätzlicher äußerer Kräfte, mit Kreisfrequenz ω , Periodendauer $\frac{2\pi}{\omega}$ und Frequenz $\frac{\omega}{2\pi}$. Letztere Frequenz heißt auch die **Eigenfrequenz** des Oszillators.

- (2) Die **inhomogene Schwingungsgleichung** oder Gleichung für erzwungene Schwingungen

$$u'' + \omega^2 u = b \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

entspricht einer Anregung des Oszillators durch eine zeitabhängige äußere Kraft, speziell im Fall⁶ $b(t) = e^{i\zeta t}$ mit $\zeta > 0$ durch eine Schwingung der äußeren Frequenz $\frac{\zeta}{2\pi}$. Im Fall $\zeta \neq \omega$ bekommt man gemäß Satz 3.12 die Lösungen $u(t) = \frac{1}{\omega^2 - \zeta^2} e^{i\zeta t} + C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$. Es handelt sich also um Überlagerungen von harmonischen Schwingungen der Frequenzen $\frac{\omega}{2\pi}$ und $\frac{\zeta}{2\pi}$, und insbesondere bleibt mit $|u(t)|$ die Amplitude der Schwingungen bei $t \rightarrow \infty$ beschränkt. Im Fall $\zeta = \omega$, dass die äußere Frequenz mit der Eigenfrequenz übereinstimmt, sieht es anders aus: Für die Lösungen $u(t) = -\frac{i}{2\omega} t e^{i\omega t} + C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ ist dann $|u(t)|$ bei $t \rightarrow \infty$ nicht beschränkt, die Amplitude der Schwingung wird also im Laufe der Zeit beliebig groß. Man spricht daher bei der Anregung eines Oszillators mit der Eigenfrequenz auch von einer **Resonanz** und nennt den Effekt, dass sich Schwingungen dann beliebig stark, eventuell bis zur Zerstörung des Oszillators, ‚aufschaukeln‘ können, eine **Resonanzkatastrophe**.

- (3) Ähnlich kann man auch die (eventuell inhomogene) **Gleichung für gedämpfte Schwingungen**

$$u'' + du' + \omega^2 u = b \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

mit einer Dämpfungskonstante $d \in \mathbb{R}$ behandeln. Das Lösungsverhalten hängt dann vom Vorzeichen der Diskriminante der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + d\lambda + \omega^2 = 0$ ab, eine Diskussion der relevanten Fälle leitet aber teils in die Physik über und wird hier nicht durchgeführt.

Ein Beweis von Satz 3.12 kann auf verschiedene Weisen erfolgen. Eine Möglichkeit, die im Prinzip auch bei Systemen funktioniert, basiert auf der Lösungsformel (3.4) und der in Korollar 3.10 beschriebenen Struktur von Fundamentalsystemen. Man reduziert dazu zunächst auf Ordnung 1 und überlegt sich dann, welche Monome und Exponentialfunktionen in $W(t) = e^{tA}$ und $W(t)^{-1}b(t) = e^{-tA}b(t)$ auftreten und welche wie im Beweis von Satz 1.2 durch Integration hinzukommen können. Im Folgenden wird aber ein anderer elementarer Beweis ausgeführt, der auf den Methoden des Abschnitts 1.2 und insbesondere auf der dort eingeführten alternativen Schreibweise

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)u = b \quad \text{auf } I$$

für die Gleichung (3.14) beruht.

⁶Physikalisch relevant ist nur der Realteil der hier betrachteten C-wertigen Funktionen. Für die Phänomenologie der GDG macht dies aber keinen Unterschied, daher wird dieser Aspekt hier ausgeklammert.

Beweis von Satz 3.12. Zuerst wird der Fall $p(\zeta) \neq 0$, dass ζ keine Nullstelle von p ist, behandelt. Die Argumentation basiert dann auf der Beobachtung, dass es zu $i \in \mathbb{N}$ stets ein Polynom $\tilde{p}_{i,\zeta}$ vom Grad $\leq (i-1)$ mit

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)t^i e^{\zeta t} = t^i p\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\zeta t} + \tilde{p}_{i,\zeta}(t)e^{\zeta t} = [t^i p(\zeta) + \tilde{p}_{i,\zeta}(t)]e^{\zeta t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gibt; dies folgt direkt aus der Produkt- beziehungsweise Leibniz-Regel, denn sobald eine einzige bei der Berechnung von $p\left(\frac{d}{dt}\right)$ auftretende Ableitung auf den Faktor t^i und nicht auf den Faktor $e^{\zeta t}$ angewandt wird, verringert sich der Grad des Monoms t^i . Als Nächstes wird mit Induktion nach $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ folgende Aussage gezeigt, die die Behauptung des Satzes im Fall $p(\zeta) \neq 0$ beinhaltet:

Zu jedem Polynom q der Ordnung $\leq \ell$ existiert eine spezielle Lösung u_{sp} der ersten im Satz angegebenen Form zu

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = q(t)e^{\zeta t}.$$

Beim Induktionsanfang für $\ell = 0$ ist dabei $q \equiv q_0 \in \mathbb{K}$ konstant, und es reicht, $c_0 = q_0 p(\zeta)^{-1}$ zu wählen. Dann ist nämlich $p\left(\frac{d}{dt}\right)u_{\text{sp}}(t) = c_0 p\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\zeta t} = c_0 p(\zeta)e^{\zeta t} = q_0 e^{\zeta t}$. Für den Induktionschluss von $\ell-1$ auf $\ell \in \mathbb{N}$ berechnet man zuerst

$$\begin{aligned} p\left(\frac{d}{dt}\right)u_{\text{sp}}(t) &= c_\ell p\left(\frac{d}{dt}\right)t^\ell e^{\zeta t} + p\left(\frac{d}{dt}\right)[c_{\ell-1}t^{\ell-1} + \dots + c_1 t + c_0]e^{\zeta t} \\ &= c_\ell [t^\ell p(\zeta) + \tilde{p}_{\ell,\zeta}(t)]e^{\zeta t} + p\left(\frac{d}{dt}\right)[c_{\ell-1}t^{\ell-1} + \dots + c_1 t + c_0]e^{\zeta t}. \end{aligned}$$

Jetzt bezeichne q_ℓ das Monom der Ordnung ℓ in q . Gemäß Induktionsannahme, angewandt auf das Polynom $q - q_\ell - c_\ell \tilde{p}_{\ell,\zeta}$ vom Grad $\leq (\ell-1)$, gibt es dann $c_0, c_1, \dots, c_{\ell-1} \in \mathbb{K}$, so dass der letzte Term der vorausgehenden Rechnung genau $[q(t) - q_\ell(t) - c_\ell \tilde{p}_{\ell,\zeta}(t)]e^{\zeta t}$ ergibt. Somit folgt

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)u_{\text{sp}}(t) = c_\ell t^\ell p(\zeta)e^{\zeta t} + [q(t) - q_\ell(t)]e^{\zeta t} = q(t)e^{\zeta t},$$

wenn noch $c_\ell t^\ell p(\zeta) = q_\ell(t)$ durch die Wahl $c_\ell = q_\ell(1)p(\zeta)^{-1}$ erreicht wird. Damit sind die Induktion und der Beweis im Fall $p(\zeta) \neq 0$ komplett.

Im anderen Fall, dass ζ Nullstelle von p der Vielfachheit $d \in \mathbb{N}$ ist, kann man d Linearfaktoren $(\lambda - \zeta)$ von $p(\lambda)$ abspalten und bekommt $p(\lambda) = (\lambda - \zeta)^d \tilde{p}(\lambda)$ mit einem Polynom \tilde{p} , das bei ζ keine Nullstelle mehr besitzt. Nach dem bereits Gezeigten gibt es dann $c_{-d}, c_{-d+1}, \dots, c_{\ell-1}, c_\ell \in \mathbb{K}$, so dass

$$\tilde{p}\left(\frac{d}{dt}\right)[c_\ell t^{\ell+d} + c_{\ell-1} t^{\ell+d-1} + \dots + c_{-d+1} t + c_{-d}]e^{\zeta t} = \frac{\ell!}{(\ell+d)!} t^{\ell+d} e^{\zeta t}$$

gilt. Durch Anwendung von $\left(\frac{d}{dt} - \zeta\right)^d$ auf beide Seiten dieser Gleichung folgt

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)[c_\ell t^{\ell+d} + c_{\ell-1} t^{\ell+d-1} + \dots + c_{-d+1} t + c_{-d}]e^{\zeta t} = \frac{\ell!}{(\ell+d)!} \left(\frac{d}{dt} - \zeta\right)^d t^{\ell+d} e^{\zeta t} = t^\ell e^{\zeta t}, \quad (3.15)$$

wobei rechts d -mal mittels $\left(\frac{d}{dt} - \zeta\right)t^i e^{\zeta t} = it^{i-1} e^{\zeta t}$ differenziert wurde. Da es sich gemäß Satz 1.2 bei $t^{d-1} e^{\zeta t}, \dots, t^2 e^{\zeta t}, t e^{\zeta t}, e^{\zeta t}$ um Lösungen der homogenen Gleichung $p\left(\frac{d}{dt}\right)u \equiv 0$ handelt, fallen in (3.15) die Summanden $c_{-1} t^{d-1}, \dots, c_{-d+2} t^2, c_{-d+1} t, c_{-d}$ weg, und nach Ausklammern von t^d folgt mit

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)[c_\ell t^\ell + c_{\ell-1} t^{\ell-1} + \dots + c_1 t + c_0]t^d e^{\zeta t} = t^\ell e^{\zeta t}$$

die Behauptung. □

Kapitel 4

Ljapunov-Stabilität von Ruhelagen

4.1 Begriffe und Definitionen

Ist eine spezielle Lösung u_0 einer GDG oder eines GDG-Systems auf einem nach oben unbeschränkten Intervall $I = (\alpha, \infty)$ oder $I = [\alpha, \infty)$ (explizit) bekannt, so beschäftigt sich dieses Kapitel mit dem folgenden Fragenkreis: Wenn eine andere (typischerweise nicht explizit bekannte) Lösung u derselben GDG beziehungsweise desselben GDG-Systems zu einer Anfangszeit $t_0 \in I$ nur wenig von u_0 abweicht, was lässt sich dann über das Verhalten von u aussagen? Bleibt die Differenz zwischen $u(t)$ und $u_0(t)$ für alle Zeiten $t \geq t_0$, auch für sehr große t , klein? Lässt sich somit aus dem Langzeitverhalten von u_0 **auf das Langzeitverhalten anderer Lösungen u mit leicht gestörten Anfangsdaten schließen?**

In guten Fällen lassen sich diese Fragen mit den nachfolgend beschriebenen Methoden angehen, und positive Antworten tragen zur Lösung gleich zweier zu Beginn der Vorlesung formulierter Grundfragen (qualitatives Lösungsverhalten und Stabilität) bei: Zum einen handelt es sich beim erwähnten Langzeitverhalten um eine qualitative Information über die Lösungen u (die ausreichend nah bei u_0 starten); zum anderen erhält man Stabilität von u_0 gegen Störungen der Anfangsdaten und kann auf stetige Abhängigkeit von diesen Daten hoffen. Dennoch geht es in diesem Kapitel keineswegs um *vollständige* Antworten auf die genannten Grundfragen: Andere Aspekte des qualitativen Lösungsverhaltens (wie Regularität von Lösungen) und die Stabilität auf kompakten Intervallen mit endlichem Zeithorizont gehören nämlich nicht zum hier behandelten Themenkreis, sondern in die späteren Abschnitte 2.5 und 2.6.

Zur Vereinfachung wird die Stabilitätstheorie dieses Kapitels nur für autonome GDG-Systeme erster Ordnung und nur für konstante Lösungen u_0 , sogenannte **Ruhelagen**, entwickelt. Die Reduktion auf Ordnung 1 ist dabei aus früheren Vorlesungskapiteln bekannt und ohne Verlust von Allgemeinheit möglich, die Beschränkung auf *autonome* GDG-Systeme und Ruhelagen dagegen ist restriktiv¹.

¹Tatsächlich ist eine (formale) Reduktion auf autonome GDG-Systeme durch Hinzufügen einer zusätzlichen Komponentenfunktion $u_*(t) := t$ zu Lösungen u möglich, zur Reduktion auf Ruhelagen (und sogar auf Null-Lösungen) kann man folgendermaßen vorgehen: Ist u_0 spezielle Lösung des Systems $u' = f(\cdot, u)$, so entsprechen beliebige Lösungen u dieses Systems den Lösungen $\tilde{u} = u - u_0$ des transformierten Systems $\tilde{u}' = \tilde{f}(\cdot, \tilde{u})$ mit Strukturfunktion $\tilde{f}(t, \tilde{x}) := f(t, u_0(t) + \tilde{x}) - f(t, u_0(t))$; daher ist Stabilität von u_0 als Lösung des ursprünglichen Systems äquivalent zur Stabilität der Null-Lösung des transformierten Systems.

Trotz dieser beiden Möglichkeiten kann man eine *simultane* Reduktion auf autonome Systeme und Ruhelagen aber nicht allgemein erreichen (denn die Reduktion auf den autonomen Fall erhält Ruhelagen nicht, und die Reduktion auf Ruhelagen erhält Autonomie nicht).

Konkret definiert und klassifiziert man Ruhelagen autonomer GDG-Systeme nun wie folgt.

Definitionen (Ruhelagen und Stabilitätsbegriffe). Seien \mathcal{X} ein normierter Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\Phi: D \rightarrow \mathcal{X}$ eine Strukturfunktion auf $D \subset \mathcal{X}$. Im Zusammenhang mit dem GDG-System (für \mathcal{X} -wertige u)

$$u' = \Phi(u) \quad (4.1)$$

werden folgende Begriffe vereinbart:

- (1) Ist $x_0 \in D$ eine Nullstelle von Φ , so ist die konstante Funktion mit Wert x_0 eine Lösung zu (4.1) (auf einem beliebigen Intervall). Man bezeichnet sowohl x_0 als auch diese konstante Lösung dann als **Ruhelage**, **Gleichgewichtslage** oder **Equilibrium** des GDG-Systems (4.1).
- (2) Eine Ruhelage $x_0 \in D$ von (4.1) heißt **(Ljapunov-)stabil**, wenn es zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ und jeder Umgebung V von x_0 eine Umgebung U von x_0 in D gibt, so dass gilt: Für alle $y_0 \in U$ ist das AWP zu (4.1) mit AB $u(t_0) = y_0$ lösbar, jede Lösung ist zu einer Lösung u auf $[t_0, \infty)$ fortsetzbar, und diese bleibt in V (d.h. sie erfüllt $u([t_0, \infty)) \subset V$).
- (3) Eine nicht Ljapunov-stabile Ruhelage $x_0 \in D$ von (4.1) nennt man **(Ljapunov-)instabil**.
- (4) Eine Ruhelage $x_0 \in D$ von (4.1) heißt **attraktiv**, wenn es zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Umgebung U von x_0 in D gibt, so dass gilt: Für alle $y_0 \in U$ ist das AWP zu (4.1) mit AB $u(t_0) = y_0$ lösbar, jede Lösung ist zu einer Lösung u auf $[t_0, \infty)$ fortsetzbar, und diese erfüllt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = x_0.$$

- (5) Eine Ruhelage $x_0 \in D$ von (4.1) heißt **asymptotisch stabil**, wenn sie Ljapunov-stabil und attraktiv ist.

Bemerkungen und Erläuterungen (zu den Stabilitätsbegriffen).

- (1) In der Literatur sind auch äquivalente Abwandlungen der Definitionen (2) und (4) üblich:
 - Man kann die Definitionen nur für $t_0 = 0$ statt für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ oder mit U unabhängig von t_0 treffen; dies liegt daran, dass mit u auch $\tilde{t} \mapsto u(t_0 + \tilde{t})$ Lösung des autonomen Systems (4.1) ist.
 - Man kann auch mit positiven Größen ε und δ statt Umgebungen V und U arbeiten. Die offene ε -Kugel $B_\varepsilon(x_0)$ in \mathcal{X} übernimmt dann die Rolle von V , und $B_\delta(x_0) \cap D$ übernimmt die Rolle von U .
- (2) **Notwendig für** (Ljapunov- oder asymptotische) **Stabilität** einer Ruhelage x_0 **ist** zunächst ihre **Eindeutigkeit** (als Lösung jedes AWP mit AB $u(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$), denn bei Nicht-Eindeutigkeit ist die Bedingung aus (2) für sehr kleine Umgebungen V nie erfüllt.

Vor diesem Hintergrund werden Stabilitätsbegriffe in manchen Quellen überhaupt nur für solche Systeme definiert, bei denen die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf (\mathcal{X} vollständig, D offen, Φ lokal Lipschitz-stetig auf D) erfüllt und Lösungen der zugehörigen AWP automatisch eindeutig sind. Geht man derart vor, so muss der letzte Teil der Definitionen (2) und (4) nicht so sorgfältig wie oben formuliert werden. Vielmehr reicht es dann, dass das AWP zu (4.1) mit AB $u(t_0) = y_0$ eine Lösung u auf $[t_0, \infty)$ hat, und dass u in V bleibt beziehungsweise $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = x_0$ erfüllt.

(3) Gemäß Abschnitt 1.8 lässt sich das autonome System (4.1) im Fall $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ durch ein **Phasenraumdiagramm** in der Zeichenebene veranschaulichen. Mit Hilfe solcher Diagramme kann man sich folgendermaßen eine **anschauliche Vorstellung von den Stabilitätsbegriffen** machen:

- Eine **Ruhelage** x_0 entspricht im Phasenraumdiagramm einfach einem Punkt von D , an dem eine konstante Trajektorie für alle Zeiten verbleibt.
- **Ljapunov-Stabilität** einer Ruhelage x_0 bedeutet, dass es zu jeder (potenziell kleinen) Umgebung V von x_0 eine (noch) kleinere Umgebung U von x_0 in D mit folgender Eigenschaft gibt: Jede Trajektorie, die U (zur Zeit t_0) durchläuft, bleibt danach für immer (d.h. für alle Zeiten aus $[t_0, \infty)$) in V . Im Phasenraumdiagramm erlaubt dies (leicht) verschiedene Verhaltensweisen der Trajektorien. Typische Ljapunov-stabile Ruhelagen sind die in den Abbildungen 7 und 8 skizzierten Senken, Strudel- und Wirbelpunkte; Abbildung 8 zeigt aber auch, dass weitere, beliebig nahe gelegene Ruhelagen möglich sind.
- **Attraktivität** einer Ruhelage x_0 bedeutet, dass eine (eventuell sehr kleine) Umgebung U von x_0 in D folgende Eigenschaft aufweist: Jede Trajektorie, die U durchläuft, konvergiert schließlich (d.h. für $t \rightarrow \infty$) gegen x_0 . Im Phasenraumdiagramm erscheint eine attraktive Ruhelage somit als Senke, in der alle nah herankommenden Trajektorien wie in Abbildung 7 schließlich verschwinden.

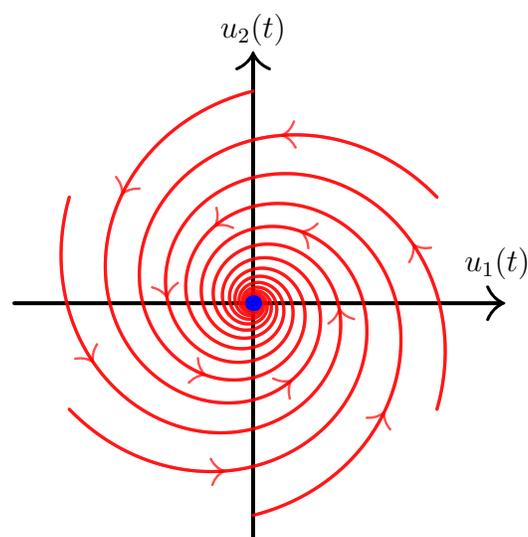


Abb. 7: **Lösungskurven** des linearen Systems $u'_1 = -u_1 - 4u_2$, $u'_2 = 4u_2 - u_1$ mit asymptotisch stabiler (und damit auch Ljapunov-stabiler) **Ruhelage 0**.

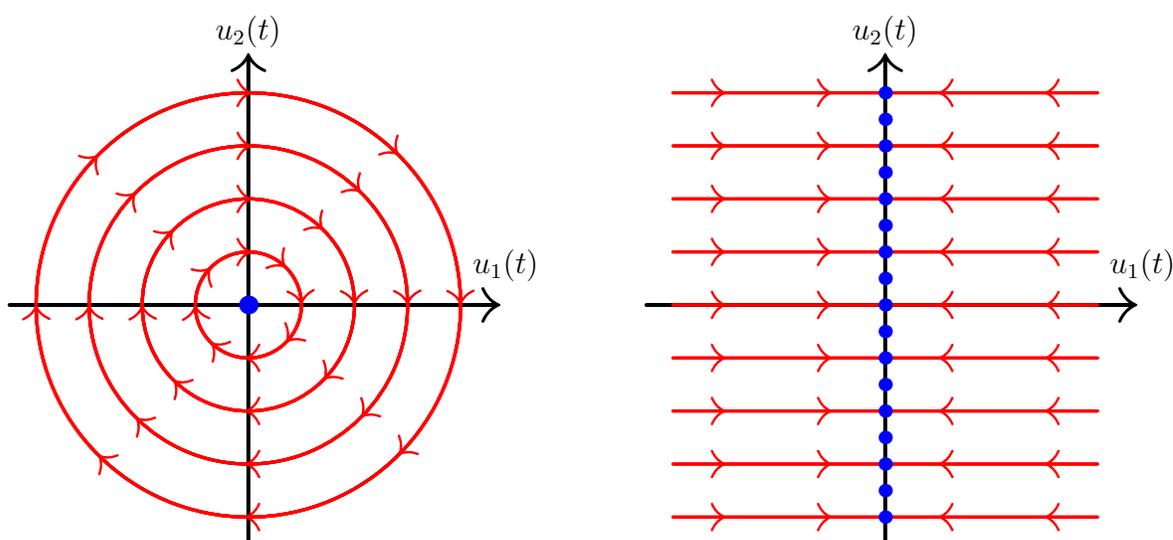


Abb. 8: **Lösungskurven** der linearen Systeme $u'_1 = u_2$, $u'_2 = -u_1$ (links) und $u'_1 = -u_1$, $u'_2 \equiv 0$ (rechts) mit Ljapunov-stabilen, aber nicht asymptotisch stabilen **Ruhelagen**.

- **Asymptotische Stabilität** beinhaltet Ljapunov-Stabilität *und* Attraktivität und bedeutet somit, dass es zu jeder Umgebung V von x_0 eine Umgebung U von x_0 in D mit folgender Eigenschaft gibt: Jede Trajektorie, die U durchläuft, bleibt danach für immer in V *und* konvergiert schließlich wie in Abbildung 7 gegen x_0 . Im Allgemeinen ist dies stärker als Attraktivität allein, die ja erlauben würde, dass sich eine Trajektorie für gewisse $t > t_0$ weit von x_0 entfernt² und erst für sehr große t in die Nähe von x_0 zurückkehrt. Bei skalaren Gleichungen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wie auch bei linearen Systemen stellt sich asymptotische Stabilität aber doch als äquivalent zu Attraktivität heraus; daher kann der Unterschied zwischen diesen Begriffen in den Abbildungen 7 und 8 nicht ausgemacht werden.

4.2 Stabilität von Ruhelagen linearer Systeme

Im Fall eines *linearen* Erster-Ordnung-GDG-Systems (für \mathbb{K}^N -wertige u)

$$u' = Au + b \quad \text{auf } \mathbb{R} \quad (4.2)$$

mit konstanter Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ und konstanter Inhomogenität $b \in \mathbb{K}^N$ sind die Ruhelagen des Systems genau die Lösungen $x \in \mathbb{K}^N$ des linearen Gleichungssystems $Ax = -b$. Gibt es also überhaupt eine Ruhelage (was jedenfalls bei invertierbarem A oder auch für $b = 0$ sichergestellt ist), so bilden die Ruhelagen einen affinen Unterraum von \mathbb{K}^N , im homogenen Fall $b = 0$ sogar einen Untervektorraum von \mathbb{K}^N .

Eine zentrale Beobachtung ist nun, dass die Stabilität der Ruhelagen von (4.2) tatsächlich nur von der Matrix A , nicht von b abhängt und alle Ruhelagen dieses Systems dasselbe Verhalten aufweisen; dies liegt daran, dass Lösungen u des (möglicherweise inhomogenen) Systems (4.2) nahe einer seiner Ruhelagen x_0 (mit $Ax_0 = -b$) den Lösungen $\tilde{u} = u - x_0$ des homogenen Systems $\tilde{u}' = A\tilde{u}$ auf \mathbb{R} nahe dessen Ruhelage 0 entsprechen. Folglich kann man sich darauf beschränken, die Stabilität der Null-Ruhelage von (4.2) im homogenen Fall $b = 0$ zu untersuchen.

Ausgehend von dieser Vorbemerkung liefert Abschnitt 3.2 leicht zu prüfende, **notwendige und hinreichende Kriterien** für die Stabilität von Ruhelagen im linearen Fall:

Satz 4.1 (über **Kriterien für die Stabilität von Ruhelagen linearer Systeme**). *Seien $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ und $b \in \mathbb{K}^N$ und seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Eigenwerte von A über \mathbb{C} mit zugehörigen algebraischen Vielfachheiten $d_1, d_2, \dots, d_\ell \in \mathbb{N}$ und zugehörigen Eigenräumen $E_{\lambda_1}(A), E_{\lambda_2}(A), \dots, E_{\lambda_\ell}(A) \subset \mathbb{C}^N$. Besitzt das System (4.2) mindestens eine Ruhelage, so gelten:*

- (I) *Genau dann, wenn $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ für **alle** $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ gilt, ist jede/eine Ruhelage von (4.2) **asymptotisch stabil**.*
- (II) *Genau dann, wenn $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ oder $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{\lambda_i}(A) = d_i$ für **alle** $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ gilt, ist jede/eine Ruhelage von (4.2) **Ljapunov-stabil**.*
- (III) *Genau dann, wenn $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ oder $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{\lambda_i}(A) < d_i$ für **ein** $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ gilt, ist jede/eine Ruhelage von (4.2) **instabil**.*

Bemerkung. Mit den Kriterien des Satzes 4.1 lässt sich die **Stabilitätsfrage** bei linearen Systemen des Typs (4.2) **völlig schematisch auf die Berechnung von Eigenwerten und eventuell Eigenräumen** der Koeffizientenmatrix A **zurückführen**. Konkrete Beispiele hierzu liefern Abbildung 7 (Eigenwerte $-1 \pm 4i$, (I) anwendbar) und Abbildung 8 (links Eigenwerte $\pm i$, rechts Eigenwerte -1 und 0 , jeweils (II) anwendbar). Weitere Beispiele sind Thema der Übungen.

²Die Möglichkeit eines solchen Verhaltens ist übrigens auch dafür verantwortlich, dass Attraktivität einer Ruhelage im Gegensatz zu ihrer Ljapunov- oder asymptotischen Stabilität im Allgemeinen kein lokaler Begriff ist.

Für den Beweis von Satz 4.1 ist entscheidend, dass alle Komponentenfunktionen von Lösungen u des homogenen Systems $u' = Au$ komplexe Linearkombinationen von Termen der Form $t^j e^{\lambda_i t}$ sind; vergleiche Korollar 3.10 (I). Haben nun alle Eigenwerte λ_i negativen Realteil, so konvergieren die Exponentialfunktionen $|e^{\lambda_i t}| = e^{\operatorname{Re} \lambda_i t}$ bei $t \rightarrow \infty$ schneller gegen Null als die Potenzfunktionen t^j wachsen, und daher folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$, also die Attraktivität der Null-Ruhelage. Hat dagegen ein Eigenwert λ_{i_0} positiven Realteil, so ist $\lim_{t \rightarrow \infty} t^j |e^{\lambda_{i_0} t}| = \infty$, und es ergibt sich (jedenfalls wenn nicht alle Koeffizienten vor den $t^j e^{\lambda_{i_0} t}$ -Termen verschwinden) mit $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = \infty$ die Instabilität der Null-Ruhelage. Damit sind die Kriterien (I) und (III) fast schon gezeigt. Dennoch folgt nun ein formaler und vollständiger Beweis des Satzes, der auf der vorausgehenden Argumentation fußt, diese aber — vor allem im etwas subtileren Fall von Eigenwerten mit Realteil Null — noch etwas ausbaut:

Beweis von Satz 4.1. Zuerst sei festgehalten, dass sich die Definitionen der Stabilitätsbegriffe wegen des globalen Existenz- und Eindeigkeitssatzes 3.2 etwas vereinfachen; und zwar so wie in Bemerkung (2) aus Abschnitt 4.1 beschrieben. Gemäß Vortext reicht es außerdem, für $b = 0$ die Null-Ruhelage des homogenen Systems $u' = Au$ zu betrachten.

Ist die Bedingung von (II) an die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ erfüllt, so sind gemäß Korollar 3.10 (I) alle Einträge der Fundamentalmatrix e^{tA} Linearkombinationen von Termen der beiden Typen $t^j e^{\lambda_i t}$ mit $j < d_i$, $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ und $e^{\lambda_i t}$ mit $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ (wobei im Fall $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ durch die Bedingung $\dim_{\mathbb{C}} E_{\lambda_i}(A) = d_i$ sichergestellt wird, dass $E_{\lambda_i}(A) = H_{\lambda_i}(A)$ gilt und keine Potenzen von t auftreten; siehe den letzten Satz von Korollar 3.10). Da die angegebenen Terme stetig sind und bei $t \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben (beachte $|e^{\lambda_i t}| = e^{\operatorname{Re} \lambda_i t}$), ist $M := 1 + \sup_{t \geq 0} \|e^{tA}\|$ endlich. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ kann man daher $\delta := \varepsilon/M > 0$ wählen und bekommt für die Lösung $u(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$ zur AB $u(t_0) = y_0$ mit $y_0 \in B_\delta(0)$ die Abschätzung $|u(t)| < M\delta = \varepsilon$ für alle $t \geq t_0$. Diese Lösung bleibt also in $B_\varepsilon(0)$, somit sind die Ljapunov-Stabilität der Null-Ruhelage und die Hinrichtung von (II) gezeigt.

Sind sogar alle Eigenwerte negativ, so treten im vorausgehenden Argument nur Funktionen des Typs $t^j e^{\lambda_i t}$ mit $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ auf, und daher gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ für Lösungen zu beliebigen Anfangsdaten. Dies reicht, um Attraktivität der Null-Ruhelage sicherzustellen, und insgesamt ist damit auch die Hinrichtung von (I) gezeigt.

Ist die Bedingung von (III) an die Eigenwerte erfüllt, so gilt für ein $i_0 \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ entweder $\operatorname{Re} \lambda_{i_0} > 0$ oder $\operatorname{Re} \lambda_{i_0} = 0$, $\dim E_{\lambda_{i_0}}(A) < d_{i_0}$. Im ersten Fall dieser Alternative gilt für Eigenwert-Eigenvektor-Lösungen $u(t) = e^{\lambda_{i_0} t} v$ mit $v \in E_{\lambda_{i_0}}(A) \setminus \{0\}$ stets $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\operatorname{Re} \lambda_{i_0} t} |v| = \infty$. Für kleine Eigenvektoren v erhält man also Lösungen mit beliebig kleinen Anfangsdaten, die bei $t \rightarrow \infty$ jede beschränkte Nullumgebung verlassen. Also ist die Null-Ruhelage instabil. Im zweiten Fall bringt man A durch eine invertierbare Transformationsmatrix $T \in \mathbb{C}^{N \times N}$ auf Jordan-Normalform $J = T^{-1}AT$. Wegen $\dim E_{\lambda_{i_0}}(A) < d_{i_0} = \dim H_{\lambda_{i_0}}(A)$ enthält J einen größten Jordan-Block der Größe $k \geq 2$ (wobei k mit dem Nilpotenzgrad von $(\lambda_{i_0} \mathbb{I}_N - A)$ auf $H_{\lambda_{i_0}}(A)$ übereinstimmt). Gemäß der Regel (3.9) zur Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion von Jordan-Blöcken enthält dann e^{tJ} eine Spalte, in der als von Null verschiedenen Einträge genau $e^{\lambda_{i_0} t}$, $t e^{\lambda_{i_0} t}$, $\frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_{i_0} t}$, \dots , $\frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\lambda_{i_0} t}$ auftreten. Es folgt, dass eine Spalte der Fundamentalmatrix $T e^{tJ}$ aus Linearkombinationen dieser Funktionen besteht, und wegen der Invertierbarkeit von T ist in mindestens einem Eintrag dieser Spalte der Koeffizient vor dem am schnellsten wachsenden Term $\frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\lambda_{i_0} t}$ von Null verschieden. Für die durch diese Spalte gegebene Lösung u gilt daher $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = \infty$. Durch Multiplikation von u mit kleinen Vorfaktoren kann man wieder Lösungen mit beliebig kleinen Anfangsdaten erhalten. Also ist die Null-Ruhelage auch in diesem Fall instabil, und die Hinrichtung von (III) ist gezeigt.

Es verbleibt, die Rückrichtungen nachzuweisen. Zur Behandlung der Rückrichtung von (I) bemerkt man dabei, dass in der Situation des vorausgehenden Arguments die Null-Ruhelage nicht Ljapunov-stabil und damit erst recht nicht asymptotisch stabil ist. Daher ist nur noch nachzuweisen, dass bei Existenz eines $i_0 \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ mit $\operatorname{Re} \lambda_{i_0} = 0$ ebenfalls keine asymptotische Stabilität vorliegen kann. Hierzu betrachtet man erneut Eigenwert-Eigenvektor-Lösungen $u(t) = e^{\lambda_{i_0} t} v$ mit $v \in E_{\lambda_{i_0}}(A) \setminus \{0\}$ und bekommt $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = |v| > 0$. Da durch beliebig kleine Eigenvektoren v auch beliebig kleine AWe realisiert werden können, ist die Null-Ruhelage auch in diesem Fall nicht asymptotisch stabil.

Die Rückrichtung von (II) ergibt sich schließlich als Kontraposition der schon gezeigten Hinrichtung von (III). Die Rückrichtung von (III) folgt analog aus der Hinrichtung von (II). \square

4.3 Stabilität von Ruhelagen nicht-linearer Systeme, Ljapunov-Funktionen

Ein nützliches Hilfsmittel für Stabilitätsuntersuchungen bei nicht-linearen GDG-Systemen sind sogenannte Ljapunov-Funktionen, die wie folgt definiert werden.

Definition 4.2 (Ljapunov-Funktionen). Eine Funktion $L \in C^1(D, \mathbb{R})$ auf einer offenen Teilmenge D von \mathbb{K}^N heißt eine Ljapunov-Funktion eines Vektorfelds $\Phi: D \rightarrow \mathbb{K}^N$ beziehungsweise des GDG-Systems $u' = \Phi(u)$, wenn die Richtungsableitung von L entlang des Vektorfelds Φ auf D nicht-positiv ist, d.h. wenn $\partial_\Phi L \leq 0$ auf D gilt.

Terminologie. Die Richtungsableitung $\partial_\Phi L$ von L entlang des Vektorfelds Φ wird dabei punktweise als ‚normale‘ Richtungsableitung von L entlang einzelner Vektoren $\Phi(x)$ erklärt, genauer

$$\partial_\Phi L(x) := (\partial_{\Phi(x)} L)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x+t\Phi(x)) - L(x)}{t} \quad \text{für alle } x \in D.$$

Aus dem bekannten Zusammenhang zwischen Richtungsableitungen und Gradienten folgt dann

$$\partial_\Phi L = \nabla L \cdot \Phi = \begin{cases} \sum_{i=1}^N (\partial_i L) \Phi_i & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial \operatorname{Re} x_i} \operatorname{Re} \Phi_i + \frac{\partial L}{\partial \operatorname{Im} x_i} \operatorname{Im} \Phi_i \right] & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases} \quad (4.3)$$

(wobei (\cdot) für das **reelle** Skalarprodukt auf \mathbb{K}^N steht — auch im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Viele Quellen verwenden für $\partial_\Phi L$ die **alternative Notation \dot{L}** , bei der das betrachtete Vektorfeld/System aus dem Kontext zu erschließen ist.

Nützlich sind Ljapunov-Funktionen vor allem im Zusammenhang mit dem folgenden Satz.

Satz 4.3 (über die **direkte Methode von Ljapunov**). Gegeben sei das autonome GDG-System (für \mathbb{K}^N -wertige u)

$$u' = \Phi(u) \quad (4.4)$$

mit lokal Lipschitz-stetiger Strukturfunktion $\Phi \in C^0(D, \mathbb{K}^N)$ auf einer offenen Teilmenge D von \mathbb{K}^N . Sei außerdem $x_0 \in D$ eine Ruhelage von (4.4) und L eine Ljapunov-Funktion zu (4.4).

- (I) Ist x_0 strikte lokale Minimalstelle von L , so ist die Ruhelage x_0 **Ljapunov-stabil**.
- (II) Ist x_0 strikte lokale Minimalstelle von L und gilt für eine Umgebung V von x_0 in D die strikte Ungleichung $\partial_\Phi L < 0$ auf $V \setminus \{x_0\}$, so ist die Ruhelage x_0 **asymptotisch stabil**.
- (III) Ist x_0 **keine** lokale Minimalstelle von L und gilt für eine Umgebung V von x_0 in D die strikte Ungleichung $\partial_\Phi L < 0$ auf $V \setminus \{x_0\}$, so ist die Ruhelage x_0 **instabil**.

Bemerkungen.

- (1) Für die Ruhelage x_0 gelten stets $\Phi(x_0) = 0$ und $\partial_\Phi L(x_0) = 0$. Deshalb sind die strikten Vorzeichenbedingungen in (II) und (III) nicht auf ganz V , sondern nur auf $V \setminus \{x_0\}$ sinnvoll.
- (2) **Mit L ist auch $L+c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ Ljapunov-Funktion.** Deshalb ist es keine Einschränkung und kommt in der Literatur oft vor, dass anstelle der strikten Minimumeigenschaft in (I) und (II) die Forderungen $L(x_0) = 0$ und $L > 0$ auf (einer Umgebung von x_0 in) $D \setminus \{x_0\}$ gestellt werden. Ähnliches gilt für die Situation aus (III).
- (3) Jede konstante Funktion ist eine Ljapunov-Funktion im Sinne von Definition 4.2, besitzt aber weder *strikte* Minimalstellen noch Nicht-Minimalstellen und erlaubt deshalb nie die Anwendung von Satz 4.3. Die **Krux bei der Anwendung des Satzes liegt daher im Finden einer geeigneten** (notwendigerweise nicht-konstanten) **Ljapunov-Funktion L** , und tatsächlich ist es im Allgemeinen nicht einfach, solch ein geeignetes L zu finden oder auch nur seine Existenz sicherzustellen.

- (4) **Eine Ljapunov-Funktion L kann man sich als eine Energie vorstellen.** Tatsächlich entspricht $L(x)$ bei einem physikalisch motivierten GDG-System $u' = \Phi(u)$ oft der Energie des Zustands $x \in D$ des zugrunde liegenden physikalischen Systems, und (nur) **mit dieser Interpretation im Hinterkopf kann man oft ein geeignetes L angeben.**
- (5) Von zentraler Bedeutung ist folgende Beobachtung: Ist L Ljapunov-Funktion und u Lösung zu $u' = \Phi(u)$, so gilt gemäß Kettenregel

$$[L(u)]' = \nabla L(u) \cdot u' = \nabla L(u) \cdot \Phi(u) = \partial_{\Phi} L(u) \leq 0, \quad (4.5)$$

die ‚Energie‘ $L(u)$ ist also nicht-wachsende Funktion der Zeit t , und **insgesamt ist L entlang allen Trajektorien des GDG-Systems nicht-wachsend.** Man kann sich daher den **Graph einer Ljapunov-Funktion L als Energie-Landschaft** vorstellen, in der sich Trajektorien nie aufwärts, sondern nur abwärts oder auf konstantem Level bewegen können, und vor diesem Hintergrund werden die Aussagen von Satz 4.3 auch anschaulich sehr plausibel.

Beweis von Teil (I) des Satzes 4.3. Sei x_0 strikte lokale Minimalstelle von L , und ohne Einschränkung sei $L(x_0) = 0$. Zum Nachweis der Ljapunov-Stabilität von x_0 anhand ihrer Definition reicht es, beliebige $t_0 \in \mathbb{R}$ und ausreichend kleine Umgebungen V von x_0 zu betrachten, so dass x_0 strikte Minimalstelle von L auf dem Kompaktum $\bar{V} \subset D$ ist. Insbesondere ist dann $\gamma := \min_{\partial V} L > 0$. Wegen der Stetigkeit von L lässt sich nun eine (von t_0 unabhängige) Umgebung $U \subset V$ von x_0 finden, so dass $L \leq \frac{1}{2}\gamma$ auf U gilt. Für $y_0 \in U$ existiert gemäß den Hauptsätzen 2.1 und 2.3 eine eindeutige maximale Lösung u des AWP's zu (4.4) mit AB $u(t_0) = y_0$ auf einem maximalen Lösungsintervall (α, ω) mit $-\infty \leq \alpha < t_0 < \omega \leq \infty$. Gemäß Bemerkung (5) ist $L(u)$ auf (α, ω) nicht-wachsend, und es gelten

$$u(t_0) = y_0 \in U \subset V \quad \text{und} \quad L(u) \leq L(u(t_0)) = L(y_0) \leq \frac{1}{2}\gamma \text{ auf } [t_0, \infty).$$

In Anbetracht von $L \geq \gamma$ auf ∂V bedeutet dies, dass die Lösung u die Umgebung V nicht verlassen kann und auf $[t_0, \omega)$ in V verbleibt. Wegen der Beschränktheit von V ist damit ausgeschlossen, dass $\lim_{t \nearrow \omega} |u(t)| = \infty$ gilt, also erzwingt (eine Bemerkung zu) Hauptsatz 2.3 schon $\omega = \infty$. Die eindeutige Lösung u des AWP's existiert folglich auf ganz $[t_0, \infty)$ mit $u([t_0, \infty)) \subset V$, und die Ljapunov-Stabilität von x_0 ist nachgewiesen. \square

Beweis von Teil (II) des Satzes 4.3. Seien x_0 strikte lokale Minimalstelle von L , $t_0 \in \mathbb{R}$ und V eine eventuell verkleinerte Umgebung von x_0 in D mit $\partial_{\Phi} L < 0$ auf $\bar{V} \setminus \{x_0\}$, zu der sich eine zugehörige Umgebung U von x_0 in D mit allen Eigenschaften des vorigen Beweisteils finden lässt. Sei $y_0 \in U$, und u bezeichne die auf $[t_0, \infty)$ existente und in V bleibende Lösung u des AWP's mit AB $u(t_0) = y_0$. Da $L(u)$ auf $[t_0, \infty)$ nicht-wachsend und von unten beschränkt ist, gibt es eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $[t_0, \infty)$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} [L(u)]'(t_k) = 0$. Nach Umschreiben mit (4.5) ist auch $\lim_{k \rightarrow \infty} \partial_{\Phi} L(u(t_k)) = 0$, und durch Übergang zu einer Teilfolge lässt sich zudem erreichen, dass $y_{\infty} := \lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k) \in \bar{V}$ existiert. Es folgt $\partial_{\Phi} L(y_{\infty}) = 0$, und dies erzwingt gemäß Annahme $y_{\infty} = x_0$. Als Nächstes folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} L(u(t_k)) = L(y_{\infty}) = L(x_0)$ und wegen der Monotonie von $L(u)$ auch $\lim_{t \rightarrow \infty} L(u(t)) = L(x_0)$. Letzteres reicht, um auf $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = x_0$ zu schließen, denn, sobald u entlang irgendeiner ∞ -Folge in $[t_0, \infty)$ gegen ein $y \in \bar{V} \setminus \{x_0\}$ konvergieren würde, müsste $L(u)$ entlang dieser Folge gegen $L(y) > L(x_0)$ konvergieren. Mit $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = x_0$ ist die asymptotische Stabilität von x_0 nachgewiesen. \square

Beweis von Teil (III) des Satzes 4.3. Sei x_0 keine lokale Minimalstelle von L , sei $L(x_0) = 0$, und sei eine eventuell verkleinerte beschränkte Umgebung V von x_0 in D mit $\partial_\Phi L < 0$ auf $\bar{V} \setminus \{x_0\}$ fixiert. Da x_0 keine lokale Minimalstelle ist, gibt es beliebig nah an x_0 gelegene $y_0 \in V$ mit $L(y_0) < 0$, und es reicht zu zeigen, dass, sobald eine Lösung u des AWP's zu (4.4) mit AB $u(0) = y_0$ auf ganz $[0, \infty)$ existiert, diese Lösung V verlässt. Dazu benutzt man zuerst die Stetigkeit von L in x_0 und wählt eine offene Umgebung V_{y_0} von x_0 in D mit $L > L(y_0)$ auf V_{y_0} . Wegen Stetigkeit von $\partial_\Phi L$ ist $\ell := \min_{\bar{V} \setminus V_{y_0}} (-\partial_\Phi L) > 0$. Da $L(u)$ gemäß Bemerkung (5) nicht-wachsend ist, gelten $L(u) \leq L(u(0)) = L(y_0)$ und somit $u \notin V_{y_0}$ auf $[0, \infty)$. Angenommen, u bliebe nun auf $[0, \infty)$ in V und damit in $\bar{V} \setminus V_{y_0}$. Dann wäre $[L(u)]' = \partial_\Phi L(u) \leq -\ell$ auf $[0, \infty)$ und somit $\lim_{t \rightarrow \infty} L(u(t)) = -\infty$. Dies stünde im Widerspruch dazu, dass L auf dem Kompaktum \bar{V} von unten beschränkt ist, also muss $u([0, \infty)) \not\subset V$ gelten, und die Instabilität von x_0 ist gezeigt. \square

Anwendung (auf die **Gleichung(en) des mathematischen Pendels**). Als mathematisches Pendel bezeichnet man das in Abbildung 9 skizzierte, idealisierte Modell für ein Stabpendel. Dabei ist der masselose, unendlich dünne, unflexible Pendelstab an einem Ende an einem festen Punkt befestigt, am anderen Ende trägt er eine Punktmasse, und das Pendel schwingt reibungsfrei nur unter Einfluss der Gravitation in einer vertikalen Ebene. Verwendet man den Winkel φ des Pendelstabs relativ zur unteren Ruhelage und die (skalare) Geschwindigkeit v der Punktmasse als Variablen, so wird ein solches Pendel durch das nicht-lineare Erster-Ordnung-GDG-System für \mathbb{R}^2 -wertige Funktionen $u = \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix}$

$$\varphi' = \ell^{-1}v, \quad v' = -g \sin \varphi \quad (4.6)$$

mit den festen, positiven Parametern ℓ (Länge des Pendelstabs) und g (Fallbeschleunigung) beschrieben. Äquivalent ist die skalare, nicht-lineare Zweiter-Ordnung-GDG $\varphi'' = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi$, die Untersuchung im Kontext dieses Kapitels orientiert sich aber am System (4.6) mit der Strukturfunktion

$$\Phi(\varphi, v) = \begin{pmatrix} \ell^{-1}v \\ -g \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{für } (\varphi, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Die abzählbar vielen Ruhelagen $(z\pi, 0)$, $z \in \mathbb{Z}$ des Systems (4.6) entsprechen wegen der ‚Periodizität‘ des Winkels φ nur zwei physikalisch unterscheidbaren Zuständen: Bei $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ handelt es sich um die untere, bei $((2k+1)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ um die obere Ruhelage des Pendels. Diese beiden Fälle werden nun getrennt diskutiert.

- Bei der Untersuchung der ‚unteren‘ Ruhelagen $(2k\pi, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist es hilfreich, die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie

$$L(\varphi, v) := \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \cos \varphi \quad \text{für } (\varphi, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.7)$$

zu betrachten — mit der Masse $m > 0$ des Pendels als physikalischem Parameter, den man für die rein mathematische Betrachtung auch zu 1 normieren könnte. Wegen

$$\dot{L}(\varphi, v) = \nabla L(\varphi, v) \cdot \Phi(\varphi, v) = \begin{pmatrix} mg\ell \sin \varphi \\ mv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ell^{-1}v \\ -g \sin \varphi \end{pmatrix} = 0$$

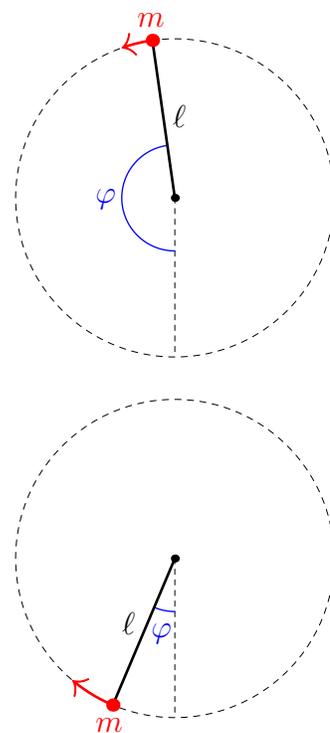


Abb. 9: Das Pendel nahe den Ruhelagen.

für alle $(\varphi, v) \in \mathbb{R}^2$ ist L Ljapunov-Funktion des Systems (4.6). Da L außerdem strikte lokale Minimalstellen bei $(2k\pi, 0)$ besitzt, sind diese Ruhelagen gemäß Satz 4.3 (I) Ljapunov-stabil.

Die Frage, ob die ‚unteren‘ Ruhelagen sogar asymptotisch stabil sind, lässt sich ebenfalls mit Hilfe von L aus (4.7), wenn auch nicht direkt anhand des Satzes, beantworten. Tatsächlich liegt nämlich mit der Identität $\dot{L} \equiv 0$ Energie-Erhaltung vor, so dass L nicht nur nicht-wachsend, sondern sogar konstant entlang Trajektorien ist. Folglich starten und bleiben alle anderen Lösungen u auf einem höheren Energie-Niveau als die Ruhelagen $(2k\pi, 0)$. Es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} L(u(t)) > L(2k\pi, 0)$, womit $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = (2k\pi, 0)$ ausgeschlossen ist, und daher sind die ‚unteren‘ Ruhelagen zwar Ljapunov-stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

- Bei der Untersuchung der ‚oberen‘ Ruhelagen $((2k+1)\pi, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ lässt sich Satz 4.3 nicht (direkt) mit der Ljapunov-Funktion L aus (4.7) anwenden. Betrachtet man aber beispielsweise³

$$L_0(\varphi, v) := v \sin \varphi \quad \text{für } (\varphi, v) \in \mathbb{R}^2,$$

so gilt

$$\dot{L}_0(\varphi, v) = \nabla L_0(\varphi, v) \cdot \Phi(\varphi, v) = \begin{pmatrix} v \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ell^{-1} v \\ -g \sin \varphi \end{pmatrix} = \ell^{-1} v^2 \cos \varphi - g(\sin \varphi)^2 < 0$$

für $(\varphi, v) \in [((2k+\frac{1}{2})\pi, (2k+\frac{3}{2})\pi) \times \mathbb{R}] \setminus \{((2k+1)\pi, 0)\}$ (denn für die hier zugelassenen φ ist der Kosinus negativ und der Sinus hat nur eine Nullstelle). Da L_0 keine Minimalstellen, sondern Sattelpunkte bei $((2k+1)\pi, 0)$ besitzt, sind diese Ruhelagen gemäß Satz 4.3 (III) instabil.

Die hiermit verifizierten Stabilitätseigenschaften (und auch das sonstige Verhalten des Pendels) lassen sich gut im Phasenraumdiagramm der Abbildung 10 erkennen.

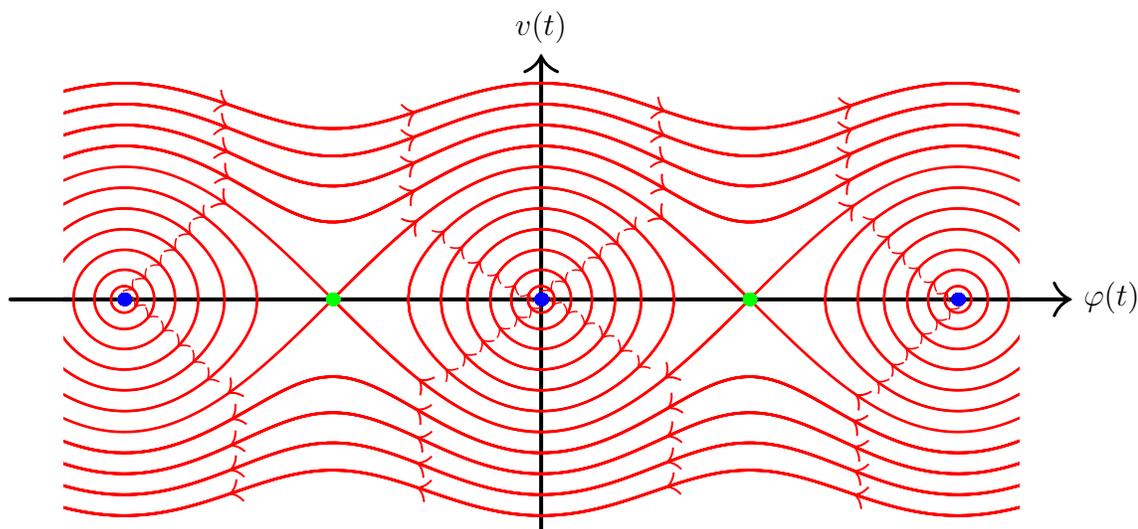


Abb. 10: Phasenraumdiagramm einiger Lösungen der Pendelgleichungen (4.6) mit den Ljapunov-stabilen Ruhelagen $(-2\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$ und den instabilen Ruhelagen $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$.

³Neben dem hier gewählten L_0 führen auch etwas andere Wahlen wie $L_0(\varphi, v) = -(\varphi - (2k+1)\pi)v$ zum gleichen Ergebnis.

Eine andere naheliegende Methode zur Stabilitätsuntersuchung bei einem nicht-linearen GDG-System basiert auf der lokalen **Linearisierung** des Systems um eine Ruhelage, und tatsächlich erhält man für den nicht-linearen Fall dann ähnliche (aber weniger scharfe und vollständige) Kriterien wie in Satz 4.1 für den linearen Fall.

Satz 4.4 (Linearisierungskriterien für (In-)Stabilität bei nicht-linearen Systemen). Gegeben sei das autonome GDG-System (für \mathbb{K}^N -wertige u)

$$u' = \Phi(u) \quad (4.8)$$

mit Strukturfunktion $\Phi \in C^1(D, \mathbb{K}^N)$ auf einer offenen Teilmenge D von \mathbb{K}^N .

- (I) Ist x_0 eine Ruhelage von (4.8) und haben alle Eigenwerte von $D\Phi(x_0) \in \mathbb{K}^{N \times N}$ über \mathbb{C} negativen Realteil, so ist die Ruhelage x_0 **asymptotisch stabil**.
- (II) Ist x_0 eine Ruhelage von (4.8) und gibt es einen Eigenwert von $D\Phi(x_0) \in \mathbb{K}^{N \times N}$ über \mathbb{C} mit positivem Realteil, so ist die Ruhelage x_0 **instabil**.

Bemerkung. Besitzt $D\Phi(x_0) \in \mathbb{K}^{N \times N}$ einen Eigenwert mit Realteil Null, aber keinen Eigenwert mit positivem Realteil, so kann man mit den Linearisierungskriterien nicht über die Stabilität der Ruhelage x_0 entscheiden. Tatsächlich hängt in diesem Fall die Stabilität von x_0 nicht nur vom Erster-Ordnung-Verhalten von Φ nahe x_0 , sondern auch von Effekten höherer Ordnung ab, und insbesondere gibt es daher kein nicht-lineares Analogon zu Teil (II) des linearen Satzes 4.1.

Anwendung. Im Fall der Pendelgleichungen (4.6) mit der Strukturfunktion $\Phi(\varphi, v) = \begin{pmatrix} \ell^{-1}v \\ -g \sin \varphi \end{pmatrix}$ lässt sich ein Teil der schon verifizierten Ergebnisse mit Satz 4.4 noch einmal bestätigen: Bei den Ruhelagen $((2k+1)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ der Pendelgleichungen weist $D\Phi((2k+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \ell^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix}$ den positiven Eigenwert $\sqrt{g\ell^{-1}}$ auf, also liefert Satz 4.4 (II) erneut die Instabilität dieser ‚oberen‘ Ruhelagen. Bei den Ruhelagen $(2k\pi, 0)$ dagegen besitzt $D\Phi(2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \ell^{-1} \\ -g & 0 \end{pmatrix}$ die beiden rein imaginären Eigenwerte $\pm i\sqrt{g\ell^{-1}}$, und mit Satz 4.4 allein lässt sich über die Stabilität dieser ‚unteren‘ Ruhelagen keine Aussage treffen.

Zum Abschluss dieses Kapitels wird Teil (I) von Satz 4.4 nun mit zwei verschiedenen Methoden bewiesen, einmal mit Hilfe von Ljapunov-Funktionen und ein weiteres Mal mit Hilfe eines Lemmas über Differentialungleichungen. Teilaussagen von Teil (II) des Satzes können mit denselben Methoden verifiziert werden, ein vollständiger Beweis von (II) ist aber technisch etwas aufwendiger und wird hier nicht durchgeführt; stattdessen sei zum Beispiel auf [6, §29.VIII] verwiesen.

Erster Beweis von Satz 4.4 (I) mit Ljapunov-Funktionen. Ohne Einschränkung sei $x_0 = 0$, und es sei

$$A := D\Phi(0) \in \mathbb{K}^{N \times N}$$

abgekürzt. Da $\Phi(0)$ verschwindet, gilt gemäß dem Satz von Taylor $\Phi(x) = Ax + o(|x|)$ bei $x \rightarrow 0$, und insbesondere gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ (das unten geeignet fixiert wird) eine offene Nullumgebung V in D mit

$$|\Phi(x) - Ax| \leq \varepsilon|x| \quad \text{für alle } x \in V. \quad (4.9)$$

Obwohl als Nächstes noch ein allgemeineres Argument ausgeführt wird, sei die wesentliche Beweisstrategie zuerst im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit symmetrischem A illustriert. In diesem Fall sind alle

Eigenwerte von A reell und negativ, die Inverse A^{-1} existiert als ebenfalls symmetrische Matrix mit lauter negativen reellen Eigenwerten, und durch

$$L(x) := -x \cdot A^{-1}x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^N$$

ist eine positiv definite quadratische Form L auf \mathbb{R}^N gegeben. Insbesondere besitzt $L \in C^1(V, \mathbb{R})$ eine strikte Minimalstelle bei 0 und erfüllt $\nabla L(x) = -2A^{-1}x$ für $x \in V$. Unter Verwendung von (4.9) mit $\varepsilon = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$ folgt

$$\begin{aligned} \partial_{\Phi} L(x) &= -2A^{-1}x \cdot Ax - 2A^{-1}x \cdot [\Phi(x) - Ax] \\ &\leq -2x \cdot A^{-1}Ax + 2\|A^{-1}\| |x| |\Phi(x) - Ax| \\ &\leq -2|x|^2 + |x|^2 < 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in V \setminus \{0\}$. Damit ist L eine Ljapunov-Funktion des Systems (4.8) auf V , für die Satz 4.3 (II) anwendbar ist, und es folgt asymptotische Stabilität der Null-Ruhelage. Für symmetrisches $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ist der Beweis damit vollständig.

Als Nächstes wird der allgemeine reelle Fall $K = \mathbb{R}$ ohne Zusatzvoraussetzung an A behandelt. Obige Argumentation greift dann nicht mehr, da es bei nicht-symmetrischem A keine Form L mit $\nabla L(x) \cdot y = -x \cdot A^{-1}y$ gibt. Als Ersatz reicht allerdings eine Funktion L , die dieser Gleichung nur für $y = Ax$ genügt, also $\nabla L(x) \cdot Ax = -|x|^2$ erfüllt, und eine quadratische Form L mit der letzten Eigenschaft kann tatsächlich mit Hilfe eines Integrationstricks explizit angegeben werden. Dazu argumentiert man wie folgt. Da alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, sind gemäß Korollar 3.10 (I) alle Einträge der Fundamentalmatrix $e^{tA} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ komplexe Linearkombinationen von Termen der Form $t^j e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda < 0$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es folgt, dass $\|e^{tA}\|$ bei $t \rightarrow \infty$ exponentiell schnell gegen 0 konvergiert, und damit ist insbesondere

$$M := \int_0^{\infty} \|e^{tA}\|^2 dt < \infty. \quad (4.10)$$

Durch

$$L(x) := \int_0^{\infty} |e^{tA}x|^2 dt \quad \text{für } x \in V$$

erhält man folglich eine wohldefinierte quadratische Form L auf \mathbb{R}^N mit strikter Minimalstelle 0 (denn wegen der Invertierbarkeit von e^{tA} ist $|e^{tA}x| > 0$ für $x \neq 0$) und mit

$$\nabla L(x) \cdot y = 2 \int_0^{\infty} e^{tA}x \cdot e^{tA}y dt \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Unter Verwendung der Regel $\frac{d}{dt}e^{tA} = e^{tA}A$, der Abschätzung (4.9) mit $\varepsilon = \frac{1}{4M}$, des HDI und der Wahl (4.10) ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_{\Phi} L(x) &= 2 \int_0^{\infty} e^{tA}x \cdot e^{tA}Ax dt + 2 \int_0^{\infty} e^{tA}x \cdot e^{tA}[\Phi(x) - Ax] dt \\ &\leq \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}|e^{tA}x|^2 dt + \frac{1}{2M} \int_0^{\infty} \|e^{tA}\|^2 dt |x|^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{tA}x|^2 - |x|^2 + \frac{1}{2}|x|^2 \\ &= -\frac{1}{2}|x|^2 < 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in V \setminus \{0\}$. Damit ist auch im allgemeinen Fall eine Ljapunov-Funktion L des Systems (4.8) auf V gefunden, für die sich Satz 4.3 (II) anwenden lässt, und es folgt die Behauptung.

Im komplexen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lassen sich ähnliche Rechnungen durchführen, wegen des Auftretens des *reellen* Skalarprodukts in (4.3) gelangen diese Rechnungen aber nicht gleichermaßen elegant, und es besteht die Gefahr von Verwechslungen. Um solche Probleme zu vermeiden, bietet es sich an, den komplexen Fall auf den reellen Fall zurückzuführen, indem man komplexe Vektoren $v + \mathfrak{i}w \in \mathbb{C}^N$ mit reellen Vektoren $(v, w) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{2N}$ identifiziert und das System $u' = \Phi(u)$ von N komplexen GDGen als System von $2N$ reellen GDGen auffasst. Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ist dabei mit einer reellen $(2N \times 2N)$ -Matrix zu identifizieren, indem man jeden komplexen Eintrag $a + \mathfrak{i}b \in \mathbb{C}$ durch den Block $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ersetzt, und aus den N Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ (bei Vielfachheit > 1 entsprechend mehrfach gelistet) der komplexen Matrix A entstehen die $2N$ Eigenwerte $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}, \dots, \lambda_N, \overline{\lambda_N} \in \mathbb{C}$ der neuen reellen Matrix A . Die Bedingung, dass alle Eigenwerte negativen Realteil besitzen, bleibt also erhalten, und nach dem bereits Gezeigten ist die Null-Ruhelage des Systems $u' = \Phi(u)$ asymptotisch stabil. Da diese Stabilitätseigenschaft nicht davon abhängt, ob das System über \mathbb{R} oder \mathbb{C} betrachtet wird, ist der Beweis vollständig. \square

Bemerkung. Die *Instabilität* einer Ruhelage $x_0 \in D$ von (4.8) mit $A := D\Phi(x_0) \in \mathbb{K}^{N \times N}$ lässt sich mit Hilfe von Ljapunov-Funktionen L ähnlich wie im Vorausgehenden nachweisen ...

- wenn $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symmetrisch ist, 0 kein Eigenwert von A ist und mindestens ein Eigenwert von A positiv ist. Im Fall $x_0 = 0$ kann man dann nach wie vor $L(x) = -x \cdot A^{-1}x$ verwenden.
- wenn $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ ausschließlich Eigenwerte mit positivem Realteil besitzt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ kann man dann mit $L(x) = -\int_0^\infty |e^{-tA}x|^2 dt$ arbeiten; der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lässt sich darauf zurückführen.

Man erhält also Teilaussagen von Teil (II) des Satzes 4.4, ein Nachweis der vollen Aussage gelingt jedoch nicht ohne Weiteres.

Eine andere Methode zum Beweis von Satz 4.4 (I) basiert auf einem bekannten Lemma über die Differentialungleichung (4.11) (die hier zwar eigentlich als *Integralungleichung* erscheint; aber, wie sich bereits beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf angedeutet hat, besteht da kaum ein Unterschied). Das Lemma besitzt verschiedene Varianten und etliche weitere Anwendungen, und wird auch im späteren Abschnitt 2.5 noch einmal aufgegriffen.

Lemma (Gronwall-Lemma). Gegeben seien $-\infty < t_0 < \omega_0 \leq \infty$, $a, b \in C^0([t_0, \omega_0], [0, \infty))$ und $s_0 \in [0, \infty)$. Erfüllt $\varphi \in C^0([t_0, \omega_0], \mathbb{R})$ dann die Differentialungleichung

$$\varphi(t) \leq s_0 + \int_{t_0}^t [a(s)\varphi(s) + b(s)] ds \quad \text{für alle } t \in (t_0, \omega_0), \quad (4.11)$$

so folgt die Abschätzung

$$\varphi(t) \leq e^{A(t)} \left[e^{-A(t_0)} s_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right] \quad \text{für alle } t \in [t_0, \omega_0) \quad (4.12)$$

mit einer Stammfunktion $A \in C^0([t_0, \omega_0))$ von a .

Bemerkung. Tritt in (4.11) sogar Gleichheit ein, so ist die resultierende Integralgleichung äquivalent zum skalaren AWP $\varphi' = a\varphi + b$, $\varphi(t_0) = s_0$, dessen Lösung bekanntlich durch die rechte Seite von (4.12) gegeben ist. Das Lemma besagt also im Wesentlichen, dass sich Lösungen einer Differentialungleichung durch Lösungen der zugehörigen Differentialgleichung abschätzen lassen. In Anbetracht dieses Zusammenhangs scheint die Aussage des Lemmas sehr plausibel und ist leicht zu merken.

Beweis des Lemmas. Zunächst wird der Fall $b \equiv 0$ behandelt (der für den Beweis von Satz 4.4 (I) übrigens schon ausreicht). Es genügt dabei, $s_0 > 0$ zu betrachten, denn der Fall $s_0 = 0$ folgt daraus durch einen Grenzprozess. Außerdem lässt sich $\varphi \geq 0$ annehmen, denn andernfalls kann man φ unter Erhaltung der Ungleichung (4.11) durch $\max\{\varphi, 0\}$ ersetzen. Durch die Festlegung $\Psi(t) := s_0 + \int_{t_0}^t a(s)\varphi(s) ds$ erhält man nun eine positive stetige Funktion Ψ auf $[t_0, \omega_0)$, und gemäß dem HDI und (4.11) mit $b \equiv 0$ erfüllt diese $\Psi' = a\Psi \leq a\Psi$ auf (t_0, ω_0) sowie $\Psi(t_0) = s_0$. Unter erneuter Anwendung des HDI erhält man

$$\log \Psi(t) - \log s_0 = \int_{t_0}^t \frac{\Psi'(s)}{\Psi(s)} ds \leq \int_{t_0}^t a(s) ds = A(t) - A(t_0) \quad \text{für alle } t \in [t_0, \omega_0).$$

Durch Exponentieren der resultierenden Ungleichung und Multiplikation mit s_0 ergibt sich

$$\Psi(t) \leq e^{A(t)-A(t_0)} s_0 \quad \text{für alle } t \in [t_0, \omega_0).$$

In Anbetracht von $\varphi \leq \Psi$ folgt hieraus die Behauptung im Fall $b \equiv 0$.

Bei beliebigem $b \in C^0([t_0, \omega_0), [0, \infty))$ arbeitet man, ähnlich wie schon in Abschnitt 1.1, mit den Hilfsfunktionen $B(t) := \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds$ und $\tilde{\varphi} := \varphi - e^A B$. Mit partieller Integration, den Identitäten $B(t_0) = 0$ und $e^A B' = b$ sowie der Voraussetzung (4.11) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} s_0 + \int_{t_0}^t a(s)\tilde{\varphi}(s) ds &= s_0 + \int_{t_0}^t a(s)\varphi(s) ds - \int_{t_0}^t a(s)e^{A(s)}B(s) ds \\ &= s_0 + \int_{t_0}^t a(s)\varphi(s) ds - e^{A(t)}B(t) + e^{A(t_0)}B(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(s)}B'(s) ds \\ &= s_0 + \int_{t_0}^t [a(s)\varphi(s) + b(s)] ds - e^{A(t)}B(t) \\ &\geq \varphi(t) - e^{A(t)}B(t) = \tilde{\varphi}(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in (t_0, \omega_0)$. Somit ist die Voraussetzung (4.11) für $\tilde{\varphi}$ anstelle von φ mit $b \equiv 0$ erfüllt, und mit dem bereits Gezeigten ergibt sich erst $\tilde{\varphi}(t) \leq e^{A(t)-A(t_0)} s_0$ für alle $t \in [t_0, \omega_0)$ und dann die behauptete Ungleichung für φ . \square

Zweiter Beweis von Satz 4.4 (I) mit dem Gronwall-Lemma. Ohne Einschränkung sei $x_0 = 0$, und es sei erneut

$$A := D\Phi(0) \in \mathbb{K}^{N \times N}$$

abgekürzt. Wie im vorigen Beweis begründet, stellt die Bedingung an die Eigenwerte von A sicher, dass $\|e^{sA}\|$ bei $s \rightarrow \infty$ exponentiell schnell gegen 0 konvergiert, und insbesondere gibt es daher ein $\gamma > 0$ und ein $M \in (0, \infty)$ mit

$$\|e^{sA}\| \leq M e^{-\gamma s} \quad \text{für alle } s \in [0, \infty). \quad (4.13)$$

Gemäß dem Satz von Taylor gibt es außerdem eine offene, beschränkte Nullumgebung V , so dass

$$|\Phi(x) - Ax| \leq \frac{\gamma}{2M}|x| \quad \text{für alle } x \in V \quad (4.14)$$

erfüllt ist, und für $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in V$ bezeichne im Folgenden $u: (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{K}^N$ die maximale Lösung des AWP's $u' = \Phi(u)$, $u(t_0) = y_0$. Die entscheidende Beweisidee ist es nun, das nicht-lineare GDG-System in der Form

$$u' = Au + [\Phi(u) - Au]$$

zu schreiben und als lineares GDG-System mit der von u abhängigen Inhomogenität $b(s) := [\Phi(u(s)) - Au(s)]$ aufzufassen. Bei dieser Betrachtungsweise kann die Lösungsformel (3.5) mit der Fundamentalmatrix $W(s) = e^{sA}$ und ihrer Inversen $W(s)^{-1} = e^{-sA}$ angewandt werden, und nach Anwendung des Exponentialgesetzes ergibt sich

$$u(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}[\Phi(u(s)) - Au(s)] ds \quad \text{für alle } t \in (\alpha, \omega)$$

Falls u auf $[t_0, \omega)$ nicht in V bleibt, so bezeichne im Folgenden $\omega_0 \in (t_0, \omega)$ die kleinste Zeit mit $u(\omega_0) \notin V$. Falls u in V bleibt, so garantiert der Satz über die maximale Lösung, dass $\omega = \infty$ gilt, und dann sei auch $\omega_0 := \infty$. In jedem Fall ist dann $u((t_0, \omega_0)) \subset V$, und mit Hilfe von (4.13) und (4.14) ergibt sich aus der vorausgehenden Lösungsformel die Abschätzung

$$|u(t)| \leq Me^{-\gamma(t-t_0)}|y_0| + \frac{\gamma}{2} \int_{t_0}^t e^{-\gamma(t-s)}|u(s)| ds \quad \text{für alle } t \in (t_0, \omega_0).$$

Für die Hilfsfunktion $\varphi(s) := e^{\gamma s}|u(s)|$ bedeutet dies

$$\varphi(t) \leq Me^{\gamma t_0}|y_0| + \frac{\gamma}{2} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \quad \text{für alle } t \in (t_0, \omega_0).$$

Das Gronwall-Lemma (mit $a \equiv \frac{\gamma}{2}$, $b \equiv 0$, $s_0 = Me^{\gamma t_0}|y_0|$) liefert daraus

$$\varphi(t) \leq e^{\frac{\gamma}{2}(t-t_0)}Me^{\gamma t_0}|y_0| \quad \text{für alle } t \in [t_0, \omega_0),$$

und für die Lösung u erhält man

$$|u(t)| \leq e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_0)}M|y_0| \quad \text{für alle } t \in [t_0, \omega_0).$$

Man wählt nun eine Nullumgebung $U \subset V$ mit $\{sy : s \in [0, M), y \in U\} \subset V$. Liegt dann y_0 in U und ist $\omega_0 < \infty$, so impliziert die vorige Abschätzung $u(\omega_0) \in V$ und steht damit im Widerspruch zur Wahl von ω_0 mit $u(\omega_0) \notin V$. Für $y_0 \in U$ gilt also $\omega_0 = \infty$, und die Lösung u existiert auf $[t_0, \infty)$ mit $u([t_0, \infty)) \subset V$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0$. Damit ist die asymptotische Stabilität der Null-Ruhelage gezeigt, und die Behauptung ist nachgewiesen. \square

Bemerkung. Die Instabilität einer Ruhelage $x_0 \in D$ von (4.8) lässt sich mit Hilfe eines Gronwall-Lemmas nachweisen, wenn der größte Realteil γ eines Eigenwerts von $A := D\Phi(x_0) \in \mathbb{K}^{N \times N}$ positiv ist und für alle Eigenwerte mit Realteil γ die geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen. Unter diesen Voraussetzungen gibt es nämlich eine Konstante $M \in (0, \infty)$ mit $M^{-1}e^{\gamma s} \leq \|e^{sA}\| \leq Me^{\gamma s}$ für alle $s \in [0, \infty)$, und man kann Lösungen mit gewissen, beliebig nah an x_0 gelegenen Anfangsdaten ähnlich wie im vorausgehenden Beweis (aber jetzt von unten statt von oben) abschätzen. Man erhält erneut eine Teilaussage von Teil (II) des Satzes, ein Nachweis der vollen Aussage gelingt jedoch nicht ohne Weiteres.

Kapitel 2

Die Hauptsätze der Theorie (Fortsetzung)

Wie schon früher in diesem Kapitel sei \mathcal{X} stets Banach-Raum über \mathbb{K} mit Norm $|\cdot| = \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$.

2.4 Der Existenzsatz von Peano

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einem allgemeinen Existenzsatz für AWP, der den aus Abschnitt 2.1 bekannten Satz von Picard-Lindelöf teilweise verbessert.

Hauptsatz 2.5 (Lokaler Existenzsatz von Peano). *Sei $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{X} < \infty$, sei $f \in C^0(D, \mathcal{X})$ eine stetige Strukturfunktion auf offenem $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{X}^m$, und sei $(t_0, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}) \in D$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass das AWP*

$$u^{(m)} = f(\cdot, u^{[m-1]}), \quad u^{[m-1]}(t_0) = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$$

auf $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ mindestens eine Lösung besitzt.

Bemerkung. Der Vorteil dieses Satzes gegenüber dem Satz von Picard-Lindelöf liegt darin, dass keine pLB als Voraussetzung benötigt wird. Der Nachteil besteht neben der Einschränkung auf endlich-dimensionale \mathcal{X} vor allem darin, dass man nur Existenz, aber keine Eindeutigkeit erhält. In Anbetracht des Gegenbeispiels aus Abschnitt 2.1 kann man Eindeutigkeit aber auch nicht erwarten, wenn f nur als stetig vorausgesetzt wird.

Der Beweis von Hauptsatz 2.5 macht entscheidenden Gebrauch von folgendem, aus der Analysis bekannten Kompaktheitssatz im Funktionenraum $C^0(I, \mathcal{X})$.

Satz (von Arzelà-Ascoli). *Sei I kompaktes Intervall in \mathbb{R} , sei $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{X} < \infty$, und sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $C^0(I, \mathcal{X})$. Ist $(u_k(t_0))_{k \in \mathbb{N}}$ für ein $t_0 \in I$ beschränkte Folge in \mathcal{X} und sind die u_k auf I gleichgradig stetig⁶, so konvergiert eine Teilfolge $(u_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $u \in C^0(I, \mathcal{X})$.*

⁶Gleichgradige Stetigkeit der u_k auf I bedeutet, dass es zu jedem $x \in I$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle $\tilde{x} \in I$ mit $|\tilde{x} - x| < \delta$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $|u_k(\tilde{x}) - u_k(x)| < \varepsilon$.

Insbesondere liegt gleichgradige Stetigkeit der u_k auf I vor, wenn alle u_k auf I eine Lipschitz-Bedingung mit derselben Konstante erfüllen.

Beweis von Hauptsatz 2.5. Ohne Einschränkung sei $m = 1$, und es seien positive Größen δ und r mit $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_r(y_0) \subset D$ fixiert. Sei außerdem $M := 1 + \max_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_r(y_0)} |f|$ und $\varepsilon := \min\{\delta, r/M\} > 0$. Der Beweis basiert nun auf der Konstruktion von stückweise affinen Näherungslösungen $u_k \in C^0([t_0, t_0 + \varepsilon])$ mit dem **Polygonzug-Verfahren von Euler und Cauchy**. Dazu zerlegt man für fixiertes $k \in \mathbb{N}$ das Intervall $(t_0, t_0 + \varepsilon]$ durch Zwischenstellen $t_i := t_0 + \frac{i}{k}\varepsilon$ in die k Teilintervalle $(t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ und definiert u_k mit $u_k(t_0) := y_0$ auf den Teilintervallen sukzessive durch

$$u_k(t) := u_k(t_i) + f(t_i, u_k(t_i))(t - t_i) \quad \text{für } t \in (t_i, t_{i+1}].$$

Es folgt $u'_k \equiv f(t_i, u_k(t_i))$ auf (t_i, t_{i+1}) , in Anbetracht der Wahl $\varepsilon = \min\{\delta, r/M\}$ bleibt $(t, u_k(t))$ für $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_r(y_0)$, und bis auf die Knickstellen t_i gilt $|u'_k| \leq M$ auf $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ (denn $|u'_k| \leq M$ gilt zunächst solange u_k in $\overline{B}_r(y_0)$ bleibt, und damit kann u_k die Kugel $\overline{B}_r(y_0)$ auf $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ überhaupt nicht verlassen). Insbesondere ist u_k auf $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ Lipschitz-stetig mit Konstante M . Für $t \in (t_i, t_{i+1})$ gelten nun $|t - t_i| \leq \frac{\varepsilon}{k}$ und $|u_k(t) - u_k(t_i)| \leq \frac{M\varepsilon}{k}$, und mit der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf dem Kompaktum $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_r(y_0)$ ergibt sich daraus die näherungsweise Lösungseigenschaft

$$u'_k(t) = f(t_i, u_k(t_i)) = f(t, u_k(t)) + o(1) \quad (2.10)$$

bei $k \rightarrow \infty$, wobei die resultierende Gleichung für alle $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ bis auf die Knickstellen t_i mit gleichmäßig kontrolliertem $o(1)$ -Störterm gültig bleibt. Wegen $u_k(t_0) = y_0$ und der gleichmäßigen Lipschitz-Stetigkeit der u_k konvergiert nach Arzelà-Ascoli eine Teilfolge $(u_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ gegen ein $u \in C^0([t_0, t_0 + \varepsilon], \mathcal{X})$ mit $u(t_0) = y_0$. Mit dieser gleichmäßigen Konvergenz, dem HDI, (2.10) und erneut der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_r(y_0)$ folgt

$$u(t) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} u_{k_\ell}(t) = y_0 + \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t u'_{k_\ell}(s) ds = y_0 + \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, u_{k_\ell}(s)) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

für alle $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$. Ableiten auf beiden Seiten der letzten Gleichung gibt $u \in C^1([t_0, t_0 + \varepsilon], \mathcal{X})$ und die erstrebte Lösungseigenschaft $u' = f(\cdot, u)$ auf $[t_0, t_0 + \varepsilon]$. Analog beweist man die Existenz einer Lösung auf $[t_0 - \varepsilon, t_0]$. \square

2.5 Stetige Abhängigkeit und der Stetigkeitssatz

Dieser Abschnitt behandelt die Stabilität von Lösungen und ihre Abhängigkeit von gegebenen Anfangs- und Strukturdaten. Im Gegensatz zu Kapitel 4 geht es hier allerdings ausschließlich um Lösungen auf kompakten Intervallen, also um die **Stabilität von Lösungen gegen Störungen bei Vorliegen eines endlichen Zeithorizonts**. Ähnlich wie in Kapitel 4 sind solche Untersuchungen nur dann sinnvoll, wenn (zumindest für die ungestörte Lösung) Eindeutigkeit

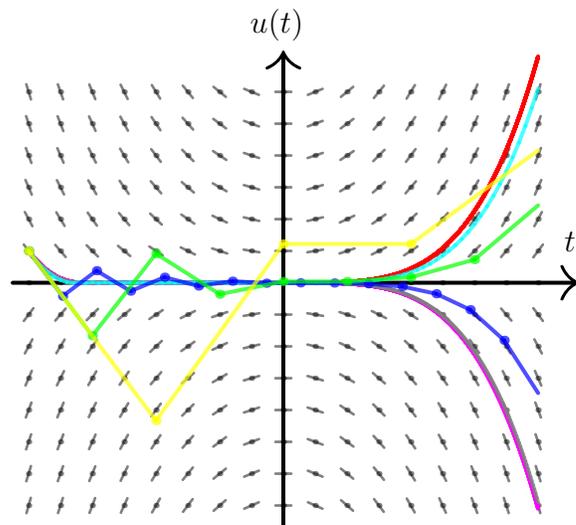


Abb. 11: Steigungsfeld und Näherungslösungen u_k mit $k = 4, 8, 15, 80, 400, 8000, 25000$ zum nicht-eindeutig lösbarsten, skalaren AWP $u' = \frac{1}{6}t \operatorname{sign}(u)\sqrt{|u|}$, $u(-8) = 1$ auf $[-8, 8]$.

vorliegt. Daher wird im Folgenden die für den Satz von Picard-Lindelöf benötigte partielle Lipschitz-Bedingung (pLB) stets angenommen.

Hauptsatz 2.6 (Stetige Abhängigkeit von den Daten auf kompakten Intervallen). *Sei D offen in $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$, für $f \in C^0(D, \mathcal{X})$ gelte lokal auf D eine pLB bezüglich der \mathcal{X} -Variablen, und sei $(t_0, y_0) \in D$. Ist dann u eine Lösung des AWP*

$$u' = f(\cdot, u), \quad u(t_0) = y_0 \quad (2.11)$$

auf einem kompakten Intervall I positiver Länge, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $L \in (0, \infty)$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Wann immer $\tilde{f} \in C^0(V, \mathcal{X})$ auf einer offenen Umgebung V von $\text{Graph}(u)$ in D eine pLB bezüglich der \mathcal{X} -Variablen mit Konstante L erfüllt und zusammen mit den gestörten Daten $\tilde{t}_0 \in I$, $\tilde{y}_0 \in \mathcal{X}$ den Bedingungen

$$|\tilde{t}_0 - t_0| < \delta, \quad |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta, \quad \max_{\text{Graph}(u)} |\tilde{f} - f| < \delta \quad (2.12)$$

genügt, so existiert die (eindeutige) Lösung \tilde{u} des gestörten AWP

$$\tilde{u}' = \tilde{f}(\cdot, \tilde{u}), \quad \tilde{u}(\tilde{t}_0) = \tilde{y}_0 \quad (2.13)$$

auf ganz I und erfüllt

$$\max_I |\tilde{u} - u| < \varepsilon.$$

Bemerkungen.

- (1) **Hauptsatz 2.6 besagt im Wesentlichen, dass die Lösung des AWP (2.11) stetig von der Strukturfunktion f und den Anfangsdaten t_0 und y_0 abhängt.**
- (2) Eine genauere Analyse des folgenden Beweises zeigt, dass δ proportional zu ε gewählt werden kann und damit sogar eine lokal Lipschitz-stetige Abhängigkeit vorliegt.
- (3) Der Übersichtlichkeit halber wurde der Hauptsatz nur für den Erster-Ordnung-Fall angegeben. Für Systeme höherer Ordnung gilt aber ein völlig analoger Sachverhalt; dies sieht man wie üblich mit dem Verfahren der Reduktion auf Ordnung 1.
- (4) Mit einer geringfügigen Modifikation des folgenden Beweises kann man auch eine Version des Hauptsatzes erhalten, bei der δ eine etwas natürlichere Abhängigkeit aufweist: Es hängt dann nicht von der Konstante in der pLB für die gestörte Strukturfunktion \tilde{f} , sondern vielmehr der in der pLB für die ursprüngliche Strukturfunktion f auf der offenen Umgebung V von $\text{Graph}(u)$ ab. Um dies erreichen zu können, muss allerdings die letzte Bedingung in (2.12) zur Forderung $\sup_V |\tilde{f} - f| < \delta$ auf der Umgebung V verstärkt werden, was für manche Anwendungen — beispielsweise die Ableitung des folgenden Korollars 2.8 — zu einschränkend ist.

Beweis von Hauptsatz 2.6. Seien die Daten beider AWP des Satzes und die Lösung u sowie ε und L gegeben. Sei außerdem V die offene Umgebung von $\text{Graph}(u)$, auf der die pLB mit Konstante L für \tilde{f} gilt. Da die kompakte Teilmenge $\text{Graph}(u) \subset V$ positiven Abstand zum Komplement von V hat, lässt sich, eventuell nach Verkleinerung von ε , die Inklusion $\{t\} \times B_\varepsilon(u(t)) \subset V$ für alle $t \in I$ erreichen. Außerdem sei angenommen, dass $\delta > 0$ zwar noch nicht völlig fixiert, aber jedenfalls ausreichend klein ist, um $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0) \in V$ zu gewährleisten. Sei

dann $\tilde{u}: (\alpha, \omega) \rightarrow \mathcal{X}$ die eindeutige maximale Lösung des gestörten AWP (2.13) mit $-\infty \leq \alpha < \tilde{t}_0 < \omega \leq \infty$, und sei $(\alpha_0, \omega_0) \subset (\alpha, \omega)$ das größte Intervall um \tilde{t}_0 mit $(t, \tilde{u}(t)) \in V$ für alle $t \in (\alpha_0, \omega_0)$. Wird nun die Gültigkeit der Kleinheitsbedingungen (2.12) mit dem noch zu fixierendem δ angenommen, so ergibt sich für $t \in (\alpha_0, \omega_0) \cap I$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(t) - u(t)| &= \left| \tilde{y}_0 + \int_{\tilde{t}_0}^t \tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) \, ds - y_0 - \int_{\tilde{t}_0}^t f(s, u(s)) \, ds - \int_{\tilde{t}_0}^t f(s, u(s)) \, ds \right| \\ &\leq |\tilde{y}_0 - y_0| + |\tilde{t}_0 - t_0| \max_{\text{Graph}(u)} |f| + \int_{\tilde{t}_0}^t \left(|\tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) - \tilde{f}(s, u(s))| + \max_{\text{Graph}(u)} |\tilde{f} - f| \right) ds \\ &\leq \delta M + \int_{\tilde{t}_0}^t [L|\tilde{u}(s) - u(s)| + \delta] \, ds, \end{aligned}$$

wobei $M := 1 + \max_{\text{Graph}(u)} |f|$ abgekürzt wurde. Auf die Hilfsfunktion

$$\varphi := |\tilde{u} - u|$$

kann nun das Gronwall-Lemma angewandt werden. Genauer wird dabei die Version dieses Lemmas aus Abschnitt 4.3 (mit $s_0 = M\delta$, $a \equiv L$, $b \equiv \delta$) auf $[\tilde{t}_0, \omega_0) \cap I$ und eine entsprechende Variante auf $(\alpha_0, \tilde{t}_0] \cap I$ angewandt. Nach kurzer Rechnung ergibt sich

$$\varphi(t) \leq \delta(M + L^{-1})e^{L|t - \tilde{t}_0|} - \delta L^{-1} \leq \delta(M + L^{-1})e^{L|I|} \quad \text{für alle } t \in (\alpha_0, \omega_0) \cap I$$

mit der endlichen Länge $|I|$ des *kompakten* Intervalls I . An dieser Stelle kann δ (abhängig von M , L , $|I|$, ε) so klein fixiert werden, dass zusätzlich zur oben verwendeten Inklusion $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0) \in V$ die Ungleichung $\delta(M + L^{-1})e^{L|I|} \leq \varepsilon/2$ gilt. Wäre nun $\omega > \omega_0 \in I$, so stünde $\varphi(\omega_0) \leq \varepsilon/2$ und damit $(\omega_0, \tilde{u}(\omega_0)) \in \{\omega_0\} \times B_\varepsilon(u(\omega_0)) \subset V$ im Widerspruch zur Wahl von ω_0 mit $(\omega_0, u(\omega_0)) \notin V$. Die Möglichkeit $\omega = \omega_0 \in I$ kann man im Fall $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{X} < \infty$ ebenfalls schnell ausschließen, denn die Inklusion $(t, \tilde{u}(t)) \in K_\varepsilon := \bigcup_{s \in I} [\{s\} \times \overline{B}_{\varepsilon/2}(u(s))]$ für alle $t \in [\tilde{t}_0, \omega)$ mit dem dann kompakten $K_\varepsilon \subset V$ stünde im Widerspruch zum Satz über die maximale Lösung. Um den Fall $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{X} = \infty$ mitzubehandeln, muss man allerdings etwas sorgfältiger argumentieren, beispielsweise wie folgt. Zunächst ist \tilde{f} beschränkt auf dem Kompaktum $\text{Graph}(u) \subset V$. Wäre nun $\omega = \omega_0 \in I$, so bliebe wegen der Inklusion $(t, \tilde{u}(t)) \in \{t\} \times \overline{B}_{\varepsilon/2}(u(t)) \subset V$ für $t \in [\tilde{t}_0, \omega)$ und der pLB für \tilde{f} auf V auch $\tilde{f}(t, \tilde{u}(t))$ bei $t \nearrow \omega$ beschränkt. Gemäß der GDG für \tilde{u} ist letzteres gleichbedeutend damit, dass $\tilde{u}'(t)$ bei $t \nearrow \omega$ beschränkt bleibt, und wie im Beweis des Satzes über die maximale Lösung könnte man nun auf die Existenz von $y_\omega := \lim_{t \nearrow \omega} \tilde{u}(t) \in \overline{B}_{\varepsilon/2}(u(\omega))$ schließen. Wegen $(\omega, y_\omega) \in \{\omega\} \times B_\varepsilon(u(\omega)) \subset V$ ließe sich der Satz von Picard-Lindelöf auf das AWP mit AB $\tilde{u}(\omega) = y_\omega$ anwenden, und man könnte \tilde{u} als Lösung über ω hinaus fortsetzen. Dies stünde im Widerspruch zur Wahl von (α, ω) als maximales Lösungsintervall. Insgesamt ist damit sowohl $\omega > \omega_0 \in I$ als auch $\omega = \omega_0 \in I$ ausgeschlossen, und es verbleibt nur die Alternative, dass $\omega_0 \notin I$ gilt. Mit analogem Vorgehen erhält man $\alpha_0 \notin I$. Folglich ist $I \subset (\alpha_0, \omega_0)$, und \tilde{u} existiert auf ganz I mit

$$\max_I |\tilde{u} - u| = \max_I \varphi < \varepsilon. \quad \square$$

Als Nächstes soll der vorausgehende Satz statt auf ein einzelnes GDG-System auf eine Parameter-abhängige Familie solcher Systeme angewandt werden. Konkret geht es dabei um GDG-Systeme für \mathcal{X} -wertige u

$$u' = f(\cdot, u; p) \quad (2.14)$$

mit Parameter p , der in einer Grundmenge \mathcal{P} läuft, und mit p -abhängiger Strukturfunktion $f: D \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ auf $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{X}$. In diesem Kontext werden nun folgende Begriffe eingeführt, die insbesondere auch im Fall eines einzelnen GDG-Systems, d.h. für einelementiges \mathcal{P} sinnvoll sind.

Definition 2.7 (Lebensdauerfunktionen, charakteristische Funktionen). Seien \mathcal{P} eine Menge und D offen in $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$, und für jedes $p \in \mathcal{P}$ genüge $f(\cdot; p) \in C^0(D, \mathcal{X})$ lokal auf D einer pLB in der \mathcal{X} -Variablen. Für beliebige Daten $(\tau, y) \in D$, $p \in \mathcal{P}$ bezeichne $u(\cdot; \tau, y; p)$ die maximale \mathcal{X} -wertige Lösung des AWP

$$u' = f(\cdot, u; p), \quad u(\tau) = y$$

auf dem maximalen Lösungsintervall $(\alpha(\tau, y; p), \omega(\tau, y; p))$. Man nennt die durch diese Konvention gegebenen Abbildungen $\alpha: D \times \mathcal{P} \rightarrow [-\infty, \infty)$ und $\omega: D \times \mathcal{P} \rightarrow (-\infty, \infty]$ die Lebensdauerfunktionen des Parameter-abhängigen Systems (2.14), und die \mathcal{X} -wertige Abbildung

$$(t; \tau, y; p) \mapsto u(t; \tau, y; p)$$

auf $D_u := \{(t; \tau, y; p) \in \mathbb{R} \times D \times \mathcal{P} : \alpha(\tau, y; p) < t < \omega(\tau, y; p)\}$ heißt die charakteristische Funktion des Systems (2.14).

Unter minimal stärkeren Annahmen (nämlich, wenn \mathcal{P} eine Metrik trägt, f auch in p stetig ist und die pLB lokal gleichmäßig in p erfüllt) lässt sich die durch Hauptsatz 2.6 garantierte stetige Abhängigkeit von der Strukturfunktion $f(\cdot; p)$ nun in eine stetige Abhängigkeit vom Parameter p selbst umwandeln. Dies führt — zusammen mit der unverändert gültigen stetigen Abhängigkeit von Anfangsdaten und der Stetigkeit von Lösungen selbst — zu folgenden Aussagen.

Korollar 2.8 (Stetigkeitssatz). Sei \mathcal{P} metrischer Raum, sei D offen in $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$, und erfülle $f \in C^0(D \times \mathcal{P}, \mathcal{X})$ lokal auf $D \times \mathcal{P}$ eine pLB in der \mathcal{X} -Variablen. Dann ist die untere Lebensdauerfunktion α von (2.14) oberhalbstetig auf $D \times \mathcal{P}$, die obere Lebensdauerfunktion ω ist unterhalbstetig auf $D \times \mathcal{P}$, der Definitionsbereich D_u der charakteristischen Funktion ist offen, und die charakteristische Funktion u von (2.14) ist darauf stetig.

Bemerkungen.

- (1) Das Korollar überträgt sich auf (Parameter-abhängige) GDG-Systeme höherer Ordnung.
- (2) **Die Ober- und Unterhalbstetigkeit von α und ω besagt, dass sich das maximale Existenzintervall bei kleinen Störungen der Anfangsdaten oder des Parameters nur wenig verkleinern, aber eventuell stark vergrößern kann.** Bei Grenzübergängen $(\tau, y; p) \rightarrow (\tau_0, y_0; p_0)$ bedeutet dies gerade umgekehrt, dass sich das maximale Existenzintervall nicht sprunghaft vergrößern, aber eventuell plötzlich verkleinern kann.

Trotz der zuvor beschriebenen einfachen Grundidee ist ein detaillierter Beweis des Korollars nicht völlig trivial. Daher wird er nun genauer ausgeführt:

Beweis von Korollar 2.8. Seien $(\tau_0, y_0) \in D$, $p_0 \in \mathcal{P}$ fixiert, und seien die Abkürzungen $\alpha_0 := \alpha(\tau_0, y_0; p_0)$, $\omega_0 := \omega(\tau_0, y_0; p_0)$ und $u_0 := u(\cdot; \tau_0, y_0; p_0)$ für die Grenzen des maximalen Lösungsintervalls und die maximale Lösung des AWP zu diesen Daten vereinbart. Seien außerdem $t_0 \in (\alpha_0, \omega_0)$, ein beliebiges kompaktes Intervall I mit $t_0 \in I \subset (\alpha_0, \omega_0)$ sowie $\varepsilon > 0$ gegeben. Mit einem Überdeckungsargument findet man eine Umgebung V des Kompaktums $\text{Graph}(u_0|_I)$ in D und ein $\delta_1 > 0$, so dass f global auf $V \times B_{\delta_1}(p_0)$ einer pLB mit fester Konstante $L \in (0, \infty)$ genügt. Nun kann Hauptsatz

2.6 für das AWP mit Strukturfunktion $f(\cdot; p_0)$ und Daten (τ_0, y_0) auf dem kompakten Intervall I angewendet werden. Zu ε und L liefert der Hauptsatz ein $\delta_2 > 0$, so dass für $(\tau, y) \in D$, $p \in \mathcal{P}$ und das zugehörige gestörte AWP die Implikation

$$\left. \begin{array}{l} |\tau - \tau_0| < \delta_2 \\ |y - y_0| < \delta_2 \\ d(p, p_0) < \delta_1 \\ \sup_{t \in I} |f(t, u_0(t); p) - f(t, u_0(t); p_0)| < \delta_2 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \alpha(\tau, y; p) \leq \text{linkerRandpunkt}(I) \\ \omega(\tau, y; p) \geq \text{rechterRandpunkt}(I) \\ \max_{t \in I} |u(t; \tau, y; p) - u_0(t)| < \varepsilon \end{array} \right.$$

gilt. Hierbei soll auch die letzte Bedingung der Hypothese nun auf eine explizite Kleinheitsbedingung für $d(p, p_0)$ zurückgeführt werden, und dies erfordert ein weiteres Überdeckungsargument. Tatsächlich kann das kompakte Intervall I durch endliche viele Kugeln $B_{\delta_3}(t_1), B_{\delta_3}(t_2), \dots, B_{\delta_3}(t_n)$ mit festem Radius $\delta_3 > 0$ überdeckt werden, so dass $|f(t, u_0(t), p) - f(t, u_0(t), p_0)| < \frac{1}{2}\delta_2$ für alle $t \in B_{\delta_3}(t_i) \cap I$ und $p \in B_{\delta_3}(p_0)$ gilt (wobei Stetigkeit von f in Punkten $(t, u(t), p_0)$, $t \in I$ ausgenutzt wurde). Durch Einschieben eines Terms $f(t_i, u_0(t_i), p_0)$ und eine Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt sich dann für alle $t \in I$ und $p \in \mathcal{P}$ der gewünschte Zusammenhang

$$d(p, p_0) < \delta_3 \implies |f(t, u_0(t), p) - f(t, u_0(t), p_0)| < \delta_2.$$

Insgesamt ist damit für $(\tau, y) \in D$ und $p \in \mathcal{P}$ die Implikation

$$\left. \begin{array}{l} |\tau - \tau_0| < \delta_2 \\ |y - y_0| < \delta_2 \\ d(p, p_0) < \min\{\delta_1, \delta_3\} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \alpha(\tau, y; p) \leq \text{linkerRandpunkt}(I) \\ \omega(\tau, y; p) \geq \text{rechterRandpunkt}(I) \\ \max_{t \in I} |u(t; \tau, y; p) - u_0(t)| < \varepsilon \end{array} \right. \quad (2.15)$$

verifiziert, und aus (2.15) liest man nun die Behauptungen ab. Da der linke Randpunkt von I beliebig nah an α_0 gewählt werden kann, ergibt sich mit $\limsup_{(\tau, y; p) \rightarrow (\tau_0, y_0; p_0)} \alpha(\tau, y; p) \leq \alpha_0$ die Oberhalbstetigkeit von α . Analog folgt Unterhalbstetigkeit von ω , und als direkte Konsequenz ergibt sich, dass der Definitionsbereich D_u aus Definition 2.7 offen ist. Schließlich erhält man aus (2.15) und der Stetigkeit von u_0 noch $\lim_{(t; \tau, y; p) \rightarrow (t_0; \tau_0, y_0; p_0)} u(t; \tau, y; p) = \lim_{t \rightarrow t_0} u_0(t) = u_0(t_0)$ und somit die Stetigkeit der charakteristischen Funktion u . \square

2.6 Der Differenzierbarkeitssatz

Dieser Abschnitt beschäftigt sich weiterhin mit Parameter-abhängigen GDG-Systemen für \mathcal{X} -wertige u

$$u' = f(\cdot, u; p) \quad (2.16)$$

mit Parameter $p \in \mathcal{P}$ und p -abhängiger Strukturfunktion $f: D \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ auf $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{X}$. Statt um *stetige* Abhängigkeit wie im vorigen Abschnitt 2.5 geht es nun aber um stetig *differenzierbare* Abhängigkeit oder m.a.W. um C^1 -Abhängigkeit der Lösungen beziehungsweise der charakteristischen Funktion u aus Definition 2.7 von der Zeitvariablen t , von Anfangsdaten (τ, y) und vom Parameter p (wobei die Frage nach differenzierbarer Abhängigkeit von p nur Sinn macht, wenn \mathcal{P} Teilmenge eines normierten Raums ist). Tatsächlich wird eine solche C^1 -Abhängigkeit der charakteristischen Funktion unter recht allgemeinen, aber im Vergleich zu Abschnitt 2.5 etwas stärkeren Voraussetzungen durch den folgenden Satz sichergestellt.

Hauptsatz 2.9 (Differenzierbarkeitssatz). *Sei \mathcal{P} offene Teilmenge eines normierten Raums \mathcal{Z} , sei D offen in $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$, und die Parameter-abhängige Strukturfunktion $f \in C^0(D \times \mathcal{P}, \mathcal{X})$ besitze stetige Ableitungen $D_x f \in C^0(D \times \mathcal{P}, \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}))$ und $D_p f \in C^0(D \times \mathcal{P}, \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{X}))$ nach den Variablen $x \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P} \subset \mathcal{Z}$. Dann ist die charakteristische Funktion u des Parameter-abhängigen Systems (2.16) stetig differenzierbar auf ihrem (gemäß Stetigkeitssatz offenen) Definitionsbereich D_u , es gilt also $u \in C^1(D_u, \mathcal{X})$.*

Bemerkungen.

- (1) Die Existenz und Stetigkeit von $D_x f$ implizieren die in Abschnitt 2.5 vorausgesetzte lokale pLB bezüglich x . Somit sind Definition 2.7 und der Stetigkeitssatz aus Korollar 2.8 anwendbar, und insbesondere sind die Lebensdauerfunktionen und die charakteristische Funktion in der Situation des Hauptsatzes wohldefiniert.

- (2) Der Hauptsatz gilt analog für (Parameter-abhängige) GDG-Systeme höherer Ordnung.
- (3) Die im Satz enthaltene C^1 -Abhängigkeit der charakteristischen Funktion von der Zeitvariablen t bedeutet nichts anderes als, dass alle Lösungen C^1 -Funktionen sind, und dies gilt (fast) trivial. Zwar sind die in dieser Vorlesung betrachteten Lösungen per Definition 0.1 zunächst nur differenzierbar, nicht stetig differenzierbar, aber aus der Gültigkeit der Gleichung (2.16) folgt direkt, dass u' stetig und jede Lösung u somit C^1 ist. **Die entscheidenden Aussagen des Hauptsatzes sind daher die über C^1 -Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsdaten (τ, y) und dem Parameter p .**

Übrigens zeigt dieselbe Argumentation, dass Lösungen u schon C^1 (in t) sind, wenn f nur stetig von den Variablen $(t, x) \in D$ abhängt (aber weder eine Differenzierbarkeitsvoraussetzung an f noch überhaupt irgendeine Annahme über seine Abhängigkeit von p gemacht wird). In ähnlicher Weise folgt auch für beliebiges $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dass Lösungen u sogar C^k (in t) sind, wenn f nur C^{k-1} von (t, x) abhängt; vergleiche auch mit dem Beweis des folgenden Korollars 2.10.

- (4) Unter den Voraussetzungen von Hauptsatz 2.9 besitzen die partiellen Ableitungen $\partial_\tau u \in C^0(D_u, \mathcal{X})$, $D_y u \in C^0(D_u, \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}))$, $D_p u \in C^0(D_u, \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{X}))$ der charakteristischen Funktion u selbst wieder stetige Ableitungen $\partial_\tau u' \in C^0(D_u, \mathcal{X})$, $D_y u' \in C^0(D_u, \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}))$ und $D_p u' \in C^0(D_u, \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{X}))$ nach der t -Variablen (wobei für Ableitungen bezüglich dieser t -Variablen der übliche Ableitungsstrich notiert wird). Dies sieht man durch Differenzieren der GDG

$$u'(t; \tau, y; p) = f(t, u(t; \tau, y; p); p)$$

nach τ, y, p , Verwendung der Kettenregel und Vertauschen der Differentiations-Reihenfolge. Differenziert⁷ man mit der GDG auch die AB $u(\tau; \tau, y; p) = y$, so erhält man außerdem Charakterisierungen von $\partial_\tau u$, $D_y u$, $D_p u$ als Lösungen der abgeleiteten AWP

$$\begin{aligned} \partial_\tau u'(t) &= D_x f(t, u(t; \tau, y, p); p) \partial_\tau u(t), & \partial_\tau u(\tau) &= -f(\tau, y, p), \\ D_y u'(t) &= D_x f(t, u(t; \tau, y, p); p) D_y u(t), & D_y u(\tau) &= \text{id}_{\mathcal{X}}, \\ D_p u'(t) &= D_x f(t, u(t; \tau, y, p); p) D_p u(t) + D_p f(t, u(t; \tau, y, p); p), & D_p u(\tau) &= 0 \end{aligned}$$

(der Übersichtlichkeit halber ohne die Argumente τ, y, p von $\partial_\tau u, D_y u, D_p u$ notiert).

Mit den AWPen der letzten Bemerkung und iterativer Anwendung des Hauptsatzes ergibt sich bei entsprechend regulärer Strukturfunktion auch die folgende Aussage über Höherer-Ordnung-differenzierbare Abhängigkeit von Anfangsdaten und Parametern.

Korollar 2.10 (C^k -Differenzierbarkeitssatz). *Ist $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und ist unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes $f \in C^{k-1}(D \times \mathcal{P}, \mathcal{X})$ bezüglich (x, p) sogar von der Klasse C^k mit auf $D \times \mathcal{P}$ stetigen Ableitungen, so folgt $u \in C^k(D_u, \mathcal{X})$.*

Beweis von Korollar 2.10. Man argumentiert durch Induktion nach $k \in \mathbb{N}$ (und erhält den Fall $k = \infty$ dann als direkte Konsequenz). Der Induktionsanfang für $k = 1$ ist dabei schon durch den Hauptsatz erledigt. Für den Induktionsschluss sei das Korollar für ein $k \in \mathbb{N}$ richtig, und es sei $f \in C^k(D \times \mathcal{P}, \mathcal{X})$ bezüglich (x, p) sogar von der Klasse C^{k+1} mit auf $D \times \mathcal{P}$

⁷Die Differentiation der AB nach τ ergibt gemäß folgender Rechnung unter Verwendung von (2.16) die Identität $0 = \frac{d}{d\tau} u(\tau; \tau, y; p) = u'(\tau; \tau, y; p) + \partial_\tau u(\tau) = f(\tau, u(\tau; \tau, y; p); p) + \partial_\tau u(\tau) = f(\tau, y; p) + \partial_\tau u(\tau)$. Die anderen relevanten Rechnungen sind noch deutlich einfacher.

stetigen Ableitungen. Gemäß der angenommenen Version des Korollars ist dann $u \in C^k(D_u, \mathcal{X})$. Außerdem erfüllt $\partial_\tau u$ das zugehörige AWP der vorausgehenden Bemerkung (4) mit der durch $\tilde{f}(t, x; \tau, y, p) := D_x f(t, u(t; \tau, y, p); p) x$ definierten (τ, y, p) -abhängigen Strukturfunktion $\tilde{f} \in C^{k-1}(D \times D \times \mathcal{P})$, die bezüglich den Parametern (τ, y, p) sogar C^k mit auf $D \times D \times \mathcal{P}$ stetigen Ableitungen ist. Unter erneuter Verwendung der angenommenen Version des Korollars und, weil auch der Anfangswert $-f(\tau, y, p)$ eine C^k -Abhängigkeit von (τ, y, p) aufweist, erhält man also $\partial_\tau u \in C^k(D_u, \mathcal{X})$. Eine analoge Argumentation mit den anderen beiden AWPen der Bemerkung (4) liefert $D_y u \in C^k(D_u, \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}))$ und $D_p u \in C^k(D_u, \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{X}))$, und direkt aus der Gleichung (2.16) ergibt sich $u' \in C^k(D_u, \mathcal{X})$. Also sind alle Erster-Ordnung-Ableitungen von u von der Klasse C^k , und u selbst ist somit C^{k+1} auf D_u . Dies vervollständigt die Induktion und den Beweis des Korollars. \square

Es bleibt noch der Hauptsatz zu beweisen. Aus Zeitgründen wird der Beweis im Rahmen dieser Vorlesung aber nicht mehr im Detail ausgeführt, sondern nur sehr kurz angedeutet:

Beweisidee zu Hauptsatz 2.9. Aus (2.16) lässt sich ein **lineares GDG-System für Differenzenquotienten** bezüglich der τ -Variablen

$$u_h(t; \tau, y; p) := \frac{u(t; \tau+h, y, p) - u(t; \tau, y, p)}{h}$$

ableiten. Dieses (τ, y, p, h) -abhängige System ist von der Form $u'_h = A(\cdot; \tau, y, p, h) u_h$ mit für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierter, in allen Parametern stetiger Koeffizientenfunktion A . Es gilt nun zu zeigen, dass A für $h = 0$ stetig durch $D_x f(t, u(t; \tau, y, p); p)$ fortgesetzt wird und zudem $\lim_{h \rightarrow 0} u_h(\tau; \tau, y; p) = -f(\tau, y; p)$ gilt. Sind diese Tatsachen einmal verifiziert, so garantiert der Stetigkeitssatz aus Korollar 2.8, dass die charakteristische Funktion u_0 des Grenz-AWPes $u'_0 = D_x f(t, u(t; \tau, y, p); p) u_0$, $u_0(\tau) = -f(\tau, y, p)$ stetig von $(t; \tau, y, p)$ abhängt und sich als Grenzwert von u_h bei $h \rightarrow 0$ ergibt. Insbesondere existiert also der Grenzwert der Differenzenquotienten und damit die partielle Ableitung $\partial_\tau u = \lim_{h \rightarrow 0} u_h = u_0 \in C^0(D_u, \mathcal{X})$. In ähnlicher Weise verifiziert man die Existenz und Stetigkeit von $D_y u$ und $D_p u$, Stetigkeit von u' erhält man — wie zuvor schon begründet — (sehr) einfach. Da alle Erster-Ordnung-Ableitungen von u existieren und stetig sind, ist u von der Klasse C^1 . \square

Literaturverzeichnis

Die vorliegende Ausarbeitung basiert zu großen Teilen auf Vorlesungsskripten von F. DUZAAR, A. KNAUF und K. STEFFEN. Daneben wurden auch einige der folgenden deutschsprachigen Bücher über GDGen verwendet:

- [1] B. AULBACH, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Spektrum, 1997.
- [2] H. AMANN, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. De Gruyter, 1995.
- [3] V.I. ARNOLD, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 2001.
- [4] W. FORST, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 2005.
- [5] H. HEUSER, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Vieweg+Teubner, 2009.
- [6] W. WALTER, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 2000.