Differentialgeometrie

Oliver Goertsches
Universität Hamburg

Skript der Vorlesung im SoSe 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Gute Referenzen für dieses erste Kapitel sind [4] und [12].

1.1 Topologische Grundbegriffe

Definition 1.1.1. *Eine* Topologie *auf einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{O}$ von ausgezeichneten Teilmengen von X, genannt* in X offene Mengen, *mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$\emptyset$ und X sind offen in X (d.h. Elemente von $\mathcal{O}$)*
2. *die beliebige Vereinigung in X offener Mengen ist offen in X (d.h. falls $U_i \in \mathcal{O}$, mit $i \in I$ einer beliebigen Indexmenge, impliziert $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$).*
3. *der endliche Durchschnitt in X offener Mengen ist offen in X (d.h., $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}$ impliziert $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{O}$).*

Das Paar $(X, \mathcal{O})$ heißt topologischer Raum. *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt* abgeschlossen in X, *wenn $X \setminus A$ offen in X ist.*

Bemerkung 1.1.2. *Wir werden die Menge $\mathcal{O}$ in der Notation oft unterdrücken, und X allein als topologischen Raum bezeichnen.*

Definition 1.1.3. *Ist X ein topologischer Raum, $p \in X$, und $U \subset X$ in X offen, so nennen wir U auch eine* offene Umgebung *von p.*

Eine wichtige Klasse von topologischen Räumen ist durch metrische Räume gegeben: Ist (X, d) ein metrischer Raum, so sei eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X dadurch definiert, dass wir eine Teilmenge $U \subset X$ als offen in X bezeichnen, wenn für alle $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset X$. Hier ist $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ der *(offene) ε-Ball um x.*

Beispiel 1.1.4. *Durch die Standardnorm auf $\mathbb{R}^n$ wird $\mathbb{R}^n$ zu einem metrischen, und damit auch zu einem topologischen Raum. Diese Topologie auf $\mathbb{R}^n$ nennen wir die* Standardtopologie *auf $\mathbb{R}^n$. Sprechen wir von $\mathbb{R}^n$ als topologischem Raum und erwähnen keine andere Topologie, dann ist immer die Standardtopologie gemeint.*

Andererseits ist nicht jede Topologie auf einer Menge derart durch eine Metrik induziert, was wir beispielsweise mit Hilfe des Begriffs des Hausdorffraumes einsehen können:

Definition 1.1.5. *Es sei X ein topologischer Raum. Dann nennen wir X* Hausdorffsch*, falls zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ zwei disjunkte, in X offene Mengen $U, V \subset X$ mit $x \in U$ und $y \in V$ existieren.*

Jede durch eine Metrik induzierte Topologie ist Hausdorffsch: sind $x, y \in X$ verschiedene Punkte, so sind $U := B_{d(x,y)/2}(x)$ und $V := B_{d(x,y)/2}(y)$ disjunkte, in X offene Mengen, die x und y trennen (dies folgt aus der Dreiecksungleichung).

Beispiel 1.1.6. *Auf jeder Menge X ist die sogenannte* Klumpentopologie *dadurch definiert, dass nur $\emptyset$ und X offen in X sind. Hat X mehr als ein Element, so ist X mit dieser Topologie nicht Hausdorffsch, und demnach ist diese Topologie auch nicht durch eine Metrik induziert.*

Bemerkung 1.1.7. *Es wird sich herausstellen, dass Mannigfaltigkeiten, die wir als gewisse topologische Räume definieren werden, immer eine Metrik zulassen, die die gegebene Topologie induziert. Pathologische Beispiele wie die Klumpentopologie werden also in dieser Vorlesung keine Rolle spielen.*

Beliebige Teilmengen eines topologischen Raumes erben eine natürliche Topologie:

Definition 1.1.8. *Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren die* Teilraumtopologie *(auch* induzierte Topologie *oder* Relativtopologie*) von Y in X wie folgt: eine Menge $V \subset Y$ soll offen in Y sein, wenn eine in X offene Menge $U \subset X$ mit $V = U \cap Y$ existiert.*

Beispiel 1.1.9. *Wir betrachten das in $\mathbb{R}$ (versehen mit der Standardtopologie) abgeschlossene Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Bezüglich der Teilraumtopologie ist beispielsweise $(\frac{1}{2}, 1]$ offen in $[0, 1]$, da wir $(\frac{1}{2}, 1] = [0, 1] \cap (\frac{1}{2}, 2)$ schreiben können, und $(\frac{1}{2}, 2)$ offen in $\mathbb{R}$ ist.*

Genau wie für $\mathbb{R}^n$ selbst gilt: ist keine Topologie explizit erwähnt, dann versehen wir Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit der durch die Standardtopologie induzierten Topologie.

Dieses Beispiel zeigt: Wenn wir von offenen Mengen sprechen, dann ist es sehr wichtig, dass immer klar ist, in welchem Raum die jeweilige Menge offen ist. Zum Beispiel ist jede Teilmenge Y eines topologischen Raumes X offen in Y selbst, wenn wir Y mit der Teilraumtopologie versehen, aber nicht unbedingt offen in X.

Es ist auch möglich, eine Topologie auf einem Raum zu definieren, ohne explizit die gesamte Familie der offenen Mengen anzugeben. Wir definieren dazu:

Definition 1.1.10. *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U}$ eine Familie von Teilmengen von X. Dann heißt $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ eine* Basis *des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$, wenn jedes Element aus $\mathcal{O}$ eine (beliebige) Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{U}$ ist. $\mathcal{U}$ heißt* Subbasis *von $(X, \mathcal{O})$, wenn die Menge aller endlichen Durchschnitte von Mengen in $\mathcal{U}$ eine Basis von $(X, \mathcal{O})$ bildet.*

Man beachte, dass die leere Menge und der ganze Raum X nicht in $\mathcal{U}$ enthalten sein muss, damit $\mathcal{U}$ eine Subbasis ist, da nach Konvention die Vereinigung einer leeren Menge von Teilmengen leer ist, und der Durchschnitt einer leeren Menge von Teilmengen der ganze Raum ist.

Beispiel 1.1.11. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist eine Basis von X durch die Menge aller ε-Bälle um alle Punkte aus X gegeben. Es genügt sogar, nur Bälle vom Radius $1/n$ zu betrachten.*

Es gilt nun:

Satz 1.1.12. *Ist X eine Menge und $\mathcal{U}$ eine Familie von Teilmengen von X, dann existiert eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X, so dass $\mathcal{U}$ eine Subbasis von $(X, \mathcal{O})$ ist.*

Beweis. Es sei $\mathcal{O}$ die Menge der beliebigen Vereinigungen über endliche Durchschnitte von Elemente aus $\mathcal{U}$; man kann dann zeigen, dass dies eine Topologie auf X definiert. $\square$

Wir nennen diese Topologie auch die *von $\mathcal{U}$ erzeugte Topologie* auf X.

Definition 1.1.13. *Wir sagen, dass ein topologischer Raum X das* zweite Abzählbarkeitsaxiom *erfüllt, wenn er eine höchstens abzählbare Basis besitzt.*

Bemerkung 1.1.14. *Es gibt auch ein erstes Abzählbarkeitsaxiom, welches fordert, dass es zu jedem Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis gibt: jede offene Umgebung des Punktes enthält eine Menge der Umgebungsbasis. Dies ist eine lokale Bedingung an X, die durch das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert wird.*

Beispiel 1.1.15. *Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Wir definieren die* Produkttopologie *auf $X \times Y$ als die durch die Familie von Teilmengen der Form $U \times V$, wobei $U \in \mathcal{O}_X$ und $V \in \mathcal{O}_Y$, erzeugte Topologie. Da $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$, ist $\mathcal{U}$ abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten; daher ist $\mathcal{U}$ sogar eine Basis der Produkttopologie auf $X \times Y$.*

Wir kommen nun zu Abbildungen zwischen topologischen Räumen.

Definition 1.1.16. *Es seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* stetig*, wenn $f^{-1}(U)$ für alle in Y offenen Mengen U offen in X ist. Ist f zusätzlich bijektiv und $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig, so heißt f ein Homöomorphismus, und wir nennen X und Y* homöomorph.

Ist X ein topologischer Raum, Y eine Menge, und $f : X \to Y$ eine Abbildung, so gibt es im Allgemeinen viele Topologien auf Y, bezüglich derer f stetig wird (z.B. ist f immer stetig, wenn wir Y mit der Klumpentopologie versehen). Die feinste dieser Topologien (d.h. die mit den meisten offenen Mengen) wird als Quotiententopologie bezeichnet:

Definition 1.1.17. *Es sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge, und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist die* Quotiententopologie bezüglich *f auf Y folgendermaßen definiert: Eine Menge $U \subset Y$ ist genau dann offen in Y, falls $f^{-1}(U)$ in X offen ist.*

Häufig wendet man diese Konstruktion auf folgendes Beispiel an: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einem topologischen Raum X, so erhalten wir eine natürliche Abbildung $\pi : X \to X/_\sim$ in den Raum der Äquivalenzklassen. Der „Quotient" $X/_\sim$ kann nun mit der Quotiententopologie bezüglich π versehen werden.

Weitere wichtige Eigenschaften von topologischen Räumen sind:

Definition 1.1.18. *Ein topologischer Raum X heißt* kompakt*, falls jede Überdeckung von X durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Definition 1.1.19. *Ein topologischer Raum X heißt* zusammenhängend*, falls für zwei disjunkte offene Mengen $U, V \subset X$ mit $U \cup V = X$ gilt, dass $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.*

Definition 1.1.20. *Ein topologischer Raum X heißt* wegzusammenhängend*, falls für alle $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $c : [0,1] \to M$ existiert, so dass $c(0) = x$ und $c(1) = y$.*

1.2 Der Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit

In diesem Kapitel werden wir den Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit einführen.

Definition 1.2.1. *Eine* topologische Mannigfaltigkeit *der Dimension n ist ein nichtleerer Hausdorffscher topologischer Raum M, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so dass zu jedem Punkt $p \in M$ eine in M offene Umgebung U und ein Homöomorphismus $\varphi : U \to V$ zwischen U und einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ existiert. Wir nennen (U, φ) eine* Karte *von M.*

Bemerkung 1.2.2. *Man kann zeigen: falls offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ homöomorph sind, so gilt $n = m$.*

Definition 1.2.3. *Ein* (C^∞)-Atlas $\mathcal{A}$ *auf einer topologischen Mannigfaltigkeit M ist eine Familie $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ von Karten von M, so dass*

1. *$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ und*
2. *$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ ist C^∞ für alle $\alpha, \beta \in A$. (Die Abbildungen $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ heißen* Karten- *oder* Koordinatenwechsel.*)*

Erfüllt $\mathcal{A}$ außerdem

3. *$\mathcal{A}$ ist maximal in dem Sinne, dass eine Karte (U, φ) bereits zu $\mathcal{A}$ gehört, falls $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to \varphi(U \cap U_\alpha)$ und $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \mathrm{U}_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ für alle $\alpha \in A$ C^∞ ist.*

so heißt $\mathcal{A}$ eine (C^∞)-differenzierbare Struktur.

Definition 1.2.4. *Eine n-*dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit *ist ein Paar $(M, \mathcal{A})$, wobei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ eine differenzierbare Struktur auf M ist.*

Bemerkung 1.2.5. *Ist $(M, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so gibt es einen abzählbaren Atlas $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$: Da M das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, können wir eine höchstens abzählbare Basis der Topologie von M wählen. Die Elemente der Basis, auf denen eine Karte aus $\mathcal{A}$ definiert ist, bilden immer noch eine Überdeckung von M; wählen wir nun für jede solche offene Menge eine Karte aus $\mathcal{A}$, so erhalten wir einen höchstens abzählbaren Atlas.*

In der Übung werden wir sehen: Ist $\mathcal{A}_0$ ein C^∞-Atlas auf einer topologischen Mannigfaltigkeit M, so gibt es eine eindeutige differenzierbare Struktur $\mathcal{A}$, so dass $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$. Genauer: man setzt $\mathcal{A} = \{(U, \varphi) \mid \varphi \circ \eta^{-1} : \eta(U \cap W) \to \varphi(U \cap W)$ und $\eta \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \to \eta(U \cap W)$ sind C^∞ für alle $(W, \eta) \in \mathcal{A}_0\}$ und zeigt, dass $\mathcal{A}$ eine differenzierbare Struktur ist. $\mathcal{A}$ heißt *die durch $\mathcal{A}_0$ induzierte differenzierbare Struktur.*

Bemerkung 1.2.6.

1. *Kervaire hat 1960 bewiesen [5], dass es topologische Mannigfaltigkeiten gibt, die keine differenzierbare Struktur besitzen.*

2. *Statt C^∞-Atlanten und differenzierbaren Strukturen kann man C^k-Atlanten und differenzierbare Strukturen ($1 \leq k < \infty$) betrachten, oder auch analytische. Auch wenn für einen Großteil der Theorie in dieser Vorlesung eine schwächere Differenzierbarkeit als C^∞ vonnöten sein wird, werden wir uns mit diesen technischen Details nicht aufhalten, und immer C^∞ voraussetzen.*

Beispiel 1.2.7.

1. *Die* gewöhnliche differenzierbare Struktur *auf $\mathbb{R}^n$ wird durch den Atlas*
$$\mathcal{A}_0 = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$$
induziert.

2. *Die differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}$, die durch $\mathcal{A}_0 = \{(\mathbb{R}, f(x) = x^3)\}$ induziert wird, stimmt nicht mit der Standardstruktur überein.*

3. *Es sei*
$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$
die Einheitssphäre *im $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir konstruieren einen Atlas auf S^n wie folgt: Es sei $N = (0, \ldots, 0, 1)$ der Nordpol und $S = (0, \ldots, 0, -1)$ der Südpol. Wir definieren die* stereographischen Projektionen *durch*
$$\sigma : S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n;\ (x, x_{n+1}) \mapsto \frac{x}{1 - x_{n+1}}$$
und
$$\eta : S^n \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n;\ (x, x_{n+1}) \mapsto \frac{x}{1 + x_{n+1}}.$$
Man kann zeigen, dass σ und η Homöomorphismen sind, und Wir müssen zeigen, dass $\{\sigma, \eta\}$ ein Atlas ist, d.h., dass $\sigma \circ \eta^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist. Es gilt
$$\eta^{-1}(x) = \left(\frac{2x}{1 + |x|^2}, \frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2} \right),$$

und damit

$$\sigma \circ \eta^{-1}(x) = \frac{\frac{2x}{1+|x|^2}}{1 - \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}} = \frac{x}{|x|^2},$$

was ein Diffeomorphismus $\eta(S^n \setminus \{N, S\}) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *ist.*

4. *Jede offene Teilmenge einer n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit; als Karten nimmt man die Einschränkungen aller Karten auf die offene Teilmenge.*

5. *Es sei* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ *die allgemeine lineare Gruppe. Es gilt, dass* $M(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$*, und da* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ *das Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist, ist* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *eine offene Teilmenge von* $M(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ *und damit eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

6. *Sind* $(M, \mathcal{A})$ *und* $(N, \mathcal{B})$ *differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so ist*

$$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta) \mid (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A},\ (V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{B}\}$$

ein differenzierbarer Atlas auf $M \times N$ *(keine differenzierbare Struktur). Die differenzierbare Mannigfaltigkeit mit der induzierten differenzierbaren Struktur heißt die* Produktmannigfaltigkeit *von* M *und* N*.*

Einige von Ihnen werden den Begriff der Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^k$ bereits kennen. Wir erwähnen hier zu Vergleichszwecken eine von mehreren möglichen äquivalenten Definitionen dieses Begriffs:

Definition 1.2.8. *Eine nichtleere Teilmenge* $M \subset \mathbb{R}^k$ *heißt* n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$*, wenn es zu jedem Punkt* $p \in M$ *eine offene Umgebung* $U \subset \mathbb{R}^k$ *und einen Diffeomorphismus* $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^k$ *gibt, so dass*

$$\varphi(M \cap U) = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^k \mid x_{n+1} = \ldots = x_k = 0\} \cap V.$$

Es sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$. Wir versehen M mit der Teilraumtopologie des $\mathbb{R}^k$. Wir können die Abbildungen φ in der Definition jeweils auf $M \cap U$ einschränken, und erhalten (indem wir ebenfalls den Zielraum auf $\mathbb{R}^n \cong \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^k \mid x_{n+1} = \ldots = x_k = 0\}$ einschränken) induzierte Abbildungen $\tilde{\varphi} : M \cap U \to \mathbb{R}^n$. Diese definieren einen Atlas für M, und M wird somit zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Ein Vorteil der Begriff der Mannigfaltigkeit gegenüber dem Begriff der Untermannigfaltigkeit besteht in seiner größeren Flexibilität: manche Konstruktionen, die man auf Mannigfaltigkeiten durchführen möchte, wären ohne Weiteres nicht auf Untermannigfaltigkeiten möglich, so z.B. Quotientenkonstruktionen:

Beispiel 1.2.9 (Der *n-dimensionale reelle projektive Raum* $\mathbb{R}P^n$)**.** *Wir definieren auf* $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ *die Äquivalenzrelation* $x \sim y \Leftrightarrow \mathbb{R}x = \mathbb{R}y$*, d.h.* x *und* y *sind äquivalent, falls sie auf einer Ursprungsgeraden im* $\mathbb{R}^{n+1}$ *liegen, und setzen (zunächst als Menge)*

$$\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim.$$

Äquivalent können wir $\mathbb{R}P^n$ *auch als* $S^n/_\sim$ *definieren, wobei* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *die Einheitssphäre im* $\mathbb{R}^{n+1}$ *ist. Auf* S^n *besteht jede Äquivalenzklasse aus genau* *zwei Punkten, nämlich jeweils aus Antipodenpaaren. Elemente aus $\mathbb{R}P^n$ können als Ursprungsgeraden aufgefasst werden, und dementsprechend können wir sie folgendermaßen bezeichnen: Ist $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, so bezeichnen wir die Ursprungsgerade durch x mit $[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{R}P^n$. Man beachte, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt, dass*

$$[x_0 : \ldots : x_n] = [\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n], \tag{1.2.1}$$

und wenn $[x_0 : \ldots : x_n] = [y_0 : \ldots : y_n]$, dann existiert $\lambda \neq 0$, so dass $x_i = \lambda y_i$ für alle i.

Wir versehen $\mathbb{R}P^n$ mit der Quotiententopologie von S^n, d.h.: wir betrachten die Projektion $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ und definieren eine Menge $U \subset \mathbb{R}P^n$ als offen, wenn ihr Urbild $\pi^{-1}(U)$ offen ist. $\mathbb{R}P^n$ ist als stetiges Bild eines kompakten topologischen Raumes ebenfalls kompakt, außerdem ist $\mathbb{R}P^n$ Hausdorffsch.

Definiere nun offene Teilmengen von $\mathbb{R}P^n$ durch

$$U_i := \{[x_0 : \ldots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$$

und Abbildungen $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi_i([x_0 : \ldots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

Beachte, dass diese Abbildungen aufgrund von (1.2.1) *wohldefiniert sind, und dass die Umkehrabbildung $\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_i$ durch*

$$\varphi_i^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = [x_1 : \ldots : x_i : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n]$$

gegeben ist. Um zu zeigen, dass $\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 0, \ldots, n\}$ einen Atlas auf $\mathbb{R}P^n$ definiert, berechnen wir die Kartenwechsel $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq 0\} \to \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_i([x_1 : \ldots : x_j : 1 : x_{j+1} : \ldots : x_n]) \\ &= \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_j}{x_i}, \frac{1}{x_i}, \frac{x_{j+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right),\end{aligned}$$

wobei wir für diese Rechnung $i < j$ vorausgesetzt haben. Diese Abbildung ist offensichtlich differenzierbar.

Mit der induzierten differenzierbaren Struktur wird $\mathbb{R}P^n$ zu einer differenzierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Man beachte, dass die Untermannigfaltigkeitsstruktur von S^n den reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ nicht auf offensichtliche Weise zu einer Untermannigfaltigkeit macht.

1.3 Differenzierbare Abbildungen

Definition 1.3.1. *Sind M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, dann heißt eine stetige Abbildung $f : M \to N$* differenzierbar *(oder auch* glatt*), wenn $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta)$ für alle Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (V_β, ψ_β) von M bzw. N differenzierbar (d.h. C^∞) ist. Bezeichnung: $C^\infty(M, N)$.*

Man zeigt leicht, dass es für die Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : M \to N$ genügt, die Differenzierbarkeit obiger Funktionen für gewählte Atlanten auf M und N zu testen. Beispielsweise ist eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ (wobei $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen differenzierbaren Struktur versehen ist) genau dann differenzierbar, falls $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}$ für alle Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ von M differenzierbar (d.h. C^∞) ist. (Hier haben wir $\mathbb{R}$ selbstverständlich mit der gewöhnlichen differenzierbaren Struktur versehen betrachtet.) Bezeichnung: $C^\infty(M)$.

Definition 1.3.2. *Ein* Diffeomorphismus *ist eine bijektive Abbildung $f : M \to N$, so dass f und f^{-1} differenzierbar sind. Existiert ein Diffeomorphismus zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N, so heißen M und N* diffeomorph.

Bemerkung 1.3.3. *Zwei differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}^n$ führen zu diffeomorphen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, falls $n \neq 4$. Es gibt überabzählbar viele differenzierbare Mannigfaltigkeiten, die zu $\mathbb{R}^4$ homöomorph sind, aber paarweise nicht diffeomorph (siehe [10] - die Existenz solcher exotischer $\mathbb{R}^4$ wurde zuvor von Donaldson und Freedman bewiesen).*

Auf Sphären gibt es ähnlich erstaunliche Resultate, hier in vielen Dimensionen: beispielsweise gibt es 28 differenzierbare Mannigfaltigkeiten, die zu S^7 homöomorph, aber paarweise nicht (orientierungserhaltend) diffeomorph sind, siehe [8]. (Für S^8 sind es 2, für S^9 8, für S^{10} 6, für S^{11} 992, etc.)

1.4 Der Tangentialraum

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und $p \in M$. Wir möchten den Tangentialraum an M im Punkte p definieren. Anders als beim Begriff der Untermannigfaltigkeit haben wir allerdings keinen umgebenden Raum zur Verfügung, der uns hilft, den Tangentialraum als Unterraum zu verstehen.

Zur Motivation betrachten wir zunächst den Fall $M = \mathbb{R}^n$. Der Tangentialraum $T_p\mathbb{R}^n$ (den wir noch nicht definiert haben) sollte anschaulich isomorph zu $\mathbb{R}^n$ selbst sein; hier stellen wir uns Elemente aus $\mathbb{R}^n$ als Vektoren mit Fußpunkt p vor. Es sei $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ein solcher Vektor. Zu v assoziiert betrachten wir die Richtungsableitung in Richtung v; dies ist ein Operator (wieder mit v bezeichnet), der auf dem Raum $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ der differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ wirkt:

$$v(f) := v_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p + \dots + v_n \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_p .$$

Wir erinneren an die Definition der partiellen Ableitung: Ist $p = (p_1, \dots, p_n)$, so ist

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + h, p_{i+1}, \dots, p_n) - f(p)}{h}.$$

Der Operator v erfüllt $v(f + g) = v(f) + v(g)$ und $v(\lambda f) = \lambda v(f)$ für alle Funktionen $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie die Bedingung

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

(v ist eine *Derivation*). Unsere Definition des Tangentialraumes ist durch diese Konstruktion motiviert. Man beachte zunächst, dass der Raum $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nicht der natürliche Definitionsbereich der obigen Richtungsableitungen ist, da eine

Funktion nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sein muss, um in p abgeleitet zu werden. Es ist ausreichend, wenn sie auf einer beliebig kleinen offenen Menge definiert ist. Um dies zu formalisieren, setzen wir

$$\mathcal{F}_p := \{f : U \to \mathbb{R} \mid U \subset M \text{ offen}, \, p \in U, \, f \text{ differenzierbar}\}/_\sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ folgendermaßen definiert ist: $f \sim g$ genau dann, wenn es eine offene Menge $V \subset M$ mit $p \in V$ gibt, so dass f und g auf V definiert sind, und $f|_V = g|_V$. Elemente aus $\mathcal{F}_p$ heißen *Funktionenkeime* in p. Für $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bezeichnen wir den Funktionenkeim in $p \in U$ mit $[f]$.

$\mathcal{F}_p$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra: $[f] + [g] := [f + g]$, und $[f] \cdot [g] := [fg]$. Man beachte außerdem, dass die Abbildung $\mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$, $[f] \mapsto f(p)$ wohldefiniert ist, aber dass die Auswertung eines Funktionenkeims in $\mathcal{F}_p$ in jedem anderen Punkt außer p nicht möglich ist. Nun können wir Tangentialvektoren und den Tangentialraum, wie oben motiviert, definieren:

Definition 1.4.1. *Ein* Tangentialvektor an M in p *ist eine lineare Abbildung*

$$v : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R},$$

die die Leibniz-Regel *erfüllt:*

$$v([f][g]) = v([f])g(p) + f(p)v([g]).$$

Der Tangentialraum T_pM *von* M *in* p *ist die Menge der Tangentialvektoren von* M *in* p*, versehen mit der Vektorraumstruktur*

$$(v + w)[f] := v([f]) + w([f]), \quad (\alpha v)[f] := \alpha \cdot v([f]).$$

Ist $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so schreiben wir $v(f) := v([f])$.

Beispiel 1.4.2. *Im Fall* $M = \mathbb{R}^n$ *sehen wir sofort, dass die Operatoren* $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ *Tangentialvektoren im Punkte* p *sind.*

Bemerkung 1.4.3. *Ein Indiz dafür, dass Tangentialvektoren Ableitungen sind, ist dadurch gegeben, dass für jede Funktion* f*, die in einer Umgebung* U *von* p *konstant ist, und jeden Tangentialvektor* $v \in T_pM$ *gilt, dass* $v(f) = 0$*: es gilt:* $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1 \cdot v(1) = 2v(1)$*, also* $v(1) = 0$*, und damit* $v(\alpha) = \alpha v(1) = 0$ *für jedes* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Wir möchten nun die Entsprechung der Richtungsableitungen im Fall einer beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeit definieren. Es sei (U, φ) eine Karte um $p \in U$: $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$. Es seien $u_1, \ldots, u_n$ die *Standardkoordinaten* von $\mathbb{R}^n$, d.h. $u_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $u_i(v_1, \ldots, v_n) = v_i$. Definiere

$$x_i := u_i \circ \varphi,$$

d.h. $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$. (Wir nennen x_i *lokale Koordinaten*.) Nun definieren wir Tangentialvektoren wie folgt:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$$

ist gegeben durch

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p [f] := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)).$$

Wir schreiben für diesen Ausdruck auch $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p$ oder $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

Lemma 1.4.4. *$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ ist ein Tangentialvektor an p.*

Beweis. Wir führen die Leibnizregel auf die entsprechende Eigenschaft der Richtungsableitungen im $\mathbb{R}^n$ zurück: Für lokal definierte Funktionen f, g gilt:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (fg) &= \frac{\partial((f \cdot g) \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)) \\
&= \frac{\partial((f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)) \\
&= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)) \cdot (g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&\qquad + (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \frac{\partial(g \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)) \\
&= \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p f \right) g(p) + f(p) \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p g \right).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 1.4.5. *Wir berechnen $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (x_j)$: da $x_j = u_j \circ \varphi$, gilt*

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (x_j) &= \frac{\partial(x_j \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)) \\
&= \frac{\partial(u_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)) \\
&= \frac{\partial u_j}{\partial u_i}(\varphi(p)) \\
&= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}
\end{aligned}$$

Satz 1.4.6. *$\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right)$ ist eine Basis von T_pM. Für $v \in T_pM$ gilt: $v = \sum_{i=1}^n v(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass diese Vektoren linear unabhängig sind. Angenommen, $a_i \in \mathbb{R}$ seien so, dass

$$\sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = 0.$$

Insbesondere gilt also, wenn wir die Funkion x_j in diesen Operator einsetzen, mit Hilfe von Beispiel 1.4.5:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p x_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j,$$

also folgt die linare Unabhängigkeit.

Um zu zeigen, dass diese Vektoren den Raum T_pM aufspannen, brauchen wir folgende Hilfsaussage: Zu jeder auf einer Umgebung von p definierten Funktion f gibt es (möglicherweise auf einer kleineren Umgebung von p definierte) Funktionen f_i, so dass

$$f = f(p) + \sum_i (x_i - x_i(p)) f_i \tag{1.4.1}$$

in einer Umgebung von p. (Dies entspricht der Taylorentwicklung von f in erster Ordnung.)

Beachte, dass die Gleichung (1.4.1) impliziert, dass

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p f = \sum_i \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p (x_i - x_i(p)) \cdot f_i(p) + (x_i(p) - x_i(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p f_i = f_j(p) \tag{1.4.2}$$

Betrachte die auf einer konvexen Umgebung von $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ definierte Funktion $f \circ \varphi^{-1}$. Für diese gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel:

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi^{-1})(y) - (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p) + t(y - \varphi(p)))dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i(p)) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p) + t(y - \varphi(p)))dt}_{=:f_i(\varphi^{-1}(y))}.\end{aligned}$$

Ersetzen von y durch $\varphi(q)$ zeigt Gleichung (1.4.1).

Wenden wir nun einen Tangentialvektor $v \in T_pM$ auf diese Gleichung an, so erhalten wir mit Hilfe von (1.4.2):

$$\begin{aligned}v(f) &= v(f(p)) + \sum_i (v(x_i) - v(x_i(p))) f_i(p) + (x_i(p) - x_i(p)) v(f_i) \\ &= \sum_i v(x_i) f_i(p) \\ &= \sum_i v(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p f,\end{aligned}$$

d.h. $v = \sum_i v(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$. Dies zeigt, dass T_pM durch die Vektoren $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ aufgespannt wird, und gleichzeitig die zweite Aussage des Satzes. □

Man beachte, dass aus diesem Satz folgt, dass die Dimension der Vektorräume T_pM gleich der Dimension der Mannigfaltigkeit M ist.

Beispiel 1.4.7. *Betrachte $T_t\mathbb{R}$. Nach Satz 1.4.6 ist dieser Vektorraum aufgespannt durch $\frac{\partial}{\partial x}\big|_t$. Wir haben einen Isomorphismus*

$$T_t\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

der durch $v \mapsto v(\mathrm{id}_\mathbb{R})$ gegeben ist: es gilt $\frac{\partial}{\partial x}\big|_t (\mathrm{id}_\mathbb{R}) = 1$.

1.5 Das Differential einer Abbildung

Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $F : M \to N$ differenzierbar. Wir definieren das *Differential* von F in $p \in M$, bezeichnet mit $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$, als die lineare Abbildung

$$dF_p(v)(f) := v(f \circ F).$$

Betrachte Karten (U, φ) und (V, ψ) um p bzw. $F(p)$, und schreibe $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ und $\psi = (y_1, \dots, y_m)$.

Satz 1.5.1. *Die Matrix von dF_p bzgl. der Basen $(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p)$ und $(\frac{\partial}{\partial y_i}\big|_{F(p)})$ ist gleich der Jacobimatrix von $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(p)$.*

Beweis. Nach Satz 1.4.6 können wir $dF_p(v)$ in der gegebenen Basis von $T_{F(p)}N$ ausdrücken:

$$dF_p(v) = \sum_{i=1}^m dF_p(v)(y_i) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{F(p)} = \sum_{i=1}^m v(y_i \circ F) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{F(p)}.$$

Für $v = \frac{\partial}{\partial x_j}\big|_p$ gilt also:

$$dF_p(v) = \sum_{i=1}^m \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p (y_i \circ F) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{F(p)}$$

Andererseits ist die Jacobimatrix von $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(p)$ gegeben durch

$$\left(\left.\frac{\partial(y_i \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial u_j}\right|_{\varphi(p)} \right)_{i,j} = \left(\left.\frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial x_j}\right|_p \right)_{i,j}$$

□

Satz 1.5.2 (Kettenregel)**.** *Es seien $F : M \to N$ und $G : N \to L$ differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, und $p \in M$. Dann gilt: $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$.*

Beweis. Sei $v \in T_pM$ und f eine Funktion, definiert auf einer Umgebung von $G(F(p))$. Dann gilt:

$$dG_{F(p)}((dF_p)(v))(f) = (dF_p(v))(f \circ G) = v(f \circ G \circ F) = d(G \circ F)_p(v)(f).$$

□

Beispiel 1.5.3. 1. *Eine glatte Abbildung* $c : (a, b) \to M$ *heißt auch* (glatte) Kurve *in* M*. Für* $t \in (a, b)$ *definieren wir* $c'(t) = \dot{c}(t) := dc_t(\frac{\partial}{\partial x}\big|_t)$*. Wir werden auch von auf abgeschlossenen Intervallen definierten glatten Kurven* $c : [a, b] \to M$ *sprechen; dies soll aber nur eine Kurzschreibweise für eine auf einem Intervall der Form* $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ *definierte glatte Kurve sein.*

2. *Für eine differenzierbare Abbildung* $f : M \to \mathbb{R}$ *können wir* $T_{f(p)}\mathbb{R}$ *nach Beispiel 1.4.7 mit* $\mathbb{R}$ *identifizieren. Wir erhalten unter dieser Identifikation*

$$df_p(v) = df_p(v)(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = v(f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = v(f).$$

Folgender Trick, der nur eine einfache Anwendung der Kettenregel ist, ist so hilfreich, um das Differential einer Abbildung auszurechnen, dass er einen eigenen Satz verdient:

Satz 1.5.4. *Es sei* $F : M \to N$ *eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten,* $p \in M$ *und* $v \in T_pM$*. Weiterhin sei* $c : I \to M$*,* $0 \in I$*, eine Kurve in* M *mit* $c(0) = p$ *und* $c'(0) = v$*. Dann gilt:*

$$dF_p(v) = (F \circ c)'(0).$$

1.6 Resultate aus der Analysis

In diesem Abschnitt listen wir ohne Beweis Resultate auf, die (mindestens teilweise) aus Analysis bekannt sind.

Definition 1.6.1. *Es sei* M *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit* M*. Eine* (differenzierbare) Zerlegung der Eins *von* M *ist eine* $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ *von glatten Funktionen auf* M *(wobei* I *eine beliebige Indexmenge ist), so dass*

1. *Die Familie von Trägern* $\{\operatorname{supp}\varphi_i \mid i \in I\}$ *ist lokal endlich, d.h., um jeden Punkt* $p \in M$ *existiert eine Umgebung, die nur endlich viele dieser Mengen schneidet*

2. $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1$ *für alle* $p \in M$*, und* $\varphi_i(p) \geq 0$ *für alle* $p \in M$ *und alle* $i \in I$*.*

Wenn $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ *eine offene Überdeckung von* M *ist, dann heißt* $\{\varphi_i\}$ der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnet*, wenn für jedes* i *ein* α *existiert mit* $\operatorname{supp}\varphi_i \subset U_\alpha$*.*

Der Beweis (siehe z.B. [12, Theorem 1.11]) des folgenden Satzes über die Existenz einer Zerlegung der Eins benutzt, dass Mannigfaltigkeiten das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.

Satz 1.6.2. *Es sei* $\mathcal{U}$ *eine offene Überdeckung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit* M*. Dann existiert eine abzählbare differenzierbare Zerlegung der Eins, die* $\mathcal{U}$ *untergeordnet ist.*

Folgendes ist eine typische Anwendung der Existenz einer Zerlegung der Eins:

Korollar 1.6.3. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen, $A \subset U$ abgeschlossen, und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es eine differenzierbare Funktion $g : M \to \mathbb{R}$, so dass $g|_A = f|_A$ und $g|_{M \setminus U} = 0$.*

Beweis. Betrachte die Überdeckung $\{U, M \setminus A\}$ von M, und $\{\varphi, \psi\}$ eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins, d.h. $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ und $\operatorname{supp} \psi \subset M \setminus A$.

Wir definieren $g := \varphi \cdot f$, wobei wir f beliebig (nicht notwendigerweise stetig, d.h. zum Beispiel durch $f|_{M \setminus U} = 0$) auf ganz M fortgesetzt haben.

Da $\psi|_A = 0$, gilt $\varphi|_A = 1$, also $g|_A = f|_A$. Auf $M \setminus U$ verschwindet φ, also gilt $g|_{M \setminus U} = 0$. □

Der folgende Satz über lokale Umkehrbarkeit ist aus Analysis bekannt:

Satz 1.6.4. *Es sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Ist $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für ein $p \in U$ invertierbar, so gibt es eine Umgebung V von p, so dass $f|_V$ ein Diffeomorphismus von V auf eine Umgebung W von $f(p)$ ist. Weiterhin gilt, dass das Differential von f^{-1} in $q \in W$ durch*

$$(df^{-1})_q = (df_{f^{-1}(q)})^{-1} \tag{1.6.1}$$

gegeben ist.

Man beachte, dass dieser Satz in der Analysis für gewöhnlich unter der Voraussetzung, dass f einmal stetig differenzierbar ist, bewiesen wird; die Folgerung ist dann, dass f ein C^1-Diffeomorphismus ist. Die Formel (1.6.1) impliziert aber, dass f^{-1} unendlich oft differenzierbar ist, falls f unendlich oft differenzierbar ist.

Für Mannigfaltigkeiten können wir den Umkehrsatz nun wie folgt formulieren:

Satz 1.6.5. *Es seien M und N differenzierbare Abbildungen gleicher Dimension, $U \subset M$ eine offene Teilmenge und $f : U \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Ist $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ für einen Punkt $p \in U$ invertierbar, so gibt es eine Umgebung V von p in M, so dass $f|_V$ ein Diffeomorphismus von V auf eine Umgebung von $f(p)$ in N ist.*

Beweis. Man betrachte Karten φ und ψ um p und $f(p)$ und wende den Umkehrsatz auf $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ an. □

Weiterhin benötigen wir den folgenden Satz, bekannt als Satz über die lokale Gestalt von Immersionen und Submersionen:

Satz 1.6.6. *Es sei U eine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ sowie $f : U \to \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung mit $f(0) = 0$.*

1. *Ist $n \leq k$ und df_0 injektiv, so gibt es einen Diffeomorphismus ψ zwischen Umgebungen von 0 in $\mathbb{R}^k$ (d.h. eine Karte von $\mathbb{R}^k$ um 0), so dass*

$$\psi \circ f(x) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

für alle x in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$.

2. *Ist $n \geq k$ und df_0 surjektiv, so gibt es einen Diffeomorphismus φ zwischen Umgebungen von 0 in $\mathbb{R}^n$, so dass*

$$f \circ \varphi(x) = (x_1, \ldots, x_k)$$

für alle x in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$.

1.7 Untermannigfaltigkeiten

Bereits in Abschnitt 1.2 haben wir den Begriff einer Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^k$ erwähnt. Hier werden wir eine allgemeinere Situation betrachten, in der der umgebende Raum eine beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Definition 1.7.1. *Eine differenzierbare Abbildung $F : M \to N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt* Immersion, *wenn $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ für alle $p \in M$ injektiv ist. Wir nennen $F(M)$ eine* immersierte Untermannigfaltigkeit von N.

Man beachte, dass F nicht als injektiv vorausgesetzt ist, aber selbst wenn F eine injektive Immersion ist und $N = \mathbb{R}^k$, dann stimmt der Begriff der injektiv immersierten Untermannigfaltigkeit nicht mit Definition 1.2.8 überein, wie wir in den Übungen sehen werden.

Definition 1.7.2. *Ist $F : M \to N$ eine injektive Immersion mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass F ein Homöomorphismus aufs Bild (d.h., ein Homöomorphismus $M \to F(M)$, wobei $F(M)$ mit der Teilraumtopologie versehen wird) ist, dann heißt F eine* Einbettung. *In diesem Fall nennen wir $F(M)$ eine* eingebettete Untermannigfaltigkeit von N.

Bemerkung 1.7.3. *Der Begriff einer Untermannigfaltigkeit variiert von Autor zu Autor zwischen (injektiv) immersierten und eingebetteten Untermannigfaltigkeiten. Oft wird auch verlangt, dass die Untermannigfaltigkeit M eine Teilmenge der umgebenden Mannigfaltigkeit N ist; die Bedingung ist dann, dass die Inklusion $i : M \to N$ eine (injektive) Immersion bzw. Einbettung ist.*

Ohne Beweis erwähnen wir den Whitneyschen Einbettungssatz:

Theorem 1.7.4. *Jede n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit kann als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n+1}$ realisiert werden.*

Es folgt also insbesondere, dass $\mathbb{R}P^n$ als Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{2n+1}$ lebt; diese Untermannigfaltigkeitsstruktur ist aber nicht natürlich.

Der Satz 1.6.6 über die lokale Gestalt von Immersionen impliziert, dass Immersionen lokal immer Einbettungen sind:

Satz 1.7.5. *Es sei $\dim M = n$, $\dim N = k$, $F : M \to N$ eine Immersion und $p \in M$. (Es reicht, vorauszusetzen, dass F differenzierbar und dF_p injektiv ist.) Dann gibt es eine Umgebung U von p in M und eine Karte (V, ψ), $\psi = (y_1, \ldots, y_k)$, von N um $F(p)$, so dass*

1. *$y_{n+1}(q) = \ldots = y_k(q) = 0$ für alle $q \in V \cap F(U)$ und*
2. *$F|_U$ ist eine Einbettung.*

Wir nennen eine solche Karte ψ auch Untermannigfaltigkeitskarte.

Beweis. Es sei $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Abbildung $i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$. Wähle eine Karte φ von M um p mit $\varphi(p) = 0$ und eine Karte η von N um $F(p)$ mit $\eta(F(p)) = 0$, und betrachte $\eta \circ F \circ \varphi^{-1}$. Diese Abbildung schickt 0 auf 0 und ihr Differential ist in 0 injektiv nach der Kettenregel, da die Differentiale von Karten Vektorraumisomorphismen sind. Nach dem ersten Teil von Satz 1.6.6 gilt nun, dass es eine Karte $g : V' \to \mathbb{R}^k$ von $\mathbb{R}^k$ um 0 und eine Umgebung W von $0 \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $g \circ \eta \circ F \circ \varphi^{-1}\big|_W = i|_W$. Wir setzen $U := \varphi^{-1}(W)$, $V := \eta^{-1}(V')$ und $\psi := g \circ \eta$. Dann ist 1. offenbar erfüllt, und dass $F|_U$ eine Einbettung ist, gilt, weil $F|_U = \psi^{-1} \circ i \circ \varphi\big|_U$. □

Wenden wir diesen Satz auf den Spezialfall einer Einbettung $F : M \to \mathbb{R}^k$ an, so folgt aus dem ersten Teil des Satzes, dass $F(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ im Sinne von Definition 1.2.8 ist.

Ist $F : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und $i : P \to M$ eine (immersierte) Untermannigfaltigkeit, dann heißt die Komposition $F \circ i$ die *Einschränkung* von F auf P. Wir schreiben auch einfach $F|_P$, wenn die Inklusionsabbildung i offensichtlich ist. Die Einschränkung einer differenzierbaren Abbildung ist als Komposition von differenzierbaren Abbildungen wieder differenzierbar. Schwieriger ist das Problem, den Zielraum einer differenzierbaren Abbildung einzuschränken: (Der Beweis des folgenden Satzes ist eine Übung)

Satz 1.7.6. *Es sei $F : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und $i : P \to N$ eine injektiv immersierte Untermannigfaltigkeit. Wir nehmen weiterhin an, dass $F(M) \subset i(P)$. Wir definieren $G : M \to P$ durch die Bedingung $F(p) = i(G(p))$. (Dies ist wohldefiniert, da i injektiv ist.)*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G"'] & N \\ & P \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Dann gilt:

1. *Falls i eine Einbettung ist, so ist G stetig.*
2. *Falls G stetig ist, so ist G glatt.*

Die Existenz von Untermannigfaltigkeitskarten, die in Satz 1.7.5 bewiesen wurde, zeigt, dass Untermannigfaltigkeiten lokal als Nullstellenmenge einer Abbildung in einen $\mathbb{R}^n$ dargestellt werden können. Umgekehrt kann man zeigen, dass Urbilder von Punkten unter differenzierbaren Abbildungen unter gewissen Umständen Untermannigfaltigkeiten liefern. Wir definieren dazu:

Definition 1.7.7. *Es sei $F : M \to N$ differenzierbar. Dann heißt ein Punkt $p \in M$ ein* regulärer Punkt*, falls $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ surjektiv ist. Andernfalls heißt p ein* kritischer Punkt*.*

Ein $q \in N$ heißt regulärer Wert*, falls alle Punkte in $F^{-1}(q)$ regulär sind. Andernfalls heißt q ein* kritischer Wert*.*

Eine sehr praktikable Möglichkeit, Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren, ist nun als Urbilder regulärer Werte:

Satz 1.7.8. *Es sei M eine n-dimensionale und N eine k-dimensionale Mannigfaltigkteit. Es sei $F : M \to N$ differenzierbar und $q \in F(M)$ ein regulärer Wert (d.h. insbesondere $n \geq k$). Dann ist $F^{-1}(q)$, versehen mit der Teilraumtopologie, eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n - k$, und es existiert eine eindeutige differenzierbare Struktur auf $F^{-1}(q)$, so dass die Inklusion $F^{-1}(q) \to M$ eine Einbettung (und $F^{-1}(q)$ damit eine eingebettete Untermannigfaltigkeit) wird.*

Beweis. Wir fixieren eine Karte (V, ψ) von N um q mit $\psi(q) = 0 \in \mathbb{R}^k$. Es sei $p \in F^{-1}(q)$ beliebig, und (U, φ) eine Karte von M um p mit $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ in 0 surjektives Differential, und daher können wir den Satz 1.6.6 über die lokale Gestalt von Submersionen anwenden: es gibt eine Karte g von $\mathbb{R}^n$ um 0 mit Definitionsbereich W, so dass

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ g\big|_W = \pi_1|_W \,,$$

wobei π_1 (und π_2) die natürlichen Projektionen in folgendem Diagramm sind:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbb{R}^k & & \mathbb{R}^{n-k} \end{tikzcd}$$

Weiterhin sei i_2 die Inklusion $\mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $i_2(x_1, \ldots, x_{n-k}) = (0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_{n-k})$.

Wir setzen $\widetilde{W} = \pi_2(W)$; dann gilt $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ g \circ i_2\big|_{\widetilde{W}} = \pi_1 \circ i_2|_{\widetilde{W}} = 0$; weshalb das Bild der Abbildung

$$\sigma := \varphi^{-1} \circ g \circ i_2 : \widetilde{W} \longrightarrow M$$

in $F^{-1}(q)$ liegt. Diese Abbildung ist stetig mit Zielraum M, und daher auch stetig mit Zielraum $F^{-1}(q)$, da wir diesen mit der Teilraumtopologie versehen. Die Umkehrabbildung ist durch die stetige Abbildung $\pi_2 \circ g^{-1} \circ \varphi$ gegeben; damit ist σ ein Homöomorphismus zwischen $\widetilde{W}$ und einer in $F^{-1}(q)$ offenen Umgebung von p. Durch die Karten σ, assoziiert zu jedem Punkt $p \in F^{-1}(q)$, wird F^{-1} damit zu einer topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension $n - k$. Die Kartenwechsel sind differenzierbar, da sie Einschränkungen von Kartenwechseln der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M sind. Damit trägt $F^{-1}(q)$ eine differenzierbare Struktur, und die Inklusion $F^{-1}(q) \to M$ ist eine Einbettung.

Die Eindeutigkeit der differenzierbaren Struktur folgt aus dem folgenden Satz, der in den Übungen bewiesen werden wird. □

Satz 1.7.9. *Es sei $M \subset N$ eine Teilmenge von N, die, versehen mit der Teilraumtopologie, eine topologische Mannigfaltigkeit wird. Falls M eine differenzierbare Struktur trägt, bezüglich derer die Inklusion $i : M \to N$ eine Einbettung ist, so ist diese differenzierbare Struktur eindeutig.*

Beispiel 1.7.10. 1. *Betrachte $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $F(x) = ||x||^2 = \sum_i x_i^2$. Es gilt, dass 1 ein regulärer Wert von F ist; damit wird $S^n = F^{-1}(1)$ zu einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$.*

2. *In diesem Beispiel zeigen wir, dass die* orthogonale Gruppe
$$\mathrm{O}(n) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid AA^t = I_n\}$$
eine Untermannigfaltigkeit von $M(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ *ist. Um dies zu sehen, definieren wir*
$$V := \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid X^t = X\}$$
und
$$F : M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow V;\ A \mapsto AA^t.$$
Damit gilt: $\mathrm{O}(n) = F^{-1}(I_n)$*. Wenn wir zeigen können, dass* I_n *ein regulärer Wert von* F *ist, dann haben wir gezeigt, dass* $\mathrm{O}(n)$ *eine Untermannigfaltigkeit von* $M(n,\mathbb{R})$ *ist. Wir berechnen mit Hilfe von Satz 1.5.4:*
$$\begin{aligned} dF_A(X) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(A+tX) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A+tX)(A+tX)^t \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} AA^t + t(AX^t + XA^t) + t^2XX^t \\ &= AX^t + XA^t. \end{aligned}$$
Wir müssen also zeigen: Zu $B \in V$ *und* $A \in \mathrm{O}(n)$ *gibt es* $X \in M(n,\mathbb{R})$ *mit* $B = AX^t + XA^t$*. Wir setzen* $X = \frac{1}{2}BA$ *und erhalten*
$$AX^t + XA^t = \frac{1}{2}(AA^tB^t + BAA^t) = \frac{1}{2}(B^t + B) = B.$$

Bemerkung 1.7.11. *Es sei* $M \subset N$ *eine (immersierte) Untermannigfaltigkeit, d.h., die Inklusion* $i : M \to N$ *sei eine Immersion. Obwohl* M *hier als Teilmenge von* N *vorausgesetzt wird, ist* T_pM *nicht auf natürliche Weise ein Unterraum von* T_pM*: Elemente aus* T_pM *sind Derivationen auf Funktionenkeimen um* p *in* M*, und Elemente aus* T_pN *sind Derivationen auf Funktionenkeimen um* p *in* N*. Wir können* T_pM *dennoch als Unterraum von* T_pN *auffassen, indem wir* T_pM *mit dem Bild* $di_p(T_pM) \subset T_pN$ *identifizieren. Wir werden oft einfach* $T_pM \subset T_pN$ *schreiben.*

1.8 Das Tangentialbündel

Definition 1.8.1. *Es sei* M *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist ein* (C^∞)-Vektorbündel vom Rang k *über* M *ein Paar* (E,π)*, bestehend aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit* E *und einer surjektiven differenzierbaren Abbildung* $\pi : E \to M$*, so dass für alle* $p \in M$ *gilt:*

1. *Die Faser* $E_p := \pi^{-1}(p)$ *ist ein* k*-dimensionaler Vektorraum, und*

2. *Es gibt eine Umgebung* U *von* p *und einen Diffeomorphismus* $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$*, so dass das Diagramm*
$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$
kommutiert und $\phi|_{E_q} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ *linear ist.*

E heißt Totalraum*, M* Basis *des Vektorbündels E. ϕ heißt* lokale Trivialisierung.

Bemerkung 1.8.2. *Für zwei lokale Trivialisierungen $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ und $\psi : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^k$ können wir die Abbildung*

$$\phi \circ \psi^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$$

betrachten. Diese ist von der Form $(p, v) \mapsto (p, A_p(v))$, wobei $A_p \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$. Die Abbildung $U \cap V \to \mathrm{GL}(k)$; $p \mapsto A_p$ ist glatt. (Dies folgt daraus, dass alle ihre Matrixkomponenten glatt sind, was man wiederum daran sehen kann, dass diese als Komponenten von $p \mapsto (p, e_i) \mapsto (p, A_p(e_i))$ auftreten, wobei e_i die Standardbasis von $\mathbb{R}^k$ ist.)

Definition 1.8.3. *Ein (C^∞)-*Schnitt *von E ist eine differenzierbare Abbildung $s : M \to E$, so dass $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$. Bezeichnung: $\Gamma(E)$. Ist s nur auf einer offenen Menge $U \subset M$ definiert, so sprechen wir von einem* lokalen Schnitt *von E.*

Bemerkung 1.8.4. *Ist $s \in \Gamma(E)$ und $f \in C^\infty(E)$, so ist $fs \in \Gamma(E)$. Hierbei ist $(fs)(p) = f(p)s(p)$, und diese skalare Multiplikation ist die des Vektorraumes E_p. Algebraisch bedeutet dies, dass $\Gamma(E)$ ein Modul über dem Ring $C^\infty(M)$ ist.*

Es sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ziel dieses Abschnittes wird sein, $TM := \bigcup_p T_pM$ mit der Struktur eines Vektorbündels vom Rang n über M zu versehen. Definiere $\pi : TM \to M$ durch $v \in T_pM \mapsto p$. Elemente aus TM werden einfach mit v bezeichnet (wobei $v \in T_{\pi(v)}M$), oder manchmal auch mit (p, v) (wobei $v \in T_pM$).

Es sei $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ die differenzierbare Struktur einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Es gilt: $\pi^{-1}(U_\alpha) = TU_\alpha = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_pM$. Schreibe $\varphi_\alpha = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ und definiere

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n};\ v \mapsto (\varphi_\alpha(\pi(v)), v(x_1^\alpha), \ldots, v(x_n^\alpha)). \tag{1.8.1}$$

(Man habe hier Satz 1.4.6 im Hinterkopf, der besagt, dass die Koeffizienten von v in der Basisdarstellung bzgl. der Basis $(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\Big|_p)$ gerade durch die $v(x_i^\alpha)$ gegeben sind.)

Wir möchten durch $\{(TU_\alpha, \psi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ einen Atlas auf TM definieren. Zunächst müssen wir uns jedoch um die Topologie auf M kümmern.

Wir definieren die Topologie auf TM als die durch

$$\{\psi_\alpha^{-1}(W) \mid \alpha \in A,\ W \subset \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \text{ offen}\}$$

erzeugte Topologie. Diese Topologie ist Hausdorffsch: Seien $v, w \in TM$. Falls $\pi(v) \neq \pi(w)$, dann gibt es offene Mengen in M, die $\pi(v)$ und $\pi(w)$ trennen, da M Hausdorffsch ist. Die Urbilder unter π trennen dann v und w. Falls $p := \pi(v) = \pi(w)$, so betrachte eine Abbildung ψ_α mit $p \in U_\alpha$, und wähle offene Mengen in $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$, die $\psi_\alpha(v)$ und $\psi_\alpha(w)$ trennen.

Um zu zeigen, dass TM eine topologische Mannigfaltigkeit ist, müssen wir zeigen, dass die Abbildungen ψ_α Homöomorphismen sind. Nach Definition sind sie stetig. Um zu zeigen, dass die Umkehrabbildungen stetig sind, müssen wir zeigen, dass $\psi_\alpha(\psi_\beta^{-1}(W)) = (\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})^{-1}(W)$ für alle offenen Mengen $W \subset \varphi_\beta(U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ offen ist. Dies haben wir aber gezeigt, wenn wir beweisen können, dass alle Kartenwechsel $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ glatt sind, was wir ohnehin zeigen müssen, damit TM eine Mannigfaltigkeit wird.

Es gilt $v(x_i^\alpha) = dx_i^\alpha(v)$ unter der Identifikation $T_{x_i^\alpha(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, siehe Beispiel 1.5.3. Weiterhin identifizieren wir

$$d\varphi_\alpha(v) = (dx_1^\alpha(v), \ldots, dx_n^\alpha(v)) = (v(x_1^\alpha), \ldots, v(x_n^\alpha)),$$

so dass wir ψ_α als

$$\psi_\alpha(v) = (\varphi_\alpha(\pi(v)), d\varphi_\alpha(v)) \tag{1.8.2}$$

schreiben können. Damit ist für $p \in \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ und $w \in \mathbb{R}^n$

$$(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(p, w) = ((\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(p), d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_p(w)).$$

Dies zeigt, dass die Kartenwechsel differenzierbar sind: $\{(TU_\alpha, \psi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ ist ein C^∞-Atlas auf TM. Da wir M durch abzählbar viele Kartengebiete U_α überdecken können, wird TM durch abzählbar viele Kartengebiete TU_α überdeckt: TM ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Die restlichen Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit $\pi : TM \to M$ ein Vektorbündel wird, sind leicht nachzuprüfen: lokale Trivialisierungen sind durch die ψ_α gegeben; nach Konstruktion sind sie Diffeomorphismen. Da das Diagramm in Punkt 2. der Definition kommutiert, folgt, dass $\pi : TM \to M$ differenzierbar ist. Die Faser $\pi^{-1}(p)$ ist T_pM, d.h., ein n-dimensionaler Vektorraum, und Gleichung (1.8.2) zeigt, dass $\psi_\alpha|_{T_pM}$ durch die lineare Abbildung $(d\varphi_\alpha)_p$ gegeben ist.

1.9 Vektorfelder

Definition 1.9.1. *Elemente in* $\Gamma(TM)$ *heißen* (differenzierbare) Vektorfelder *auf* M.

Bemerkung 1.9.2. *Wenn* $U \subset M$ *offen ist, dann ist* $X \in \Gamma(TU)$ *ein Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit* U*. Wir sprechen auch von* lokalen Vektorfeldern *auf* M*.*

Es sei $X \in \Gamma(TM)$. Für $p \in M$ ist also $X(p)$ (auch mit X_p bezeichnet) ein Tangentialvektor im Punkt p, d.h. eine Derivation auf den Funktionenkeimen in p. Dies bedeutet, dass wir für eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$ die Funktion

$$X(f) : M \longrightarrow \mathbb{R};\ p \mapsto X_p(f)$$

betrachten können.

Beispiel 1.9.3. *Es sei* (U, φ) *eine Karte,* $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$*. Wir definieren Vektorfelder* $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *auf* U *durch*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p := \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in T_pM.$$

Es ist zu zeigen, dass diese Zuordnungen differenzierbare Schnitte von TU *definieren. Betrachte die entsprechende Karte* ψ *von* TU *wie in* (1.8.1)*; dann gilt:*

$$\psi\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = (\varphi(p), 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

wobei die 1 *in der iten Stelle (nach* $i-1$ *Nullen) steht. Da die Abbildung* $p \mapsto \psi\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)$ *also differenzierbar ist, haben wir wirklich ein differenzierbares Vektorfeld definiert.*

Der folgende Satz ist analog zu Satz 1.4.6.

Satz 1.9.4. *Es sei* (U, φ) *eine Karte von* M*,* $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$*. Für* $X \in \Gamma(TU)$ *gilt:*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.9.1}$$

und $X(x_i) \in C^\infty(U)$*. Umgekehrt definiert für alle* $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(U)$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ein differenzierbares Vektorfeld auf U*.*

Beweis. Nach Satz 1.4.6 können wir für $X \in \Gamma(TU)$ den Tangentialvektor X_p als $\sum_{i=1}^n X_p(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ schreiben. Daher können wir das Vektorfeld X, d.h., die Zuordnung $p \mapsto X_p$, in der Form (1.9.1) schreiben. Beachte, dass $X(x_i) \in C^\infty(U)$, da $X(x_i)$ als Komponente der differenzierbaren Funkion $\psi \circ X$ auftritt (wobei ψ die zu φ assoziierte Karte von TM ist).

Die zweite Aussage ist nichts anderes als Beispiel 1.9.3, kombiniert mit Bemerkung 1.8.4. □

Wir haben gezeigt, dass $\Gamma(TU)$ ein freier Modul über $C^\infty(U)$ ist, mit Basis $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Der folgende Satz überträgt diese lokalen Argumente zu einer globalen Aussage auf M:

Satz 1.9.5. *Für ein Vektorfeld* X *auf* M *und* $f \in C^\infty(M)$ *ist* $X(f) \in C^\infty(M)$*. Umgekehrt gilt: ist* $M \to TM;\, p \mapsto X_p \in T_pM$ *eine beliebige (nicht notwendigerweise stetige oder differenzierbare) Abbildung, für die gilt, dass für alle* $f \in C^\infty(M)$ *auch die Abbildung* $X(f) : p \mapsto X_p(f)$ *glatt ist, so ist* $X : M \to TM$ *differenzierbar, d.h. ein differenzierbares Vektorfeld auf* M*.*

Beweis. Es sei $X \in \Gamma(TM)$ und $f \in C^\infty(M)$. Die Differenzierbarkeit von $X(f)$ kann lokal in einer Karte (U, φ) getestet werden. Sei $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$. Nach Satz 1.9.4 können wir X auf U als $X = \sum_i X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ schreiben, d.h. $X(f) = \sum_i X(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}$, was eine differenzierbare Funktion ist.

Betrachte nun eine beliebige Zuordnung $p \mapsto X_p$. Auf U können wir X_p in der zu (U, φ) assoziierten Basis darstellen, d.h.

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X_p(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

Ist nun $X(f)$ für alle glatten Funktionen f differenzierbar, so ist insbesondere $X(x_i)$ differenzierbar (man benutze hier Korollar 1.6.3, um zu zeigen, dass sich x_i, eingeschränkt auf eine kleinere Umgebung, zu einer differenzierbaren Funktion auf ganz M fortsetzen kann), und also nach Satz 1.9.4 X auch differenzierbar. □

Bemerkung 1.9.6. *Man beachte außerdem, dass ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ eine Derivation auf den glatten Funktionen auf M ist:*

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

Die Vektorfelder auf M tragen die Struktur eines Moduls über $C^\infty(M)$. Eine weitere Struktur auf dem Raum der Vektorfelder wird für uns interessant sein:

Definition 1.9.7. *Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ eine Abbildung, die*

1. *bilinear,*
2. *antisymmetrisch ($[v,w] = -[w,v]$) ist und*
3. *die* Jacobiidentität

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$$

erfüllt.

Dann heißt $(V,[\cdot,\cdot])$ eine Liealgebra. *Die Abbildung $[\cdot,\cdot]$ heißt die* Lieklammer *dieser Liealgebra.*

Auf $\Gamma(TM)$ können wir eine Lieklammer wie folgt definieren: Es seien $X, Y \in \Gamma(TM)$, und $f \in C^\infty(M)$. Dann ist $Y(f) \in C^\infty(M)$, und dann auch $X(Y(f))$. Die Zuordnung

$$X_pY : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathbb{R};\ [f] \mapsto X_p(Y(f))$$

ist kein Tangentialvektor in p, da die Leibnizregel nicht erfüllt ist:

$$\begin{aligned}(X_pY)(f\cdot g) &= X_p(Y(fg))\\ &= X_p(Y(f)g + fY(g))\\ &= (X_p(Y(f))g(p) + Y_p(f)X_p(g) + X_p(f)Y_p(g) + f(p)X_p(Y(g))\\ &= (X_pY)(f)g(p) + f(p)(X_pY)(g) + Y_p(f)X_p(g) + X_p(f)Y_p(g).\end{aligned}$$

Der dritte und vierte Summand müsste verschwinden, damit X_pY ein Tangentialvektor in p ist. Wir sehen allerdings, dass diese beiden Summanden zusammen symmetrisch in X und Y sind, d.h. es folgt, dass $X_pY - Y_pX$ die Leibnizregel erfüllt. Wir definieren:

$$[X,Y]_p := X_pY - Y_pX,$$

d.h.

$$[X,Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

Da $X(Yf) - Y(Xf)$ für alle differenzierbaren Funktionen f wieder differenzierbar ist, folgt mit Satz 1.9.5, dass $[X,Y]$ ein differenzierbares Vektorfeld auf M ist. $\mathbb{R}$-Bilinearität und Antisymmetrie von $[\cdot,\cdot]$ ist offensichtlich, und eine Rechnung zeigt, dass diese Klammer auch die Jacobiidentität erfüllt. Es folgt:

Satz 1.9.8. $(\Gamma(TM),[\cdot,\cdot])$ *ist eine reelle Liealgebra.*

In den Übungen werden wir sehen:

Satz 1.9.9. *Ist (U,φ), $\varphi = (x_1,\ldots,x_n)$ ein Koordinatensystem auf M, so gilt* $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$.

1.10 Integralkurven und Flüsse von Vektorfeldern

Definition 1.10.1. *Es sei X ein Vektorfeld auf M und $\alpha : (a,b) \to M$ eine differenzierbare Kurve. Dann heißt α eine* Integralkurve *von X, falls*

$$\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}$$

für alle $t \in (a,b)$.

Wir erinnern noch einmal daran, dass $\dot{\alpha}(t)$ als $d\alpha_t(\frac{\partial}{\partial x}\big|_t)$ definiert wurde. Hier ist x die Standardkoordinate auf (a,b), d.h. die Identität.

Wir werden die Bedingung, Integralkurve eines Vektorfeldes X zu sein, in lokalen Koordinaten (U,φ), $\varphi = (x_1,\dots,x_n)$ schreiben. Wir setzen $\alpha_i = x_i \circ \alpha$, d.h. $\varphi \circ \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Einerseits gilt

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}(t)(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(d\alpha_t \left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_t \right)\right)(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i(t) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)}, \end{aligned}$$

und andererseits ist

$$X_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^n X_{\alpha(t)}(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)}.$$

Definieren wir nun $F_i : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ durch $F_i(\varphi(q)) = (Xx_i)(q) = X_q(x_i)$, so haben wir folgende Äquivalenz:

$$\alpha \text{ ist Integralkurve von } X \iff \alpha_i'(t) = F_i(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)),\ i = 1,\dots,n.$$

Hierbei handelt es sich um ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir werden hier ohne Beweis die Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Lösungen solcher Systeme benutzen: Für den Beweis siehe ein beliebiges Buch über gewöhnliche Differentialgleichungen, z.B. [11].

Satz 1.10.2. *Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:*

1. *Existenz: Zu jedem $q \in V$ gibt es ein Intervall I mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Kurve $c : I \to V$ mit $c(0) = q$ und $c'(t) = F(c(t))$.*

2. *Eindeutigkeit: Erfüllen differenzierbare Kurven $c_1, c_2 : I \to V$ die Gleichungen $c_i'(t) = F(c_i(t))$ $(i = 1,2)$ und gilt $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, dann gilt $c_1 = c_2$.*

Übertragen auf unsere Situation bedeutet dies:

Satz 1.10.3. *Es sei X ein Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Dann gilt:*

1. *Es gibt durch jeden Punkt $p \in M$ eine Integralkurve von X. Genauer: Zu jedem $p \in M$ existiert ein Intervall I mit $0 \in I$ sowie eine glatte Kurve $\alpha : I \to M$ mit $\alpha(0) = p$, die $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$ erfüllt.*

2. *Sind* $\alpha_1, \alpha_2 : I \to M$ *zwei Integralkurven von* X *mit* $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$ *für ein* $t_0 \in I$*, so gilt* $\alpha_1 = \alpha_2$.

Bemerkung 1.10.4. *Es folgt, dass es zu jedem Punkt* $p \in M$ *eine maximal definierte Integralkurve* $\alpha : I \to M$*,* $0 \in I$*, mit* $\alpha(0) = p$ *gibt, d.h., falls* $\beta : J \to M$*,* $0 \in J$*, eine weitere Integralkurve von* X *ist, dann gilt* $J \subset I$ *(und* $\alpha|_J = \beta$*).*

Eine weitere Eigenschaft der Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, die normalerweise nicht in einer Vorlesung über dieses Thema bewiesen wird, ist die differenzierbare Abhängigkeit der Lösungskurven von den Anfangswerten, siehe z.B. [3, Kapitel 2.5]. Übertragen auf unsere Situation liefert sie die Existenz eines *lokalen Flusses* von X:

Satz 1.10.5. *Es sei* X *ein Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit* M *und* $p \in M$*. Dann gibt es eine Umgebung* U *von* p*, ein Intervall* I *mit* $0 \in I$ *und eine differenzierbare Abbildung* $\Phi : I \times U \to M$*, so dass*

1. $\Phi(0, q) = q$ *für alle* $q \in U$
2. $t \mapsto \Phi(t, q)$ *ist eine Integralkurve von* X*.*

Definition 1.10.6. $\Phi : I \times U \to M$ *heißt* lokaler Fluss *von* X*.*

Dies ist ein sehr anschaulicher Begriff: Punkte fließen entlang X in dem Sinne, dass sie sich entlang der Integralkurven von X bewegen. $\Phi(t, q)$ ist der Punkt, zu dem q entlang X nach Zeit t geflossen ist. Daraus folgt: Falls $t, s \in I$ und $q \in U$ so sind, dass $\Phi(t, q) \in U$, dann ist

$$\Phi(s, \Phi(t, q)) = \Phi(t + s, q). \tag{1.10.1}$$

Definition 1.10.7. *Ein Vektorfeld* X *auf* M *heißt* vollständig*, wenn durch jeden Punkt* $p \in M$ *eine Integralkurve läuft, die auf ganz* $\mathbb{R}$ *definiert ist.*

Satz 1.10.8. *Ist* M *kompakt, so ist jedes Vektorfeld auf* M *vollständig.*

Beweis. Es sei $X \in \Gamma(TM)$. und $\alpha : I \to M$, $0 \in I$, eine maximal definierte Integralkurve von X. Wir nehmen an, dass $I \neq \mathbb{R}$, was wir zum Widerspruch führen müssen. Wir betrachten die Situation, dass $a := \sup I < \infty$; den linken Rand des Intervalls I behandelt man analog.

Es sei t_n eine Folge in I, die gegen a konvergiert. Da M kompakt ist, können wir zu einer Teilfolge übergehen (die wir wiederum mit t_n bezeichnen), für die $\alpha(t_n) \to p \in M$. Es sei nun $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ ein lokaler Fluss um p.

Es sei n_0 so groß, dass $a - t_{n_0} < \varepsilon$ und $\alpha(t_{n_0}) \in U$. Dann definieren wir $\tilde{\alpha} : I \cup (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \to M$ durch

$$\tilde{\alpha}(t) := \begin{cases} \alpha(t) & t \in I \\ \Phi(t - t_{n_0}, \alpha(t_{n_0})) & t \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon). \end{cases}$$

Man beachte, dass beide Fälle dieser Definition für sich betrachtet Integralkurven des Vektorfeldes X sind, und dass sie zur Zeit t_{n_0} übereinstimmen. Daher ist $\tilde{\alpha}$ eine wohldefinierte Integralkurve, die auf einer echt größeren Menge als I definiert ist, was der Wahl von α widerspricht. □

Satz 1.10.9. *Ist* X *ein vollständiges Vektorfeld, dann existiert ein* globaler Fluss *von* X*, d.h. ein (lokaler) Fluss, der auf ganz* $\mathbb{R} \times M$ *definiert ist.*

Beweis. Wir beweisen mehr: für ein beliebiges Vektorfeld X sei zu einem Punkt $p \in M$ die zugehörige maximale Integralkurve mit $\alpha_p : I_p \to M$ bezeichnet, wobei $0 \in I_p$ und $\alpha_p(0) = p$. Wir definieren

$$W := \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\} \subset \mathbb{R} \times M$$

und $\Phi : W \to M$ durch $\Phi(t,p) = \alpha_p(t)$. Wir werden zeigen, dass W eine offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times M$, und $\Phi : W \to M$ differenzierbar ist. (Wir nennen Φ den *maximalen Fluss von* X.) Im Fall, dass X vollständig ist, ist jede Integralkurve α_p auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, und deshalb $W = \mathbb{R} \times M$.

Es sei $p \in M$ beliebig. Es sei I die Menge aller $t \in I_p$, so dass (t,p) eine Umgebung in $\mathbb{R} \times M$ besitzt, die in W liegt, und auf der Φ differenzierbar ist. I ist nicht leer, da $0 \in I$, und Φ auf einer Umgebung der Form $I_1 \times V_1 \subset \mathbb{R} \times M$ mit einem auf $I_1 \times V_1$ definierten lokalen Fluss von X übereinstimmt. I ist nach Definition offen in I_p. Wir zeigen, dass I abgeschlossen in I_p ist; da I_p zusammenhängend ist, folgt dann $I = I_p$, und da p beliebig war, dass W offen ist.

Es sei t_0 ein Häufungspunkt von I in I_p, und $\Phi_2 : I_2 \times V_2 \to M$, $0 \in I_2$, ein lokaler Fluss von X um $\Phi(t_0,p) = \alpha_p(t_0) \in V_2$. Da t_0 ein Häufungspunkt von I und α_p stetig ist, gibt es $t_1 \in I$, so dass $t_0 - t_1 \in I_2$ und $\Phi(p,t_1) = \alpha_p(t_1) \in V_2$. Für alle t und q, so dass $t - t_1 \in I_2$, $\Phi(t_1,q) \in V_2$ und $(t_1,q) \in W$, gilt nun, dass $t \mapsto \Phi_2(t - t_1, \Phi(t_1,q))$ eine Integralkurve von X ist, die sich zum Zeitpunkt t_1 an der Stelle $\Phi_2(0, \Phi(t_1,q)) = \Phi(t_1,q) = \alpha_q(t_1)$ befindet. Damit folgt: $(t,q) \in W$ und

$$\Phi(t,q) = \Phi_2(t - t_1, \Phi(t_1,q)). \tag{1.10.2}$$

Da $t_1 \in I$, können wir nun eine Umgebung $I_3 \times V_3$ von (t_1,p) wählen, so dass Φ auf $I_3 \times V_3$ differenzierbar ist, und $\Phi(I_3 \times V_3) \subset V_2$. Dann ist nach dem obigen Argument $(t_1 + I_2) \times V_3$ eine in W enthaltene Umgebung von (t_0,p) in $\mathbb{R} \times M$, auf der Φ nach (1.10.2) differenzierbar ist. □

Es sei X ein vollständiges Vektorfeld auf M und $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ der globale Fluss von X. Wir bezeichnen mit $\Phi_t : M \to M$ die Abbildung $\Phi_t(p) := \Phi(t,p)$. Gleichung (1.10.1) bedeutet nun: $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$. Insbesondere: $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$, d.h. Φ_t ist ein Diffeomorphismus von M. Da außerdem $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$, bedeuten diese Eigenschaften, dass $t \mapsto \Phi_t$ ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R},+)$ in die Gruppe der Diffeomorphismen von M ist.

Definition 1.10.10. *Eine differenzierbare Abbildung $\Psi : \mathbb{R} \times M \to M$ heißt eine* Einparametergruppe von Diffeomorphismen*, falls $\Psi_0 = \mathrm{id}_M$ und $\Psi_{t+s} = \Psi_t \circ \Psi_s$ für alle $t,s \in \mathbb{R}$, wobei wir mit Ψ_t die Abbildung $p \mapsto \Psi(t,p)$ bezeichnen.*

Wir haben also gesehen, dass wir einem vollständigen Vektorfeld eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen zuordnen können. Umgekehrt können wir auch mit einer Einparametergruppe Ψ von Diffeomorphismen starten und ein Vektorfeld X zuordnen: für jedes $p \in M$ ist $\Psi_p(t) = \Psi(t,p)$ eine Kurve mit $\Psi_p(0) = p$, und wir definieren

$$X_p := \Psi_p'(0) = (d\Psi_p)_0 \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 \right) = d\Psi_{(0,p)} \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,p)} \right),$$

wobei $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{(0,p)} \in T_{(0,p)}\mathbb{R} \times M$ der Tangentialvektor in die $\mathbb{R}$-Richtung ist.

Wir müssen zeigen, dass X differenzierbar ist: Dies folgt aus Satz 1.9.5, da für jede differenzierbare Funktion f gilt:

$$(Xf)(p) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(0,p)} (f \circ \Psi),$$

d.h. Xf ist wiederum differenzierbar.

Es gilt, dass Ψ der globale Fluss des so konstruierten Vektorfeldes X ist: zu zeigen ist, dass für jedes p die Abbildung $\Psi_p : t \mapsto \Psi(t,p)$ eine Integralkurve von X ist, d.h. dass

$$\Psi_p'(t) = X_{\Psi(t,p)}$$

für alle t gilt. Nach Konstruktion von X gilt dies für $t = 0$, da $\Psi(0,p) = p$. Für $t = t_0 \neq 0$ gilt dann:

$$\Psi_p'(t_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \Psi(t,p) = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \Psi(t + t_0, p) = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \Psi(t, \Psi(t_0,p)) = X_{\Psi(t_0,p)}.$$

Wir haben gezeigt, dass es eine bijektive Korrespondenz zwischen vollständigen Vektorfeldern und Einparametergruppen von Diffeomorphismen auf einer Mannigfaltigkeit gibt.

Kapitel 2

Grundbegriffe der (pseudo-)Riemannschen Geometrie

2.1 (Pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Wir erinnern daran, dass eine symmetrische Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V *nichtentartet* heißt, falls für alle $v \in V$ ein $w \in V$ existiert, so dass $\langle v, w\rangle \neq 0$.

Definition 2.1.1. *Eine nichtentartete symmetrische Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V heißt auch* pseudo-Euklidisches Skalarprodukt*. Wir nennen $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ einen* pseudo-Euklidischen Vektorraum*. Ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein n-dimensionaler pseudo-Euklidischer Vektorraum und p die maximale Dimension eines Unterraumes, auf dem $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit ist, so heißt $(p, n-p)$ die* Signatur *von $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zusätzlich positiv definit (d.h., von Signatur $(n, 0)$, so heißt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein (Euklidisches) Skalarprodukt*, und $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein* Euklidischer Vektorraum*.*

Definition 2.1.2. *Eine* pseudo-Riemannsche Metrik *auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Familie g von pseudo-Euklidischen Skalarprodukten g_p auf T_pM, $p \in M$, die in folgendem Sinne differenzierbar ist: Wann immer $X, Y \in \Gamma(TM)$ differenzierbare Vektorfelder auf M sind, so ist die Funktion*

$$M \to \mathbb{R};\ p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$$

differenzierbar. Das Paar (M, g) heißt pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit*. Ist g_p für jedes p positiv definit, so heißt g eine* Riemannsche Metrik *und (M, g) eine* Riemannsche Mannigfaltigkeit*.*

Ist (M, g) eine zusammenhängende pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist die Signatur von g_p konstant auf M. Ist die Signatur konstant, so nennen wir diese auch die *Signatur* von M.

Definition 2.1.3. *Ist (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Signatur $(1, p)$ (oder $(p, 1)$), so nennen wir (M, g) eine* Lorentz-Mannigfaltigkeit*.*

Statt der Notation g_p werden wir auch oft die Bilinearformschreibweise $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ verwenden.

(Pseudo-)Riemannsche Metriken können auch als Schnitte in einem Vektorbündel aufgefasst werden. Allgemein werden wir in den Übungen sehen, dass Konstruktionen auf Vektorräumen aus der linearen Algebra, wie direkte Summe, Tensorprodukt, Übergang zum Dualraum etc., sich zu Konstruktionen auf Vektorbündeln übertragen. So gibt es beispielsweise das *Kotangentialbündel* T^*M, dessen Faser über $p \in M$ der Vektorraum $T_p^*M = (T_pM)^*$ der Linearformen auf T_pM ist. In diesem Sinne ist eine pseudo-Riemannsche Metrik ein Schnitt (wobei man sich die Äquivalenz der Differenzierbarkeitsbedingungen überlegen muss) in dem Vektorbündel

$$\mathrm{Sym}^2 T^*M,$$

dessen Faser über p aus den symmetrischen Bilinearformen auf T_pM besteht. (Zusätzlich erfüllt g noch die Bedingung, punktweise nichtentartet zu sein.)

In lokalen Koordinaten $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ auf $U \subset M$ kann man pseudo-Riemannsche Metriken wie folgt beschreiben: Definieren wir zu einer Familie g von pseudo-Euklidischen Skalarprodukten Funktionen $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ durch

$$g_{ij}(p) = g_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right),$$

so ist $(g_{ij}(p))$ die Matrixdarstellung von g_p bzgl. der Basis $(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p)$. Es gilt: g ist genau dann differenzierbar auf U, wenn die Funktionen g_{ij} differenzierbar sind. Um die Differenzierbarkeit auf ganz M zu testen, genügt es, diese lokale Differenzierbarkeit für alle Karten in einem Atlas von M zu testen.

Beispiel 2.1.4.

1. *Jeder pseudo-Euklidische Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ kann als pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit aufgefasst werden, indem wir das pseudo-Euklidische Skalarprodukt mittels der natürlichen Isomorphismen $T_vV \cong V$ auf T_vV übertragen.*

2. *Ist M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, so können wir T_pM als einen Unterraum von $\mathbb{R}^n$ auffassen. Schränken wir das (positiv definite) Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^n$ auf T_pM ein, so erhalten wir eine Riemannsche Metrik auf M (die sogenannte* induzierte Riemannsche Metrik auf *M).*

   Diese Konstruktion funktioniert nicht für beliebige Untermannigfaltigkeiten eines pseudo-Euklidischen Vektorraumes, da die Einschränkungen von pseudo-Euklidischen Skalarprodukten auf Unterräume nicht notwendigerweise nichtentartet sein müssen.

3. *Das vorige Beispiel lässt sich auf immersierte Untermannigfaltigkeiten von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten verallgemeinern: es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $i : N \to M$ eine Immersion. Dann definiert*

   $$(i^*g)_p(v, w) := g_{i(p)}(di_p(v), di_p(w))$$

   eine Riemannsche Metrik auf N, die sogenannte induzierte *oder* zurückgeholte *Riemannsche Metrik auf N.*

4. *Sind (M,g) und (N,h) zwei pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten, so können wir das Produkt $M \times N$ auf natürliche Weise zu einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit machen: Nach einer Übungsaufgabe ist $T_{(p,q)}M \times N \cong T_pM \oplus T_qN$, und wir definieren*

$$k_{(p,q)}((v_1,w_1),(v_2,w_2)) := g_p(v_1,v_2) + h_q(w_1,w_2).$$

Dies ist eine pseudo-Riemannsche Metrik auf $M \times N$.

Bemerkung 2.1.5. *Ein Teil der allgemeinen Theorie wird für Riemannsche und pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten analog verlaufen; im späteren Teil der Vorlesung werden wir uns jedoch hauptsächlich mit Aspekten Riemannscher Geometrie beschäftigen.*

Die Existenz einer Riemannschen Metrik auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist keine einschränkende Bedingung an M:

Satz 2.1.6. *Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit M existiert eine Riemannsche Metrik.*

Beweis. Die Aussage ist lokal richtig: Wann immer $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M ist, können wir auf U eine Riemannsche Metrik finden, z.B. $\varphi^*\langle\cdot,\cdot\rangle$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Es sei nun $\mathcal{A}$ die differenzierbare Struktur von M und $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine $\mathcal{A}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Für jedes α existiert also eine Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, und nach der Überlegung oben eine Riemannsche Metrik g_α auf U_α. Wir definieren nun

$$g_p := \sum_\alpha f_\alpha(p)(g_\alpha)_p.$$

Diese Summe ist wohldefiniert, da für jedes p nur endlich viele Summanden nicht verschwinden (Zerlegungen der Eins sind per Definition lokal endlich). Da die positive Linearkombination von Skalarprodukten wieder ein Skalarprodukt ist, folgt, dass g eine Riemannsche Metrik auf M definiert. □

Bemerkung 2.1.7. *Dieser Beweis funktioniert nicht für pseudo-Riemannsche Metriken, da die Summe von zwei pseudo-Euklidischen Skalarprodukten nicht notwendigerweise wieder ein pseudo-Euklidisches Skalarprodukt ist.*

In der Tat existiert nicht auf jeder Mannigfaltigkeit eine pseudo-Riemannsche Metrik beliebiger Signatur. Beispielsweise gibt es auf S^n genau dann eine Lorentzmetrik, wenn n ungerade ist.

2.2 Tensorfelder

In den Übungen werden wir ein *Tensorfeld vom Typ* (r,s) auf einer glatten Mannigfaltigkeit M als einen Schnitt in dem Vektorbündel

$$\underbrace{T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M}_{r} \otimes \underbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}_{s}.$$

definieren. Im Laufe der Vorlesung werden wir verschiedenen Tensoren begegnen, die aber sämtlich vom Typ $(r,1)$ oder $(r,0)$ sind. Für diese Typen können wir auch eine ad-hoc-Definition geben, die nicht auf dem Begriff des Tensorfeldes beruht:

Definition 2.2.1. *Ein* Tensorfeld vom Typ $(r, 1)$ *auf M ist eine Zuordnung A, die jedem Punkt $p \in M$ eine r-multilineare Abbildung*

$$A_p : \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{r} \to T_pM$$

zuordnet, die in dem Sinne differenzierbar ist, dass für alle Vektorfelder $X_1, \ldots, X_r$ auf M gilt, dass die Abbildung $p \mapsto A_p(X_1(p), \ldots, X_r(p))$ differenzierbar ist. Analog ist ein Tensorfeld vom Typ $(r, 0)$ *eine Zuordnung A, so dass*

$$A_p : \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{r} \to \mathbb{R}$$

r-multilinear ist.

Eine pseudo-Riemannsche Metrik ist also ein symmetrisches $(2, 0)$-Tensorfeld auf M, das punktweise nichtentartet ist.

2.3 Zusammenhänge

Eine technische Schwierigkeit, die beim Arbeiten mit Mannigfaltigkeiten auftritt, ist, dass kein kanonischer Zusammenhang zwischen den Tangentialräumen an zwei Punkten der Mannigfaltigkeit besteht. Wir werden unten in Abschnitt 2.5 sehen, dass wir mit Hilfe des Begriffs des Zusammenhangs einen solchen Zusammenhang herstellen können.

Definition 2.3.1. *Ein* (affiner) Zusammenhang *(oder* kovariante Ableitung*) auf einer differenzierbaren Mannigfaltigeit M ist eine Abbildung*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM),$$

bezeichnet mit $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ und $f, g \in C^\infty(M)$.

Beispiel 2.3.2. *In den Übungen werden wir sehen, dass auf $M = \mathbb{R}^n$ durch*

$$(\nabla_X Y)(p) = dY_p(X_p)$$

ein Zusammenhang definiert ist. Hierbei fassen wir die Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ als differenzierbare Abbildungen $X, Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf, dann ist dY_p eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dies bedeutet: $(\nabla_X Y)(p)$ ist nichts anderes als die Richtungsableitung von Y in Richtung X_p.

Man beachte, dass in obigem Beispiel der Wert von $\nabla_X Y$ in p nur vom Wert von X im Punkt p und den Werten von Y in einer Umgebung von p abhängt. Dies möchten wir nun allgemein beweisen.

Satz 2.3.3. *Es sei ∇ ein affiner Zusammenhang auf M und $p \in M$. Dann gilt für alle $X_1, X_2, Y \in \Gamma(TM)$: Falls $X_1(p) = X_2(p)$, so gilt $(\nabla_{X_1} Y)(p) = (\nabla_{X_2} Y)(p)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $(\nabla_{X_1} Y)(p) = (\nabla_{X_2} Y)(p)$ unter der Voraussetzung gilt, dass X_1 und X_2 in einer Umgebung U von p übereinstimmen. Unter dieser Voraussetzung können wir nach Korollar 1.6.3 eine differenzierbare Funktion φ wählen, die auf einer (kleineren) Umgebung V von p identisch 1 ist, und für die $\varphi X_1 = \varphi X_2$ auf ganz M gilt. (Wir wählen φ so, dass $\varphi|_{M \setminus U} = 0$.) Dann gilt:

$$(\nabla_{X_1} Y)(p) = \varphi(p)(\nabla_{X_1} Y)(p) = \nabla_{\varphi X_1} Y)(p) = (\nabla_{\varphi X_2} Y)(p) = (\nabla_{X_2} Y)(p).$$

Dieser erste Teil des Beweises zeigt, dass es Sinn ergibt, Ausdrücke der Form $\nabla_X Y$ zu betrachten, falls X nur ein lokal auf einer offenen Menge U definiertes Vektorfeld ist. In diesem Fall wird $\nabla_X Y$ ebenfalls ein auf U definiertes Vektorfeld. Denn: mit Hilfe von Glättungsfunktionen wie oben im Beweis können wir zu jedem Punkt $p \in U$ ein auf ganz M definiertes Vektorfeld Z finden, das in einer Umgebung von p mit X übereinstimmt. Wir setzen dann $(\nabla_X Y)(p) = (\nabla_Z Y)(p)$. Dies ist aufgrund des Arguments oben unabhängig von der Wahl von Z.

Im zweiten Teil des Beweises zeigen wir nun die eigentliche Behauptung. Wie oben gezeigt, genügt es, lokale Vektorfelder (in lokalen Koordinaten (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$) der Form $X_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $X_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ mit $\alpha_i(p) = \beta_i(p)$ zu betrachten. Es gilt nun

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_1} Y)(p) &= (\nabla_{\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}} Y)(p) \\ &= \sum_i \alpha_i(p)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y)(p) \\ &= \sum_i \beta_i(p)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y)(p) = (\nabla_{X_2} Y)(p),\end{aligned}$$

was die Behauptung ist. □

Der Satz zeigt, dass für $v \in T_pM$ und $Y \in \Gamma(TM)$ der Tangentialvektor $\nabla_v Y \in T_pM$ wohldefiniert ist: wir setzen v beliebig zu einem differenzierbaren Vektorfeld X fort und definieren $(\nabla_v Y) := (\nabla_X Y)(p)$; dieser Tangentialvektor ist unabhängig von der gewählten Erweiterung.

Ebenfalls ist leicht einzusehen, dass der Beweis dieses Satzes in einem allgemeineren Kontext funktioniert:

Satz 2.3.4. *Es sei $A : \underbrace{\Gamma(TM) \times \ldots \times \Gamma(TM)}_{r} \to \Gamma(TM)$ eine r-multilineare Abbildung, die die zusätzliche Eigenschaft erfüllt, dass*

$$A(X_1, \ldots, X_{i-1}, fX_i, X_{i+1}, \ldots, X_r) = fA(X_1, \ldots, X_r)$$

für alle differenzierbaren Funktionen f auf M und alle Vektorfelder $X_1, \ldots, X_r$ auf M. Dann existiert ein Tensorfeld B vom Typ $(r, 1)$ auf M, so dass

$$A(X_1, \ldots, X_r)(p) = B_p(X_1(p), \ldots, X_r(p))$$

für alle $X_1, \ldots, X_r \in \Gamma(TM)$ und alle $p \in M$.

Eine analoge Aussage gilt für $(r, 0)$-Tensorfelder: hier starten wir mit einer Abbildung $A : \underbrace{\Gamma(TM) \times \ldots \times \Gamma(TM)}_{r} \to C^\infty(M)$, die multilinear bezüglich glatter Funktionen ist.

Beispiel 2.3.5. *Dieser Satz wird uns oft helfen, zu zeigen, dass gewisse Ausdrücke Tensorfelder definieren. Beispielsweise werden wir in den Übungen sehen, dass zu jeder kovarianten Ableitung ∇ durch*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

ein $(2, 1)$-Tensorfeld auf M definiert ist (der sogenannte Torsionstensor*). Damit ergeben Ausdrücke der Form $T(v, w)$, wobei v, w nur Tangentialvektoren (keine Vektorfelder) sind, Sinn, obwohl die einzelnen Ausdrücke in der Definition von T keinen Sinn ergeben, wenn wir X und Y durch v beziehungsweise w ersetzen.*

Für ein festes Vektorfeld Y auf M ist also durch $X \mapsto \nabla_X Y$ ein $(1, 1)$-Tensorfeld definiert, aber weder ∇ selbst noch $Y \mapsto \nabla_X Y$ (für festes X) sind Tensorfelder.

Trotzdem geht der erste Teil des Beweises von Satz 2.3.3 für den zweiten Eintrag von ∇ durch:

Satz 2.3.6. *Es sei ∇ ein affiner Zusammenhang auf M, $p \in M$, $v \in T_pM$ und $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$. Stimmen Y_1 und Y_2 in einer Umgebung von p überein, so gilt $\nabla_v Y_1 = \nabla_v Y_2$.*

Beweis. Wir erweitern v zu einem Vektorfeld auf M und wählen wie im ersten Teil des Beweises von Satz 2.3.3 eine Funktion φ, die auf einer Umgebung von p konstant 1 ist, so dass $\varphi Y_1 = \varphi Y_2$ auf ganz M. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_v Y_1 &= (\nabla_X Y_1)(p) \\
&= \varphi(p)(\nabla_X Y_1)(p) \\
&= \varphi(p)(\nabla_X Y_1)(p) + (Y_1(\varphi))(p) \\
&= (\nabla_X \varphi Y_1)(p) \\
&= (\nabla_X \varphi Y_2)(p) \\
&= \ldots = \nabla_v Y_2.
\end{aligned}$$

□

Sind nun (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, lokale Koordinaten auf M, dann zeigen diese Sätze, dass durch $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ wohldefinierte Vektorfelder auf U gegeben sind. Schreiben wir diese wieder in der Basis, so sind durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Funktionen $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ definiert. Diese heißen die *Christoffel-Symbole* von ∇ auf U. Die Christoffel-Symbole von ∇ auf U bestimmen den Zusammenhang ∇ auf U, wie man leicht sehen kann, indem man zwei beliebige Vektorfelder X und Y in der Basis schreibt, und die Rechenregeln für ∇ benutzt.

2.4 Vektorfelder längs Kurven

Um ein Vektorfeld mit einem affinen Zusammenhang abzuleiten, ist es bislang, wie wir oben gesehen haben, erforderlich, dass es auf einer offenen Umgebung des Punktes, in dem wir ableiten möchten, definiert ist. Das ist für unsere Zwecke nicht ausreichend; beispielsweise möchten wir die zweite Ableitung einer Kurve $c : I \to M$ betrachten, aber die erste Ableitung $\dot{c}$ ist kein auf einer offenen Menge definiertes Vektorfeld.

Definition 2.4.1. *Es sei $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Dann ist ein* Vektorfeld längs c *eine differenzierbare Abbildung $X : [a, b] \to TM$, so dass $X_t = X(t) \in T_{c(t)}M$. Wir bezeichnen den Raum der Vektorfelder längs c mit $\Gamma_c(TM)$.*

Offensichtlich ist $\dot{c}$ ein Vektorfeld längs c.

Bemerkung 2.4.2. *$\Gamma_c(TM)$ ist ein Modul über $C^\infty(I)$.*

Ist $X \in \Gamma(TM)$ und $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve, so ist $X \circ c$ ein Vektorfeld längs c. Umgekehrt gilt jedoch nicht, dass jedes Vektorfeld längs einer Kurve die Einschränkung eines Vektorfeldes auf M ist. Ist nun ∇ ein Zusammenhang auf M, $X \in \Gamma(TM)$ und $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve, so wird $(\nabla_{\dot{c}}X)(t) = \nabla_{\dot{c}(t)}X$ wieder ein Vektorfeld längs c; die rechte Seite ergibt Sinn, weil wir in Satz 2.3.3 gezeigt haben, dass ∇ im unteren Eintrag nur von den Werten am jeweiligen Punkt abhängt. Der folgende Satz sagt, dass wir diese Art der Ableitung auf eindeutige Weise zu einer auf beliebigen Vektorfeldern längs c definierten Operation erweitern können.

Satz 2.4.3. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ∇ ein affiner Zusammenhang auf M. Dann existiert eine eindeutige Abbildung*

$$\frac{\nabla}{dt} : \Gamma_c(TM) \longrightarrow \Gamma_c(TM),$$

bezeichnet mit $X \mapsto \frac{\nabla}{dt}X$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\frac{\nabla}{dt}(X + Y) = \frac{\nabla}{dt}X + \frac{\nabla}{dt}Y$
2. $\frac{\nabla}{dt}(fX) = f'X + f\frac{\nabla}{dt}X$

für alle $X, Y \in \Gamma_c(TM)$ und $f \in C^\infty(I)$, sowie

3. *Ist $X = Z \circ c$ für ein $Z \in \Gamma(TM)$, so ist $\frac{\nabla}{dt}X = \nabla_{\dot{c}}Z$.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass eine solche Abbildung $\frac{\nabla}{dt}$ existiert, und möchten die Eindeutigkeit zeigen. Dazu betrachten wir lokale Koordinaten (U, φ), $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, so dass $c(I) \cap U \neq \emptyset$. Setzen wir $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, so können wir jedes Vektorfeld X längs c auf dem Bereich, der in U verläuft, als

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \partial_i \circ c$$

schreiben, wobei $f_i \in C^\infty(I)$. Damit rechnen wir mit Hilfe der Bedingungen 1. und 2.:

$$\frac{\nabla}{dt}X = \sum_i f_i' \cdot \partial_i \circ c + \sum_i f_i \frac{\nabla}{dt}\partial_i \circ c.$$

Aufgrund von 3. gilt nun aber:

$$\begin{aligned}\frac{\nabla}{dt}\partial_i \circ c &= \nabla_{\dot c}\partial_i \\ &= \nabla_{\sum_j (x_j\circ c)'\cdot \partial_j \circ c}\partial_i \\ &= \sum_j (x_j \circ c)'(\nabla_{\partial_j}\partial_i)\circ c\end{aligned}$$

also insgesamt

$$\frac{\nabla}{dt}X = \sum_i f_i' \cdot \partial_i \circ c + \sum_{i,j}(x_j \circ c)' f_i (\nabla_{\partial_j}\partial_i)\circ c. \tag{2.4.1}$$

Da die rechte Seite nur von X, c und ∇ abhängt, zeigt dies, dass die Abbildung $\frac{\nabla}{dt}$ eindeutig ist. Umgekehrt können wir die Existenz von $\frac{\nabla}{dt}$ mit Hilfe dieser Gleichung zeigen: Wir definieren $\frac{\nabla}{dt}$ zunächst lokal über (2.4.1) und zeigen, dass die Eigenschaften 1., 2. und 3. gelten. Dann gibt dies eine wohldefinierte globale Abbildung, da die entsprechende Definition bzgl. einer zweiten Karte (V, ψ) auf dem Schnitt $U \cap V$ aufgrund der bereits gezeigten Eindeutigkeit übereinstimmt. □

Es ist hilfreich, (2.4.1) explizit mit Hilfe der Christoffelsymbole auszudrücken: wir benennen in der ersten Summe i in k um, in der zweiten vertauschen wir i und j und erhalten

$$\frac{\nabla}{dt}X = \sum_k \left(f_k' + \sum_{i,j}(x_i \circ c)' f_j \Gamma_{ij}^k \circ c \right) \cdot \partial_k \circ c \tag{2.4.2}$$

2.5 Parallelverschiebung

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇, sowie $c : [a,b] \to M$ eine differenzierbare Kurve. Die Parallelverschiebung längs c wird ein mit Hilfe von ∇ konstruierter linearer Isomorphismus $T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M$ sein: mit Hilfe des Zusammenhangs ∇ stellen wir so einen Zusammenhang zwischen Tangentialräumen an verschiedenen Punkten von M her.

Definition 2.5.1. *Ein Vektorfeld X längs c heißt* parallel, *falls $\frac{\nabla}{dt}X = 0$.*

Satz 2.5.2. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇. Es sei $c : [a,b] \to M$ eine differenzierbare Kurve und $v \in T_{c(a)}M$. Dann existiert ein eindeutiges paralles Vektorfeld X längs c, so dass $X(a) = v$.*

Beweis. Falls wir den Satz für den Fall, dass $c([a,b])$ in einer lokalen Koordinatenumgebung enthalten ist, zeigen können, dann folgt die allgemeine Behauptung wie folgt: wir können das Bild von c aufgrund der Kompaktheit von $[a,b]$ mit endlich vielen Koordinatenumgebungen überdecken. Wir können X nun sukzessive in den einzelnen Koordinatenumgebungen fortsetzen; aufgrund der Eindeutigkeit setzen sich diese lokalen Vektorfelder längs Einschränkungen von c zu einem Vektorfeld längs ganz c fort.

Wir müssen demzufolge den Satz nur noch für den Fall zeigen, dass $c([a,b])$ in einer Koordinatenumgebung U ist; sei $\varphi = (x_1, \ldots, x_n) : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte. Wir setzen $X_i := \frac{\partial}{\partial x_i} \circ c$. Dann können wir den Vektor v als

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i X_i(a)$$

für gewisse $v_i \in \mathbb{R}$ schreiben. Falls X nun ein Vektorfeld längs c ist, dann schreiben wir

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i X_i$$

für gewisse differenzierbare Funktionen $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Aufgrund von Gleichung (2.4.2) gilt, dass X genau dann parallel ist, wenn

$$f_k' + \sum_{i,j} (x_i \circ c)' f_j \Gamma_{ij}^k \circ c = 0$$

für alle k gilt. Dies ist ein System von n linearen Differentialgleichungen. Es besitzt eine eindeutige Lösung, die die Anfangsbedingung $f_k(a) = v_k$ erfüllt. Dies zeigt sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit des parallelen Vektorfeldes X mit $X(a) = v$. □

Der Raum der parallelen Vektorfelder längs c ist ein Vektorraum; der Satz zeigt, dass eine Basis dieses Vektorraumes zu jedem Zeitpunkt $t \in [a,b]$ eine Basis des Tangentialraumes $T_{c(t)}M$ liefert.

Definition 2.5.3. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇, und $c : [a,b] \to M$ eine differenzierbare Kurve. Dann bezeichnen wir die Abbildung $T_{c(a)} \to T_{c(b)}$, die dadurch gegeben ist, dass ein Vektor $v \in T_{c(a)}$ auf die Auswertung in b des eindeutigen parallelen Vektorfeldes X längs c mit $X(a) = v$ geschickt wird, mit ${}_c||_a^b$. Sie heißt die* Parallelverschiebung längs c von a nach b.

Lemma 2.5.4. *${}_c||_a^b$ ist ein linearer Isomorphismus.*

Beweis. Die Parallelverschiebung ist linear, da sowohl die Erweiterung eines Vektors $v \in T_{c(a)}M$ zu einem parallelen Vektorfeld längs c als auch die Auswertungsabbildung in $c(b)$ lineare Abbildungen sind. Die Umkehrabbildung dieser Parallelverschiebung ist durch die Parallelverschiebung entlang des umgekehrt durchlaufenen Weges c gegeben. □

Wir haben somit mit Hilfe des Begriffs des Zusammenhangs einen Zusammenhang zwischen Tangentialräumen an verschiedene Punkte hergestellt (der von der Wahl einer Kurve zwischen den Punkten abhängt). Es gilt, dass die Parallelverschiebungen längs Kurven immer noch die komplette Information des Zusammenhangs ∇ beinhalten: der folgende Satz zeigt, dass eine kovariante Ableitung als gewöhnlichen Differenzenquotienten schreiben können, sofern wir die entsprechenden Tangentialvektoren mittels der Parallelverschiebung in denselben Tangentialraum transportieren.

Satz 2.5.5. *Es sei $v \in T_pM$ und X ein Vektorfeld auf M, sowie c eine Kurve in M mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Dann gilt:*

$$\nabla_v X = \lim_{t\to 0} \frac{{}_c||_t^0 X_{c(t)} - X_p}{t}.$$

Beweis. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von T_pM, die wir zu parallelen Vektorfeldern $X_1, \ldots, X_n$ längs c erweitern. Wir können $X \circ c$ nun in dieser Basis schreiben:

$$X \circ c = \sum_{i=1}^n f_i X_i,$$

wobei f_i differenzierbare Funktionen sind. Dann gilt einerseits

$$\nabla_v X = \left.\frac{\nabla}{dt}\right|_{t=0} X \circ c = \sum_{i=1}^n f_i'(0) v_i + f_i(0) \left.\frac{\nabla}{dt}\right|_{t=0} X_i = \sum_{i=1}^n f_i'(0) v_i$$

und andererseits

$${}_c||_t^0 X_{c(t)} = \sum_{i=1}^n f_i(t) v_i,$$

so dass

$$\lim_{t\to 0} \frac{{}_c||_t^0 X_{c(t)} - X_p}{t} = \lim_{t\to 0} \sum_{i=1}^n \frac{f_i(t) - f_i(0)}{t} v_i = \sum_i f_i'(0) v_i.$$

□

Ein interessantes Objekt, das man aus der Parallelverschiebung erhält, ist die sogenannte Holonomiegruppe. Wir geben hier nur die Definition - sie wird in dieser Vorlesung keine Rolle spielen.

Definition 2.5.6. *Die* Holonomiegruppe *von M in einem Punkt p ist die Untergruppe von $\mathrm{GL}(T_pM)$, die aus allen Parallelverschiebungen ${}_c||_a^b : T_pM \to T_pM$ besteht, wobei $c : [a,b] \to M$ über alle Wege mit $c(a) = c(b) = p$ läuft.*

2.6 Der Levi-Civita-Zusammenhang

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass es auf einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit einen ausgezeichneten Zusammenhang, den sogenannten Levi-Civita-Zusammenhang, gibt.

In den Übungen wurde gezeigt, dass die folgende Definition ein Tensorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit liefert.

Definition 2.6.1. *Die* Torsion *(oder der* Torsionstensor*) einer kovarianten Ableitung ∇ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist durch*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

definiert. ∇ heißt torsionsfrei*, wenn $T = 0$.*

Bemerkung 2.6.2. *In dieser Bemerkung versuchen wir, eine geometrische Interpretation der Bedingung an einen Zusammenhang, torsionsfrei zu sein, zu geben. Betrachten wir zunächst $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem kanonischen Zusammenhang, siehe Beispiel 2.3.2. Es sei $p \in \mathbb{R}^n$ und $v, w \in T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Verschieben wir v nun parallel längs der Kurve $c_w(t) = p + tw$ sowie w parallel längs der Kurve $c_v(t) = p + tv$, so erhalten wir ein Parallelogramm mit Kanten $v, w, {}_{c_w}||_0^t v = v, {}_{c_v}||_0^t w = w$. Es gilt also:*

$$v + {}_{c_v}||_0^t w - w - {}_{c_w}||_0^t v = 0. \tag{2.6.1}$$

Was wäre das Analogon dieser Konstruktion in einer Mannigfaltigkeit M, versehen mit einem affinen Zusammenhang ∇? Wir fixieren Koordinaten (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ um einen Punkt $p \in M$. Wir wählen Kurven $c_1, c_2 : I \to M$ mit $c_i(0) = p$ und $c_i'(0) = \partial_i(p)$, und setzen $v = c_1'(0)$, $w = c_2'(0)$ (Umgekehrt könnten wir auch zu gegebenen Tangentialvektoren $v, w \in T_pM$ Koordinaten wählen, so dass v und w genau die ersten beiden Elemente der zugehörigen Basis von T_pM sind.) Dann können wir $T(c_1'(0), c_2'(0))$ mit Hilfe von Satz 2.5.5 beschreiben:

$$\begin{aligned} T(c_1'(0), c_2'(0)) &= T(\partial_1, \partial_2)(p) \\ &= (\nabla_{\partial_1}\partial_2)(p) - (\nabla_{\partial_2}\partial_1)(p) - \underbrace{[\partial_1, \partial_2](p)}_{=0} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{v + {}_{c_1}||_t^0 \partial_2(c_1(t)) - w - {}_{c_2}||_t^0 \partial_1(c_2(t))}{t}. \end{aligned}$$

Vergleichen wir dies mit Gleichung (2.6.1), so sehen wir, dass ∇ also genau dann torsionsfrei ist, wenn derart konstruierte „infinitesimale Parallelogramme" „infinitesimal schließen".

Definition 2.6.3. *Es sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang auf M. Dann heißt ∇* metrisch, *falls*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

für alle Vektorfelder X, Y, Z auf M gilt.

Satz 2.6.4. *Ist ∇ ein Zusammenhang auf einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit, so ist ∇ genau dann metrisch, wenn für alle differenzierbaren Kurven c und alle Vektorfelder X und Y längs c gilt, dass*

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \langle\frac{\nabla}{dt}X, Y\rangle + \langle X, \frac{\nabla}{dt}Y\rangle. \tag{2.6.2}$$

Beweis. Schreiben wir X und Y in lokalen Koordinaten (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, als

$$X = \sum_i f_i\partial_i \circ c, \qquad Y = \sum_i h_i\partial_i \circ c,$$

und die Metrik als $g_{ij} = \langle\partial_i, \partial_j\rangle$, dann erhalten wir

$$\langle X, Y\rangle(t) = \sum_{i,j} f_i(t)h_j(t)g_{ij}(c(t)).$$

Damit ist die linke Seite der zu zeigenden Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\langle X,Y\rangle = \sum_{i,j}(f_i'h_j + f_ih_j')g_{ij}(c(t)) + \sum_{i,j,k} f_ih_j\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(c(t))c_k'(t), \tag{2.6.3}$$

wobei $\varphi\circ c = (c_1,\ldots,c_n)$. Den inneren Ausdruck $\partial_k g_{ij}$ können wir wie folgt ausdrücken:

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k\langle\partial_i,\partial_j\rangle = \langle\nabla_{\partial_k}\partial_i,\partial_j\rangle + \langle\partial_i,\nabla_{\partial_k}\partial_j\rangle = \sum_l \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il}.$$

Um die rechte Seite zu verstehen, benutzen wir Gleichung (2.4.2):

$$\frac{\nabla}{dt}X = \sum_l\left(f_l' + \sum_{i,j}c_i'f_j\Gamma_{ij}^l\circ c\right)\cdot\partial_l\circ c,$$

d.h.

$$\begin{aligned}
&\langle\frac{\nabla}{dt}X,Y\rangle + \langle X,\frac{\nabla}{dt}Y\rangle\\
&= \sum_{k,l}\left(f_l' + \sum_{i,j}c_i'f_j\Gamma_{ij}^l\circ c\right)h_k(g_{lk}\circ c) + \sum_{k,l}\left(h_l' + \sum_{i,j}c_i'h_j\Gamma_{ij}^l\circ c\right)f_k(g_{lk}\circ c)\\
&= \sum_{i,j}(f_i'h_j + f_ih_j')(g_{ij}\circ c) + \sum_{i,j,k,l}f_ih_jc_k'((\Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{li})\circ c),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Indizes umbenannt haben, um die Gleichheit zu (2.6.3) zu zeigen.

Es gelte nun die Gleichung (2.6.2) für jede Kurve c und je zwei Vektorfelder c längs c. Seien X,Y,Z Vektorfelder auf M und $p\in M$; zu zeigen ist, dass

$$X_p\langle Y,Z\rangle = \langle\nabla_{X_p}Y,Z_p\rangle + \langle Y_p,\nabla_{X_p}Z\rangle.$$

Es sei $c:\mathbb{R}\to M$ eine Kurve mit $c(0)=p$ und $c'(0)=X_p$; dann ist die linke Seite gleich $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\langle Y_{c(t)},Z_{c(t)}\rangle_{c(t)}$. (Für jede differenzierbare Funktion gilt $X_pf = df_p(X_p) = df_{c(0)}(c'(0)) = (f\circ c)'(0)$.) Wir erhalten also unter Benutzung der Voraussetzung

$$\begin{aligned}
X_p\langle Y,Z\rangle &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle Y_{c(t)},Z_{c(t)}\rangle\\
&= \langle\frac{\nabla}{dt}\Big|_{t=0}(Y\circ c),Z_p\rangle + \langle Y_p,\frac{\nabla}{dt}(Z\circ c)\rangle\\
&= \langle\nabla_{X_p}Y,Z_p\rangle + \langle Y_p,\nabla_{X_p}Z\rangle.
\end{aligned}$$

□

Der folgende Satz wird in den Übungen bewiesen:

Satz 2.6.5. *Es sei (M,g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist eine kovariante Ableitung ∇ auf M genau dann metrisch, wenn alle Parallelverschiebungen Isometrien bezüglich der entsprechenden pseudo-Euklidischen Skalarprodukte sind.*

Theorem 2.6.6. *Es sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert auf M genau ein torsionsfreier*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

metrischer

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

Zusammenhang ∇. Dieser ist durch die Gleichung

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle =& X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &+ \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

bestimmt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jeder torsionsfreie metrische Zusammenhang auf M durch die Gleichung (2.6.4) gegeben ist. Dazu betrachten wir folgende Kombinationen der Torsionsfreiheit und der Metrizität:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{2.6.5}$$
$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle - \langle Z, [X, Y]\rangle \tag{2.6.6}$$
$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_X Z, Y\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle. \tag{2.6.7}$$

Nun addieren wir (2.6.5) zu (2.6.6) und ziehen (2.6.7) ab und erhalten (2.6.4).

Für die Existenz eines torsionsfreien metrischen Zusammenhangs muss man nachrechnen, dass durch (2.6.4) ein solcher gegeben ist. Für diese lange Rechnung verweisen wir auf [4, Seite 82]. □

Definition 2.6.7. *Der eindeutige torsionsfreie metrische Zusammenhang auf einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit heißt der* Levi-Civita-Zusammenhang *von (M, g).*

Beispiel 2.6.8.

1. *Auf $\mathbb{R}^n$ ist der Levi-Civita-Zusammenhang durch den in Beispiel 2.3.2 definierten gegeben.*

2. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, versehen mit der durch die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$ induzierten Riemannschen Metrik, sowie X, Y zwei Vektorfelder auf M. Wir fassen Y als eine Abbildung $Y : M \to \mathbb{R}^n$ auf. Wir werden in den Übungen sehen, dass der Levi-Civita-Zusammenhang auf M durch*

$$(\nabla_X Y)(p) = \mathrm{pr}_{T_pM}(dY_p)(X_p)$$

wobei $\mathrm{pr}_{T_pM} : \mathbb{R}^n \to T_pM$ die Orthogonalprojektion auf den Unterraum $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

2.7 Geodätische

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇. Wir erinnern daran, dass für eine Kurve $\gamma : I \to M$ die Ableitung $\dot\gamma$ ein Vektorfeld längs γ ist.

Definition 2.7.1. *Eine Kurve $\gamma : I \to M$ heißt* Geodätische*, falls $\dot\gamma$ parallel ist, d.h.*

$$\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma = 0.$$

Zunächst schreiben wir die Bedingung an γ, Geodätische zu sein, in lokalen Koordinaten (U, φ), $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$. Wir setzen $\gamma_i = x_i \circ \gamma$; dann gilt

$$\dot\gamma = \sum_i \gamma_i' \partial_i \circ \gamma.$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.4.2) gilt also:

$$\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma = \sum_k \left(\gamma_k'' + \sum_{i,j} \gamma_i' \gamma_j' \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \right) \cdot \partial_k \circ \gamma,$$

d.h. γ ist in dem Bereich, in dem die Kurve in U verläuft, genau dann eine Geodätische, wenn

$$\gamma_k'' + \sum_{i,j} \gamma_i' \gamma_j' \Gamma_{ij}^k \circ \gamma = 0 \tag{2.7.1}$$

für alle k.

Beispiel 2.7.2.

1. *Betrachten wir zunächst den Fall $M = \mathbb{R}^n$, mit dem Levi-Civita-Zusammenhang der Standardmetrik, d.h. dem in Beispiel 2.3.2 definierten Zusammenhang. In den Übungen haben wir ausgerechnet, dass alle Christoffelsymbole bezüglich der Standardkarte verschwinden; dies bedeutet, dass die Geodätischen im $\mathbb{R}^n$ genau die Kurven der Form $\gamma(t) = v + tw$ sind, wobei $v, w \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Betrachten wir den Fall $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so sehen wir, dass Geodätische nicht notwendigerweise auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sein müssen.*

3. *Es sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, mit der kovarianten Ableitung aus Beispiel 2.6.8. Es gilt, dass eine Kurve $\gamma : I \to M$ genau dann eine Geodätische ist, wenn $\ddot\gamma(t) \perp T_{\gamma(t)}M$ für alle $t \in I$.*

4. *Betrachten wir den Zylinder $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 1\}$. Wir behaupten, dass die Schraubenlinien*

$$c(t) = (\cos(\alpha t), \sin(\alpha t), \beta t),$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Geodätische in Z (bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs der induzierten Metrik) sind. In der Tat berechnen wir:

$$c'(t) = (-\alpha \sin(\alpha t), \alpha \cos(\alpha t), \beta)$$

und

$$c''(t) = (-\alpha^2 \cos(\alpha t), -\alpha^2 \sin \alpha(t), 0) \perp T_{c(t)}Z.$$

5. *In den Übungen werden wir sehen, dass im speziellen Fall von $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ (versehen mit dem Levi-Civita-Zusammenhang der Einschränkung der Standardmetrik von $\mathbb{R}^n$) die Bilder der Geodätischen genau die Großkreise sind, d.h. die Schnitte von S^n mit zweidimensionalen Unterräumen von $\mathbb{R}^n$.*

6. *Ist ∇ metrisch bezüglich einer Riemannschen Metrik auf M, dann gilt:*
$$\frac{d}{dt}\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle = 2\langle\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma,\dot\gamma\rangle = 0,$$
also ist $||\dot\gamma||$ konstant.

Wieder haben wir es also mit einem Begriff zu tun, der sich in lokalen Koordinaten in ein System von Differentialgleichungen übersetzt; anders als im Fall der parallelen Vektorfelder längs einer Kurve, siehe Satz 2.5.2, handelt es sich hier aber um ein nichtlineares System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir können dieses System von Differentialgleichungen für die Funktionen γ_i leicht in ein System erster Ordnung für Funktionen γ_i und η_i umwandeln, und zwar
$$\begin{cases}\gamma_k' = \eta_k\\ \eta_k' = -\sum_{i,j}\gamma_i'\gamma_j'\Gamma_{ij}^k\circ\gamma.\end{cases} \tag{2.7.2}$$
Dies kann man so auffassen, dass wir die Bedingung, Geodätische zu sein, als eine Bedingung an die Kurve $\gamma' : I \to TM;\ t \mapsto \gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ auffassen: betrachte das Tangentialbündel $\pi : TM \to M$, und auf einer Kartenumgebung (U,φ), $\varphi = (x_1,\dots,x_n)$, die lokale Trivialisierung
$$\psi : TU \longrightarrow \varphi(U)\times\mathbb{R}^n;\ v \mapsto (\varphi(\pi(v)), v(x_1),\dots,v(x_n)).$$
Mit anderen Worten: $(x_1\circ\pi,\dots,x_n\circ\pi,y_1,\dots,y_n)$ ist eine Karte auf TU, wobei $y_i : TU \to \mathbb{R}$ durch
$$y_i(v) = v(x_i)$$
definiert ist. In dem Bereich, in dem γ in U verläuft, gilt nun:
$$\begin{aligned}(\psi\circ\gamma')(t) &= (x_1(\gamma(t)),\dots,x_n(\gamma(t)),y_1(\gamma'(t)),\dots,y_n(\gamma'(t)))\\ &= (\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t),\gamma_1'(t),\dots,\gamma_n'(t)).\end{aligned}$$
Es sei nun X das durch
$$X_{(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)} = (b_1,\dots,b_n,-\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1 b_ib_j,\dots,-\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^n b_ib_j)$$
gegebene Vektorfeld auf $\varphi(U)\times\mathbb{R}^n$. Dann gilt, dass eine Kurve $I \to \varphi(U)\times\mathbb{R}^n;\ t\mapsto(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t),\eta_1(t),\dots,\eta_n(t))$ genau dann eine Integralkurve von X ist, wenn (γ_i,η_i) eine Lösung des Systems von Differentialgleichungen (2.7.2) ist, d.h. genau dann, wenn $\gamma = \varphi^{-1}\circ(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ eine Geodätische ist. Das Vektorfeld
$$Y = (d\psi^{-1})\circ X\circ\psi$$
auf TU (d.h.: die Abbildung $Y : TU \to TTU;\ Y_v = d\psi^{-1}(X_{\psi(v)})$) hat also als Integralkurven genau die Abbildungen $\psi^{-1}\circ(\gamma_1,\dots,\gamma_n,\eta_1,\dots,\eta_n)$, wobei $(\gamma_1,\dots,\gamma_n,\eta_1,\dots,\eta_n)$ eine Lösung von (2.7.2) ist, d.h. genau die Abbildungen $\gamma' : I \to TU$, wobei $\gamma : I \to U$ eine Geodätische ist.

Nach unseren Resultaten in Abschnitt 1.10 besagt dies, dass für jedes $v \in TU$ eine eindeutige maximal definierte Integralkurve $\alpha : I \to TU$ mit $\alpha(0) = v$ existiert. Dann ist $\gamma := \pi\circ\alpha$ eine Geodätische in U und $\alpha = \gamma'$. Wir haben gezeigt:

Satz 2.7.3. *Für alle $p \in M$ und $v \in T_pM$ existieren $\varepsilon > 0$ und eine Geodätische $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Jede weitere Geodätische $\tilde{\gamma} : (-\delta, \delta) \to M$ mit denselben Anfangsbedingungen $\tilde{\gamma}(0) = p$ und $\tilde{\gamma}'(0) = v$ stimmt auf einem Intervall um 0 mit γ überein.*

Wir werden im Folgenden (unter Missachtung des Definitionsbereiches) einfach sagen, dass die Geodätische γ mit Anfangsbedingung $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$, eindeutig ist, und sie mit γ_v bezeichnen.

Die derart auf Kartenumgebungen TU definierten Vektorfelder setzen sich zu einem globalen Vektorfeld Y auf TM zusammen: Seien nämlich Y_1 und Y_2 die wie oben konstruierten Vektorfelder auf TU_1 bzw. TU_2, dann stimmen die Einschränkungen von Y_1 und Y_2 auf $TU_1 \cap TU_2 = T(U_1 \cap U_2)$ überein, da sie dieselben Integralkurven besitzen (Ableitungen von Geodätischen, die in $U_1 \cap U_2$ verlaufen).

Wir haben also gezeigt, dass es ein eindeutiges Vektorfeld Y auf TM gibt, dass die Eigenschaft hat, dass seine Integralkurven genau die Kurven der Form γ' sind, wobei γ eine Geodätische in M ist. Man beachte, dass die Kurven γ in M und γ' in TM dieselbe Information beinhalten: γ' erhalten wir offensichtlich aus γ durch Ableiten; umgekehrt erhalten wir γ aus γ' über die Gleichung $\gamma = \pi \circ \gamma'$ zurück. Verstehen wir also die Integralkurven von Y, so verstehen wir die Geodätischen auf M.

In Abschnitt 1.10 haben wir die Existenz lokaler Flüsse um einen gewählten Punkt.

Definition 2.7.4. *Der lokale Fluss von Y heißt* geodätischer Fluss.

Betrachten wir den geodätischen Fluss um die Punkte $0 = 0_p \in T_pM$, so erhalten wir:

Für alle $p \in M$ existiert eine offene Menge V um 0_p in TM, $\delta > 0$, sowie eine differenzierbare Abbildung $\Phi : (-\delta, \delta) \times V \to TM$, so dass $\Phi_v : t \mapsto \Phi(t, v)$ die eindeutige Integralkurve von Y mit der Anfangsbedingung $\Phi_v(0) = v$ ist. Da diese Integralkurven von der Form γ' sind, wobei γ eine Geodätische in M ist, folgt:

Satz 2.7.5. *Die Abbildung $\beta = \pi \circ \Phi : (-\delta, \delta) \times V \to M$ besitzt die Eigenschaft, dass für alle $v \in V$ die Abbildung $t \mapsto \beta(t, v)$ mit der eindeutigen Geodätischen γ_v in M mit $\gamma_v(0) = \pi(v)$ und $\gamma_v'(0) = v$ übereinstimmt.*

Lemma 2.7.6. *Es sei $v \in T_pM$. Ist die Geodätische γ_v auf dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert, so ist γ_{av} für $a > 0$ auf dem Intervall $(-\varepsilon/a, \varepsilon/a)$ definiert, und es gilt*

$$\gamma_{av}(t) = \gamma_v(at).$$

Beweis. Es sei $h(t) = \gamma_v(at)$. Dann gilt $h(0) = p$ und $h'(t) = a\gamma_v'(at)$, also insbesondere $h'(0) = av$. Aufgrund der Eindeutigkeit von Geodätischen mit gewählten Anfangsbedingungen genügt es demnach zu zeigen, dass $\frac{\nabla}{dt} h' = 0$. Es sei t_0 fest gewählt; in lokalen Koordinaten (U, φ) um $h(t_0)$, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, schreiben wir also $\varphi \circ \gamma_v = (c_1, \ldots, c_n)$, und also $\varphi \circ h(t) = (c_1(at), \ldots, c_n(at))$. Damit erhalten wir

$$h'(t) = a\gamma_v'(at) = a \sum_{i=1}^{n} c_i'(at) \partial_i(h(t)),$$

so dass mit Gleichung (2.4.2)

$$\frac{\nabla}{dt}X = \sum_k \left(f_k' + \sum_{i,j} (x_i \circ c)' f_j \Gamma_{ij}^k \circ c \right) \cdot \partial_k \circ c$$

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}\bigg|_{t=t_0} h' &= a \sum_k \left(a c_k''(at_0) + \sum_{i,j} a c_i'(at_0) c_j'(at_0) \Gamma_{ij}^k \circ h \right) \partial_k \circ h \\ &= a^2 \left. \frac{\nabla}{dt}\right|_{t=at_0} \gamma_v' = 0 \end{aligned}$$

□

Wir können demnach die offene Teilmenge $V \subset TM$ durch die offene Teilmenge $W = \{v \in TM \mid 2v/\varepsilon \in V\}$ ersetzen, und erhalten, dass es eine Abbildung

$$\beta : (-2, 2) \times W \to M \tag{2.7.3}$$

mit der Eigenschaft gibt, das für alle $v \in W$ die Abbildung $(-2, 2) \to M$; $t \mapsto \beta(t, v)$ mit der eindeutigen Geodätischen γ_v übereinstimmt.

Wir definieren nun die *(geodätische) Exponentialabbildung* exp: In der Notation von zuvor ist $\exp : W \longrightarrow M$ durch

$$\exp(v) = \beta(1, v) = \gamma_v(1).$$

gegeben. Für einen fixierten Punkt $p \in M$ können wir exp auf die in T_pM offene Umgebung $W \cap T_pM$ von 0 einschränken und erhalten eine Abbildung $\exp_p : W \cap T_pM \to M$. Nach Definition sind sowohl $\exp : W \to M$ als auch $\exp_p : W \cap T_pM \to M$ differenzierbare Abbildungen.

Mit Hilfe dieser neu eingeführten Abbildung nimmt Lemma 2.7.6 folgende Gestalt an:

Satz 2.7.7. *Es gilt für alle $v \in T_pM$: $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$, wann immer beide Seiten definiert sind.*

Beweis. Es gilt $\exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$. □

Satz 2.7.8. *Für alle $p \in M$ ist $(d\exp_p)_0 : T_0T_pM \cong T_pM \to T_pM$ die Identität. Insbesondere existiert eine Umgebung von $0 \in T_pM$, auf der $\exp_p$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist.*

Beweis. Für $v \in T_0T_pM \cong T_pM$ rechnen wir wie folgt: $t \mapsto tv$ ist eine Kurve in T_pM in Richtung v, so dass

$$\begin{aligned} (d\exp_p)_0(v) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_{tv}(1) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_v(t) = \gamma_v'(0) = v. \end{aligned}$$

□

Dieser Satz besagt insbesondere, dass für alle $p \in M$ das Inverse der auf eine geeignete offene Umgebung von 0 eingeschränkten Exponentialabbildung $\exp_p$ eine Karte von M definiert. Genauer:

Beispiel 2.7.9. *1. Im Fall $M = \mathbb{R}^n$ mit dem Levi-Civita-Zusammenhang der Standardmetrik sind die Geodätischen durch einen Punkt p von der Form $\gamma_v(t) = p + tv$. Da alle Geodätische auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, folgt: $\exp_p(v) = \gamma_v(1) = p + v$.*

2. Betrachten wir $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, vesehen mit dem Levi-Civita-Zusammenhang bezüglich der Standardmetrik. Die Geodätischen sind proportional zur Bogenlänge parametrisierte Großkreise. Insbesondere sind sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, und es folgt, dass für alle $p \in S^n$ die Exponentialabbildung $\exp_p$ auf ganz T_pS^n definiert ist. Es gilt: ist q der zu p antipodale Punkt, so bildet $\exp_p$ den offenen Ball $B_\pi(0) \subset T_pM$ diffeomorph auf $S^n \setminus \{q\}$ ab, und der Rand von $B_\pi(0)$ kollabiert unter $\exp_p$ auf q. Die Exponentialabbildung ist also im Allgemeinen nicht injektiv, und auch kein lokaler Diffeomorphismus im gesamten Definitionsbereich.

2.8 Riemannsche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume

Eine stetige Abbildung $c : [a, b] \to M$ heißt *stückweise differenzierbar*, falls es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ gibt, so dass $c|_{[t_i,t_{i+1}]}$ für alle $i = 0, \ldots, k-1$ differenzierbar ist (siehe Beispiel 1.5.3 für die Definition von Differenzierbarkeit auf abgeschlossenen Intervallen).

Ist nun (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (nicht bloß pseudo-Riemannsch), so können wir die *Länge* einer stückweise differenzierbaren Kurve $c : [a, b] \to M$ durch

$$L(c) = \int_a^b ||\dot{c}(t)||dt$$

definieren. Die Länge einer stückweise differenzierbaren Kurve ist endlich.

Satz 2.8.1. *1. $L(c) \geq 0$, und $L(c) = 0$ genau dann, wenn c konstant ist.*

2. Sind $c_1 : [a, b] \to M$ und $c_2 : [b, c] \to M$ zwei stückweise differenzierbare Kurven mit $c_1(b) = c_2(b)$, so ist $L(c_1 \cup c_2) = L(c_1) + L(c_2)$, wobei $c_1 \cup c_2$ die Konkatenation von c_1 und c_2 bezeichnet.

3. Ist $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ eine differenzierbare Umparametrisierung, d.h. monoton und surjektiv, so gilt für jeden stückweise differenzierbaren Weg $c : [a, b] \to M$, dass $L(c \circ \varphi) = L(c)$.

Sind $p, q \in M$, so sei Ω_{pq} die Menge der stückweise differenzierbaren Kurven in M von p nach q. Wir definieren

$$d(p, q) = \inf\{L(c) \mid c \in \Omega_{pq}\}.$$

Satz 2.8.2. *1. (M, d) ist ein metrischer Raum.*

2. Die durch d induzierte Topologie auf M stimmt mit der ursprünglichen Topologie von M als Mannigfaltigkeit überein.

Beweis. Aufgrund von Satz 2.8.1 3. ist es klar, dass $d(p,q) = d(q,p)$. Teil 2. dieses Satzes zeigt, dass $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Wir wählen Kurven c_1 von p nach r und c_2 von r nach q mit $L(c_1) < d(p,r) + \frac{\varepsilon}{2}$ und $L(c_2) < d(r,q) + \frac{\varepsilon}{2}$. Dann folgt $d(p,q) \leq L(c_1 \cup c_2) < d(p,r) + d(r,q) + \varepsilon$.

Offensichtlich gilt $d(p,q) \geq 0$ nach Teil 1. von Satz 2.8.1, und trivialerweise ist $d(p,p) = 0$. Der einzige schwierige Teil des Beweises von Punkt 1. ist zu zeigen, dass $d(p,q) = 0$ bereits $p = q$ impliziert. Es sei dazu (U,φ) eine Karte um p mit $\varphi(p) = 0$. Es sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset \varphi(U)$; dann ist durch $K := \varphi^{-1}(\overline{B_\varepsilon(0)})$ ein Kompaktum $K \subset M$ definiert. Wir setzen

$$L := \{\sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_r \mid r \in K, \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1\} \subset TM.$$

Auch L ist kompakt (unter der zu der Karte (U,φ) assoziierten lokalen Trivialisierung $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ entspricht L der kompakten Menge $K \times S^{n-1}$). Daher nimmt die stetige Funktion

$$f : TM \longrightarrow \mathbb{R};\ v \mapsto g(v,v) = ||v||^2$$

auf L Maximum und Minimum an; da letzteres echt größer als 0 ist, existiert also $R > 0$, so dass

$$R^2 \geq g(v,v) \geq \frac{1}{R^2}$$

für alle $v \in L$. Ist nun $v = \sum_i b_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_r \in T_rM$ beliebig, wobei $r \in K$, dann ist

$$\tilde{v} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i b_i^2}} v \in L,$$

und deshalb

$$R^2 \geq \frac{g(v,v)}{\sum_i b_i^2} \geq \frac{1}{R^2}. \tag{2.8.1}$$

Nun sei $c : [a,b] \to M$ eine beliebige stückweise differenzierbare Kurve mit $c(a) = p$, die ganz in K verläuft. Wir setzen $\varphi \circ c = (c_1, \ldots, c_n)$; daher gilt $\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^n c_i'(t) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)}$, und wir können mit Hilfe von (2.8.1) abschätzen:

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt \geq \frac{1}{R} \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i'(t)^2 dt} = \frac{1}{R} L(\varphi \circ c),$$

wobei $L(\varphi \circ c)$ die Länge der Kurve $\varphi \circ c$ in der Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Im $\mathbb{R}^n$ minimieren Strecken den Abstand (was wir ohne Beweis benutzen; man überlege sich dies!), also folgt:

$$L(c) \geq \frac{1}{R} ||\varphi(c(b))||.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle: Falls $q \notin K$, dann gibt es für jede Kurve $c : [a,b] \to M$ von p nach q einen Zeitpunkt t, so dass $||\varphi(c(t))|| = \varepsilon$. Damit ist aber $L(c) \geq L(c|_{[a,t]}) \geq \frac{\varepsilon}{R}$, und also auch $d(p,q) \geq \frac{\varepsilon}{R}$. Widerspruch.

Es bleibt, den Fall $q \in K$ zu betrachten. Analog zum Fall $q \notin K$ gilt für jede Kurve $c \in \Omega_{pq}$ von p nach q, die nicht ganz in K verläuft, dass $L(c) \geq \frac{\varepsilon}{R}$. Für eine stückweise differenzierbare Kurve $c : [a, b] \to M$ von p nach q, die ganz in K verläuft, gilt aber $L(c) \geq \frac{||\varphi(c(b))||}{R} = \frac{||\varphi(q)||}{R}$. Insgesamt: $0 = d(p, q) \geq \frac{||\varphi(q)||}{R} > 0$, was ein Widerspruch ist.

Damit haben wir 1. gezeigt, und können uns der induzierten Topologie widmen. Zum einen müssen wir zeigen, dass in jeder Koordinatenumgebung U eines Punktes p ein Ball $B_r(p) = \{q \in M \mid d(p, q) < r\}$ enthalten ist. In der Notation von oben gilt aber, wenn wir $r = \frac{\varepsilon}{R}$ wählen, dass $B_r(p) \subset K = \varphi^{-1}(\overline{B_\varepsilon(0)}) \subset U$. (Wir hatten gezeigt, dass für $q \notin K$ gilt, dass $d(p, q) \geq \frac{\varepsilon}{R} = r$.)

Zum anderen muss in jedem Ball $B_r(p)$ eine Menge der Form $\varphi^{-1}(B_\delta(0))$ sein, wobei (U, φ) eine Karte wie oben ist. Wir wählen δ so klein, dass $\delta < \min\{\varepsilon, \frac{r}{R}\}$. Wir werden zeigen, dass es eine differenzierbare Kurve c von p nach q mit $L(c) < r$ gibt; dann folgt $q \in B_r(p)$. Es sei $c(t) = \varphi^{-1}(t\varphi(q))$ die gerade Verbindung zwischen 0 und $\varphi(q)$, mit φ^{-1} nach M übertragen. Dann rechnen wir mit der anderen Abschätzung in (2.8.1):

$$L(c) = \int_0^1 ||\dot{c}(t)||dt \leq R \int_0^1 ||\varphi(t)||dt < R\delta < r.$$

□

2.9 Geodätische minimieren die Länge

In diesem Abschnitt bezeichnet (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so dass der in Abschnitt 2.8 eingeführte Begiff der Länge einer stückweise differenzierbaren Kurve $c : [a, b] \to M$,

$$L(c) = \int_a^b ||\dot{c}(t)||dt,$$

Sinn ergibt.

Ziel ist es, zwei Sätze zu zeigen, die die minimierenden Eigenschaften von Geodätischen beschreiben. Zum einen:

Satz 2.9.1. *Ist $\gamma : [0, 1] \to M$ eine stückweise differenzierbare, proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve, so dass $L(\gamma) \leq L(c)$ für alle stückweise differenzierbaren Kurven c, die $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ miteinander verbinden. Dann ist γ eine Geodätische.*

Umgekehrt gilt nicht, dass jede Geodätische $\gamma : [0, 1] \to M$ die Länge unter allen Kurven zwischen $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ minimiert, wie das Beispiel der Sphäre zeigt: sobald eine in p startende Geodätische den antipodalen Punkt $-p$ passiert, hört sie auf, die Länge zu minimieren.

Wir werden aber zeigen, dass Geodätische *lokal* die Länge minimieren. Genauer:

Definition 2.9.2. *Es sei $p \in M$ und $V \subset T_pM$ eine offene Umgebung von $0 \in T_pM$, so dass $\exp_p$ auf V ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Wir nennen $\exp_p V$ eine* normale Umgebung *von p. Für $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(0) \subset V$, nennen wir $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ einen* geodätischen Ball *um p.*

Bemerkung 2.9.3. *Wir werden zeigen, dass der geodätische Ball* $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ *mit* $B_\varepsilon(p)$ *übereinstimmt, wobei wir hier* M *als metrischen Raum wie in Abschnitt 2.8 betrachten.*

Satz 2.9.4. *Es sei* $p \in M$, U *eine normale Umgebung von* p, *sowie* $B \subset U$ *ein geodätischer Ball um* p. *Es sei* $\gamma : [0,1] \to M$ *eine Geodätische mit* $\gamma(0) = p$, *die ganz in* B *verläuft. Dann gilt für jede stückweise differenzierbare Kurve* $c : [0,1] \to M$ *mit* $c(0) = \gamma(0)$ *und* $c(1) = \gamma(1)$, *dass* $L(\gamma) \leq L(c)$. *Insbesondere folgt:* $L(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$.

Weiterhin gilt: Falls $L(\gamma) = L(c)$, *dann gilt* $\gamma([0,1]) = c([0,1])$ *und* c *ist eine Umparametrisierung von* γ. *Insbesondere gibt es für jeden Punkt* $q \in B$ *bis auf Umparametrisierung genau eine minimierende Geodätische, die* p *mit* q *verbindet.*

Bemerkung 2.9.5. *In diesem Satz ist es nicht relevant, dass die Kurven auf* $[0,1]$ *parametrisiert sind, da die Länge einer Kurve invariant unter Umparametrisierung ist.*

Wir werden uns zunächst mit dem zweiten Satz beschäftigen. Für den Beweis benötigen wir folgendes technische Lemma, welches die Übertragung der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs für die induzierte kovariante Ableitung längs Kurven ist:

Lemma 2.9.6. *Es sei* $f : (a,b) \times (c,d) \to M$; $(t,s) \mapsto f(t,s)$ *eine differenzierbare Abbildung. Dann gilt:*

$$\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}.$$

Here, e.g. on the left hand side of the equation, we consider $\frac{\partial f}{\partial t}$, for fixed $t = t_0$, as a vector field along $s \mapsto f(t_0, s)$, in order to perform the covariant derivative with respect to s.

Der Beweis dieses Lemmas ist strukturell ähnlich wie der von Satz 2.6.4, nur einfacher: man wähle lokale Koordinaten, schreibe die auftretenden Vektorfelder in den entsprechenden Basisfeldern, und führe damit die Aussage auf die Torsionsfreiheit von ∇ zurück.

Weiterhin benötigen wir das sogenannte *Gauß-Lemma*. Es besagt, dass eine Geodätische $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ den Rand des Balles $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ senkrecht schneidet. Genauer: Es gilt (falls γ nach Bogenlänge parametrisiert ist), dass γ den Rand $\exp_p(\partial B_\varepsilon(0))$ zum Zeitpunkt ε schneidet; hier gilt also $\gamma'(\varepsilon) = (d\exp_p)_{\varepsilon v}(v) \perp (d\exp_p)_{\varepsilon v}(v^\perp)$.

Lemma 2.9.7. *Es sei* $p \in M$ *und* $v \in T_pM$ *so, dass* $\exp_p v$ *definiert ist. Es sei* $w \in T_v(T_pM) \cong T_pM$. *Dann gilt:*

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Beweis. Es sei $\gamma(t) = \exp_p(tv)$. Dann gilt $\gamma'(1) = (d\exp_p)_v(v)$. Betrachten wir zunächst den Fall, dass w proportional zu v ist, d.h. $w = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w)\rangle = \lambda\langle\gamma'(1), \gamma'(1)\rangle = \lambda\langle\gamma'(0), \gamma'(0)\rangle = \lambda\langle v, v\rangle = \langle v, w\rangle,$$

da Geodätische proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Aufgrund der Linearität der Aussage in w genügt es deshalb, sie für $w \perp v$ zu zeigen. (Diese

Fall entspricht der motivierenden Aussage oben, dass Geodätische den Rand des geodätischen Balles senkrecht schneiden.)

Da $\exp_p v$ definiert ist, gibt es $\delta, \varepsilon > 0$ so, dass $\exp_p u$ für alle $u = tv(s)$, wobei $t \in (-\delta, 1+\delta)$ und $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, definiert ist, wobei $v(s)$ eine Kurve in T_pM ist, die $v(0) = v$ und $v'(0) = w$ erfüllt, und für die $|v(s)|$ konstant ist (solch eine Kurve können wir wählen, weil w senkrecht zu v steht). Wir betrachten die Abbildung

$$f : (-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M; \quad (t, s) \mapsto \exp_p(tv(s)).$$

Für jedes feste s ist also die Abbildung $t \mapsto f(t, s) = \exp_p(tv(s))$ eine Geodätische. Es gilt:

$$\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle (1, 0) = \langle (d \exp_p)_v(w), (d \exp_p)_v(v) \rangle,$$

also müssen wir zeigen, dass

$$\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle (1, 0) = \langle v, w \rangle = 0.$$

Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \langle \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \underbrace{\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}}_{=0} \rangle,$$

wobei der zweite Summand gleich Null ist, da die Kurven $t \mapsto f(t, s) = \exp_p(tv(s))$ Geodätische sind. Nach Lemma 2.9.6 gilt nun also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle &= \langle \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \langle \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \langle v(s), v(s) \rangle = 0 \end{aligned}$$

weil jede Kurve $t \mapsto f(t, s)$ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Es folgt, dass $\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle$ unabhängig von t ist. Wir berechnen also mit Hilfe von Satz 2.7.8:

$$\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle (0, 0) = \langle (d \exp_p)_0(w), (d \exp_p)_0(v) \rangle = \langle v, w \rangle = 0.$$

$\square$

Beweis von Satz 2.9.4. Es sei $w = \gamma'(0)$. Da wir wissen, dass Geodätische proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind, gilt

$$L(\gamma) = \int_0^1 ||\gamma'(t)|| dt = \int_0^1 ||w|| dt = ||w||.$$

Wir nehmen zunächst an, dass $c([0, 1]) \subset B$. Weiterhin können wir annehmen, dass c nur zum Zeitpunkt $t = 0$ auf den Punkt p abbildet; andernfalls können wir, falls $c(t_0) = p$, das Intervall $[0, t_0]$ vernachlässigen, und nur die eingeschränkte Kurve $c|_{[t_0, 1]}$ betrachten. Die Länge wird hierdurch höchstens kleiner.) Da $\exp_p$ ein Diffeomorphismus zwischen einer offenen Menge $V \subset T_pM$

und der normalen Umgebung U von p ist, können wir c für $t \neq 0$ also eindeutig als

$$c(t) = \exp_p(r(t) \cdot v(t))$$

schreiben, wobei $v : (0,1] \to T_pM$ und $r : (0,1] \to \mathbb{R}$ stückweise differenzierbare Kurven sind, und $||v(t)|| = 1$. (Wir setzen $r(t) = ||\exp_p^{-1}(c(t))||$ und $v(t) = \frac{\exp_p^{-1}(c(t))}{r(t)}$.) Es folgt, dass (außer in den endlich vielen Stellen, in denen r und v eventuell nicht differenzierbar sind)

$$\frac{d}{dt} r(t) \cdot v(t) = r'(t)v(t) + r(t)v'(t), \tag{2.9.1}$$

und, da $\langle v(t), v(t)\rangle = 1$, gilt

$$0 = \frac{d}{dt}\langle v(t), v(t)\rangle = 2\langle v'(t), v(t)\rangle,$$

d.h. in Gleichung (2.9.1) ist der erste Summand parallel zu $v(t)$ und der zweite senkrecht zu $v(t)$. Nun folgt mit dem Gauß-Lemma:

$$\begin{aligned} ||c'||^2 &= \langle (d\exp_p)_{rv}(r'v + rv'), (d\exp_p)_{rv}(r'v + rv')\rangle \\ &= \frac{r'}{r}\langle (d\exp_p)_{rv}(rv), ((d\exp_p)_{rv}(r'v)\rangle + ||(d\exp_p)_{rv}(rv')||^2 \\ &\quad + 2\frac{r'}{r}\langle (d\exp_p)_{rv}(rv), (d\exp_p)_{rv}(rv')\rangle \\ &= \frac{r'}{r}\langle rv, r'v\rangle + ||(d\exp_p)_{rv}(rv')||^2 + 2\frac{r'}{r}\langle rv, rv'\rangle \\ &= r'^2 + ||(d\exp_p)_{rv}(rv')||^2 \geq r'^2, \end{aligned} \tag{2.9.2}$$

d.h.

$$||c'(t)|| \geq |r'(t)|$$

für alle $t > 0$ (in $t = 0$ ist r' nicht definiert). Dies impliziert:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_0^1 ||c'(t)||dt \geq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 |r'(t)|dt \geq \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 r'(t)dt\right| \\ &= \left|r(1) - \lim_{\varepsilon\to 0} r(\varepsilon)\right| = ||\exp_p^{-1}(c(1))|| = ||\exp_p^{-1}(\gamma(1))|| = ||w|| = L(\gamma), \end{aligned} \tag{2.9.3}$$

wobei $w = \gamma'(0)$, da dann $\gamma(t) = \exp_p(tw)$.

Wenn $c([0,1])$ nicht ganz in B enthalten ist, so betrachten wir den ersten Zeitpunkt $t_0 \in (0,1)$, für den $c(t_0)$ im Rand von B enthalten ist. Dann folgt aus der Argumentation von oben, dass

$$L(c) \geq L(c|_{[0,t_0]}) \geq \delta \geq L(\gamma),$$

wobei δ der Radius des geodätischen Balles B ist (d.h. $B = \exp_p(B_\delta(0))$).

Es bleibt zu untersuchen, wann in dieser Ungleichungskette Gleichheit gilt. Wir sehen aus (2.9.2), dass für die Gleichheit notwendig ist, dass $v' = 0$ ist (wir befinden uns in einem Bereich, in dem $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus ist). Wenn also v konstant ist, so ist Gleichheit äquivalent dazu, dass r monoton ist (siehe die zweite Ungleichung in (2.9.3)). Insgesamt gilt genau dann Gleichheit, wenn $c(t) = \exp_p(r(t)v)$ für einen Vektor $v \in T_pM$ und eine monotone Funktion r. Da aber $c(1) = \gamma(1) = \exp_p(w)$ und $\exp_p$ im gewählten Bereich injektiv ist, folgt, dass $v = w$ sein muss; damit ist c eine Umparametrisierung von γ. □

Korollar 2.9.8. *In der Situation des Satzes sei $\gamma(t) = \exp_p(tw)$ (wir setzen immer noch voraus, dass γ innerhalb des geodätischen Balles B verläuft). Dann gilt: $d(p, \gamma(t)) = ||tw|| = L(\gamma|_{[0,t]})$. Insbesondere gilt für den geodätischen Ball $B = \exp_p(B_\varepsilon(0))$, dass $B = B_\varepsilon(p)$, wobei wir M hier als metrischen Raum im Sinne von Abschnitt 2.8 betrachten.*

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 2.9.1 zu. Auch hierfür benötigen wir mehrere Lemmata.

Lemma 2.9.9. *Betrachte die Abbildung $F : TM \to M \times M$; $v \mapsto (\pi(v), \exp(v))$. Dann gilt für alle $p \in M$: $dF_{0_p} : T_{0_p}TM \to T_{(p,p)}(M \times M) \cong T_pM \oplus T_pM$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Wenn n die Dimension von M ist, dann wissen wir, dass TM eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Betrachte nun für festes $p \in M$ zunächst Kurven der Form $c(t) = tv \in T_pM \subset TM$, wobei $v \in T_pM$ ein beliebiger Tangentialvektor ist. Dann gilt:

$$dF_{0_p}(c'(0)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (F \circ c)(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (p, \exp(tv)) = (0, v).$$

Andererseits gilt für die Kurve $c(t) = 0_{\exp(tv)} \in T_{\exp(tv)}M \subset TM$, dass

$$dF_{0_p}(c'(0)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (F \circ c)(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\exp(tv), \exp(tv)) = (v, v).$$

Insgesamt folgt, dass dF_{0_p} surjektiv, und damit ein Isomorphismus ist. □

Lemma 2.9.10. *Für alle $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U von p und ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $q \in U$ folgendes gilt:*

1. *Die Abbildung $\exp_q$, eingeschränkt auf $B_\varepsilon(0) \subset T_qM$, ist ein Diffeomorphismus aufs Bild*
2. *$U \subset \exp_q(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(q)$.*

Dies bedeutet: U ist eine normale Umgebung eines jeden Punktes in W.

Beweis. Wir erinnern daran, dass wir die Existenz einer differenzierbaren Abbildung $\beta : (-2, 2) \times W \to M$ gezeigt haben, wobei $W \subset TM$ eine offene Umgebung von $0 \in T_pM$ ist, die die Eigenschaft hat, dass für alle $v \in W$ die Kurve $t \mapsto \beta(t, v)$ mit der eindeutigen Geodätische γ_v in M übereinstimmt. Da wir hier nun eine Riemannsche Metrik zur Verfügung haben, können wir durch Einschränkung annehmen, dass W von der Form

$$W = \{v \in T_qM \mid q \in V, ||v|| < \delta\}$$

für eine Kartenumgebung (V, φ) von q, $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, und ein $\delta > 0$ ist. Wir setzen

$$F : W \longrightarrow M \times M;\ v \mapsto (\pi(v), \exp(v)) = (\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v)).$$

Wir haben in Lemma 2.9.9 gezeigt, dass $dF_{0_p} : T_{0_p}TM \to T_{F(0_p)}(M \times M)$ invertierbar ist. Damit gibt es eine offene Umgebung $W' \subset W$ von 0_p, die mittels F diffeomorph auf eine Umgebung $A \subset M \times M$ von (p, p) abgebildet wird. Wir können annehmen, dass W' von der Form

$$W' = \{v \in T_qM \mid q \in V', ||v|| < \varepsilon\}$$

für eine Umgebung $V' \subset V$ von p und ein $\varepsilon > 0$ ist. Nun wälen wir eine Umgebung U von p, so dass $U \times U \subset A$. (Man beachte, dass dann $U \subset V'$ folgt.) Wir behaupten, dass die Behauptung für diese Wahl von U und ε gilt.

Es sei dazu $q \in U$. Für den ε-Ball um 0 in T_qM, $B_\varepsilon(0)$, gilt:

$$B_\varepsilon(0) = W' \cap T_qM.$$

Da F auf W' ein Diffeomorphismus aufs Bild ist, folgt also aus der Definition von F, dass $\exp_q$ auf $B_\varepsilon(0) \subset T_qM$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Weiterhin gilt $F(B_\varepsilon(0)) \supset \{q\} \times U$, also $\exp_q(B_\varepsilon(0)) \supset U$. □

Bemerkung 2.9.11. *Aus diesem Lemma, zusammen mit Satz 2.9.4, folgt, dass für je zwei Punkte $q_1, q_2 \in U$ bis auf Umparametrisierung eine eindeutige minimierende Geodätische γ (mit Länge $< \varepsilon$) existiert, die q_1 und q_2 miteinander verbindet.*

Beweis von Satz 2.9.1. Es sei $\gamma : [0, 1] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, stückweise differenzierbare Kurve, die die Länge aller Kurven zwischen $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ minimiert. Es sei $t \in [0, 1]$ fixiert. Wir werden zeigen, dass γ in einer Umgebung von t mit einer Geodätischen übereinstimmt, und also selbst eine Geodätische ist.

Es seien $\varepsilon > 0$, sowie U eine Umgebung von $\gamma(t)$ wie in Lemma 2.9.10. Dann existiert ein abgeschlossenes Intervall $t \in I = [a, b] \subset [0, 1]$ mit nichtleerem Inneren, so dass $\gamma(I) \subset U$. Damit ist die Einschränkung $\gamma : I \to U$ eine stückweise differenzierbare Kurve, die $\gamma(a)$ mit dem Punkt $\gamma(b)$ verbindet, welche beide in einem geodätischen Ball liegen. γ_I muss eine minimierende Verbindung sein, da ansonsten die Länge der Kurve, die wir aus γ erhalten, indem wir sie auf I durch eine minimierende Kurve ersetzen, kleiner wäre als die von γ. Damit folgt aus Satz 2.9.4, dass γ_I bis auf Umparametrisierung mit einer Geodätischen zwischen q_1 und q_2 übereinstimmt. Da γ aber nach Voraussetzung nach Bogenlänge parametisiert ist, folgt, dass γ_I selbst eine Geodätische (und insbesondere differenzierbar) ist. □

2.10 Der Satz von Hopf-Rinow

Hier werden wir zum ersten Mal in dieser Vorlesung einen Satz beweisen, der die globale Geometrie einer Riemannschen Mannigfaltigkeit betrifft.

Definition 2.10.1. *Wir sagen, dass eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit* (M, g) (geodätisch) vollständig *ist, wenn für alle $p \in M$ die Exponentialabbildung* $\exp_p$ *(bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs) auf ganz T_pM definiert ist, d.h., wenn jede Geodätische von M auf ganz $\mathbb{R}$ erweitert werden kann.*

Im folgenden Satz werden wir verschiedene äquivalente Charakterisierungen der geodätischen Vollständigkeit geben, allerdings lediglich im Riemannschen Fall: wir benutzen, dass die Riemannsche Metrik g auf M die Struktur eines metrischen Raumes induziert.

Theorem 2.10.2. *Es sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. $\exp_p$ *ist auf ganz T_pM definiert.*
2. *Abgeschlossene und beschränkte Teilmengen von M sind kompakt.*
3. *M ist als metrischer Raum vollständig.*
4. *M ist geodätisch vollständig.*

Außerdem implizieren die obigen Bedingungen

5. *Zu jedem $q \in M$ gibt es eine Geodätische γ, die p und q verbindet, so dass $L(\gamma) = d(p, q)$.*

Bemerkung 2.10.3. *Offensichtlich impliziert* 5. *nicht die anderen vier Bedingungen, wie das Beispiel einer konvexen offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ zeigt.*

Beweis. Wir zeigen zunächst 1. $\Longrightarrow$ 5.: Es sei $d(p, q) = r$. Es sei $B_\delta(p)$ ein geodätischer Ball um p. Wir bezeichnen mit $S_\delta(p)$ den Rand von $B_\delta(p)$. Die stetige Funktion $x \mapsto d(q, x)$ nimmt auf der kompakten Menge $S_\delta(p)$ das Minimum in einem Punkt x_0 an. Dann ist $x_0 = \exp_p(\delta v)$ für ein $v \in T_pM$ mit $|v| = 1$. Es sei $\gamma(t) = \exp_p(tv)$. Wir werden zeigen, dass $\gamma(r) = q$.

Dazu betrachten wir die Menge

$$A = \{s \in [0, r] \mid d(\gamma(s), q) = r - s\}.$$

A ist abgeschlossen in $[0, r]$, und nichtleer, da $0 \in A$. Es sei $s_0 \in A$, $s_0 < r$. Wir werden zeigen, dass $s_0 + \delta' \in A$ für ein genügend kleines $\delta' > 0$. (Das impliziert, dass $\sup A = r$, und da A abgeschlossen ist, folgt $r \in A$, d.h. $\gamma(r) = q$.) Es sei $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ ein geodätischer Ball um $\gamma(s_0)$. Wir betrachten die stetige Abbildung $S_{\delta'}(\gamma(s_0)) \to \mathbb{R}$; $x \mapsto d(q, x)$. Es sei $x_0' \in S_{\delta'}(\gamma(s_0))$ ein Minimum dieser Abbildung. Wenn wir zeigen können, dass $x_0' = \gamma(s_0 + \delta')$, dann gilt

$$d(\gamma(s_0), q) = r - s_0,$$

da $s_0 \in A$, und außerdem

$$d(\gamma(s_0), q) = \delta' + \min_{x \in S_{\delta'}(\gamma(s_0))} d(x, q) = \delta' + d(x_0', q).$$

Daraus folgt

$$r - s_0 = \delta' + d(x_0', q) = \delta' + d(\gamma(s_0 + \delta'), q), \tag{2.10.1}$$

also

$$d(\gamma(s_0 + \delta'), q) = r - (s_0 + \delta'),$$

d.h. $s_0 + \delta' \in A$. Um 1. $\Longrightarrow$ 5. zu zeigen, müssen wir also nur noch zeigen, dass $x_0' = \gamma(s_0 + \delta')$. Mit der ersten Gleichung aus (2.10.1) und der Dreiecksungleichung folgt

$$d(p, x_0') \geq d(p, q) - d(q, x_0') = r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'.$$

Auf der anderen Seite hat die stückweise differenzierbare Kurve von p nach x_0', die zunächst γ von p nach $\gamma(s_0)$ folgt, und dann über die eindeutige minimierende Geodätische von $\gamma(s_0)$ nach x_0' verläuft, Länge gleich $s_0 + \delta'$. Nach Satz 2.9.1 ist diese Kurve eine Geodätische (insbesondere differenzierbar). Insbesondere: $\gamma(s_0 + \delta') = x_0'$. Dies beendet den Beweis von 1. $\Longrightarrow$ 5.

1. $\Longrightarrow$ 2. : Es sei $A \subset M$ eine abgeschlossene, beschränkte Menge. Da A beschränkt ist, ist A in einem großen Ball $B_R(p)$ enthalten. Nach 6. gibt es zu jedem Punkt q in $\overline{B_R(p)}$ eine Geodätische von p nach q von Länge $\leq R$, so dass $B_R(p) \subset \exp_p(\overline{B_R(0)})$. (Beachte, dass $\exp_p$ nach Voraussetzung auf ganz T_pM definiert ist.) Als stetiges Bild einer kompakten Menge ist $\exp_p(\overline{B_R(0)})$ kompakt. Also ist A eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge und damit kompakt.

2. $\Longrightarrow$ 3. : Wir müssen zeigen, dass M als metrischer Raum vollständig ist. Sei dazu (p_n) eine Cauchyfolge in M. Offenbar ist $\{p_1, p_2, \ldots\}$ eine beschränkte Teilmenge von M. Nach 2. ist der Abschluss dieser Menge kompakt. Also enthält (p_n) eine konvergente Teilfolge. Da (p_n) eine Cauchyfolge ist, folgt, dass (p_n) konvergiert.

3. $\Longrightarrow$ 4.: Wir nehmen an, dass M nicht geodätisch vollständig ist, d.h., dass eine Geodätische γ existiert, die auf einem Intervall (a, b) definiert ist, aber nicht im Punkt b. Wir können annehmen, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, so dass $L(\gamma|_{[c,d]}) = d - c$ für alle $[c, d] \subset [a, b]$. Es sei nun t_n eine Folge in (a, b), die gegen b konvergiert. Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $n, m > n_0$ gilt, dass $|t_n - t_m| < \varepsilon$, also auch

$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq |t_n - t_m| < \varepsilon.$$

Also ist die Folge $(\gamma(t_n))$ eine Cauchyfolge in M. Da M vollständig als metrischer Raum ist, folgt, dass $\gamma(t_n) \to p_0 \in M$ für einen Punkt $p_0 \in M$.

Es sei nun U eine Umgebung von p_0 wie in Lemma 2.9.10, d.h., U ist eine normale Umgebung eines jeden Punktes in U; genauer: es gibt ein $\delta > 0$, so dass $\exp_q$ für alle $q \in U$ auf $B_\delta(0)$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist, und so dass $U \subset \exp_q(B_\delta(0))$. Es sei n_1 so groß, dass für $n, m > n_1$ gilt, dass $|t_n - t_m| < \delta$ und $\gamma(t_n), \gamma(t_m) \in U$. Dann gibt es nach Bemerkung 2.9.11 eine eindeutige Geodätische $\tilde{\gamma}$ mit Länge kleiner als δ, die $\gamma(t_n)$ und $\gamma(t_m)$ miteinander verbindet. Diese Geodätische $\tilde{\gamma}$ muss also im gemeinsamen Definitionsbereich mit γ übereinstimmen. Da $\exp_{\gamma(t_n)}$ ein Diffeomorphismus auf $B_\delta(0)$ ist, und $U \subset \exp_{\gamma(t_n)}(B_\delta(0))$, setzt $\tilde{\gamma}$ die Geodätische γ über s_0 fort.

4. $\Longrightarrow$ 1. ist offensichtlich. $\square$

Da geodätische Vollständigkeit und Vollständigkeit als metrischer Raum für Riemannsche Mannigfaltigkeiten also äquivalent sind, ist es nicht notwendig, zwischen diesen Eigenschaften zu unterscheiden; wir werden beide einfach mit Vollständigkeit bezeichnen.

Offensichtliche Folgerungen aus dem Satz sind:

Korollar 2.10.4. *In einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es zwischen je zwei Punkten p und q eine Geodätische der Länge $d(p, q)$.*

Bemerkung 2.10.5. *Natürlich kann es passieren, dass es mehrere Geodätische zwischen p und q mit Länge $d(p, q)$ gibt, wie das Beispiel antipodaler Punkte auf der Sphäre zeigt.*

Korollar 2.10.6. *Kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind vollständig.*

Wir bemerken, dass auf nichtkompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten die Vollständigkeit durchaus von der gewählten Riemannschen Metrik abhängt.

2.11 Isometrien und Killingfelder

Wir wissen, dass je zwei Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension n lokal diffeomorph zueinander sind: Für $p \in M$ und $q \in N$ gibt es offene Mengen U um p und V um q, so dass U und V diffeomorph sind. (Wir können U und V so wählen, dass sie jeweils diffeomorph zu einem offenen Ball im $\mathbb{R}^n$ sind.) Sind nun auf M und N pseudo-Riemannsche Metriken gegeben, so ist der natürliche Isomorphiebegriff der der Isometrie (der schon in den Übungen auftauchte):

Definition 2.11.1. *Ein Diffeomorphismus $\varphi : M \to N$ zwischen pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) und (N, h) heißt* Isometrie*, falls*

$$h_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v), d\varphi_p(w)) = g_p(v, w) \tag{2.11.1}$$

für alle $p \in M$ und $v, w \in T_pM$, d.h., falls $\varphi^*h = g$. Existiert eine Isometrie zwischen M und N, so heißen M und N isometrisch.

Bislang haben wir keine Methode, zu beweisen, dass zwei gegebene pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten nicht isometrisch zueinander sind. Beispielsweise ist nicht klar, ob eine offene Teilmenge von S^n, versehen mit der Metrik von $\mathbb{R}^{n+1}$, zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ isometrisch sein kann. Um solche Fragen entscheiden zu können, brauchen wir eine zu der Metrik assoziierte Invariante, die nicht von der Isometrieklasse einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit abhängt. Zu diesem Zweck werden wir im nächsten Abschnitt den Krümmungstensor, und später weitere abgeleitete Krümmungsgrößen definieren.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns vorher noch kurz mit einigen elementaren Eigenschaften von Isometrien pseudo-Riemannscher Mannigfaltigkeiten. In den Übungen wurde beobachtet:

Lemma 2.11.2. *Ist $\varphi : M \to N$ eine Isometrie pseudo-Riemannscher Mannigfaltigkeiten (M, g) und (N, h), so gilt für alle Vektorfelder X und Y auf M, dass*

$$\varphi_* \nabla^M_X Y = \nabla^N_{\varphi_* X} \varphi_* Y.$$

Hierbei ist für ein Vektorfeld X auf M das Vektorfeld $\varphi_* X$ durch $\varphi_* X = d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$ definiert.

Beispiel 2.11.3. *Die pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten, denen wir bislang in der Vorlesung begegnet sind, sind hochgradig symmetrisch in dem Sinne, dass sie viele Selbst-Isometrien zulassen. Betrachten wir beispielsweise die Sphäre S^n mit der Standardmetrik, so definiert jedes Element $A \in \mathrm{O}(n+1)$ eine Isometrie von S^n, denn: $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ lässt nach Definition der orthogonalen Gruppe das Standardskalarprodukt invariant, und damit auch S^n, zusammen mit der induzierten Metrik. Insbesondere ist die Sphäre* homogen*:*

Definition 2.11.4. *Eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt* homogen*, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in M$ eine Isometrie $\varphi : S^n \to S^n$, so dass $\varphi(p) = q$.*

Die Existenz von Ein-Parameter-Familien von Isometrien liefert die Existenz spezieller Vektorfelder, sogenannter Killingfelder:

Definition 2.11.5. *Ein Vektorfeld X auf einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit heißt* Killingfeld*, wenn die lokalen Flüsse von X Isometrien sind.*

Wir beschreiben nun mehrere äquivalente Charakterisierungen des Begriffs des Killingfeldes. Dafür benötigen wir den Begriff der Lieableitung:

Definition 2.11.6. *Es sei X ein Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, und A ein Tensorfeld auf M vom Typ (r, s). Dann ist die* Lieableitung von A entlang X *das folgendermaßen definierte Tensorfeld vom Typ (r, s) auf M: ist Φ_t der lokale Fluss von X auf einer offenen Menge U, dann ist für $p \in U$*

$$(L_X A)_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\Phi_t^* A)_p.$$

Auf der rechten Seite leitet man eine Kurve im Tensorbündel ab, die vollständig in der Faser über p verläuft. Damit definiert die rechte Seite wiederum ein Tensorfeld.

Man beachte, dass man bei der Definition des Pullbacks auf der rechten Seite vorsichtig sein muss: für Tensorfelder vom Typ $(r, 0)$ ist es wie üblich durch

$$(\Phi_t^* A)_p(v_1, \ldots, v_r) = A_{\Phi_t(p)}(d\Phi_t(v_1), \ldots, d\Phi_t(v_r))$$

definiert (man beachte, dass Pullback von kovarianten Tensorfeldern entlang beliebiger glatter Abbildungen wohldefiniert ist), aber für Tensorfelder vom Typ (r, s) mit $s > 0$ definiert man

$$(\Phi_t^* A)_p(v_1, \ldots, v_r) = (d\Phi_{-t})_{\Phi_t(p)}(A_{\Phi_t(p)}(d\Phi_t(v_1), \ldots, d\Phi_t(v_r)),$$

wobei im Fall $s > 1$ die rechte Seite so zu lesen ist, dass für eine lineare Abbildung $L : V \to W$ zwischen Vektorräumen die induzierte lineare Abbildung $V^{\otimes s} \to W^{\otimes s}$, die auf reinen Tensoren durch $v_1 \otimes \ldots \otimes v_s \mapsto A(v_1) \otimes \ldots \otimes A(v_s)$ definiert ist, wiederum mit L bezeichnet wird.

(Der einfachste kontravariante Fall ist der eines Tensorfeldes vom Typ $(0, 1)$, d.h. eines Vektorfeldes; der Pullback eines Vektorfeldes X entlang eines Diffeomorphismus f ist durch $(f^*X)_p = (df)^{-1}_{f(p)}(X_{f(p)})$ definiert.)

Proposition 2.11.7. *Für ein Vektorfeld X auf einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *X ist ein Killingfeld*
2. *$L_X g = 0$, wobei L_X die Lieableitung bzgl. X bezeichnet.*
3. *$\langle \nabla_v X, w\rangle + \langle \nabla_w X, v\rangle = 0$ für alle $v, w \in T_pM$, $p \in M$, wobei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang von g ist, d.h. $v \mapsto \nabla_v X$ ist ein schiefsymmetrischer Endomorphismus von (T_pM, g_p).*

Beweis. Es sei $\Phi_t : U \to M$ der lokale Fluss von X auf $U \subset M$, d.h. $\frac{d}{dt}\Phi_t(q) = X(\Phi_t(q))$ für alle $q \in U$.

Nach Definition der Lieableitung gilt:

$$(L_X\langle\cdot,\cdot\rangle)(v,w) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle (d\Phi_t)_p(v), (d\Phi_t)_p(w)\rangle.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \langle (d\Phi_t)(v), (d\Phi_t)(w)\rangle &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \langle (d\Phi_{t-t_0})(d\Phi_{t_0})(v), (d\Phi_{t-t_0})(d\Phi_{t_0})(w)\rangle \\
&= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \langle (d\Phi_s)(d\Phi_{t_0})(v), (d\Phi_s)(d\Phi_{t_0})(w)\rangle \\
&= (L_X\langle\cdot,\cdot\rangle)((d\Phi_{t_0})(v), (d\Phi_{t_0})(w)).
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass genau dann $L_X\langle\cdot,\cdot\rangle = 0$, wenn für alle v, w die Abbildung $t \mapsto \langle (d\Phi_t)(v), (d\Phi_t)(w)\rangle$ konstant ist. Da Φ_0 die Identität ist, ist das äquivalent zu der Bedingung, dass die lokalen Flüsse aus Isometrien bestehen. Mit anderen Worten: wir haben die Äquivalenz von 1. und 2. gezeigt.

Um die Äquivalenz zu 3. zu sehen, rechnen wir wie folgt, wobei wir benutzen, dass die Lieableitung die Leibnizregel erfüllt, sowie dass $L_X f = Xf$ für jede Funktion f und $L_X Y = [X,Y]$ für jedes Vektorfeld Y; alles Aussagen, die in den Übungen bewiesen werden. Es seien V and W beliebige Erweiterungen von $v, w \in T_pM$ zu lokalen Vektorfeldern. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(L_X\langle\cdot,\cdot\rangle)(V,W) &= L_X(\langle V,W\rangle) - \langle L_X V, W\rangle - \langle V, L_X W\rangle \\
&= X\langle V,W\rangle - \langle [X,V], W\rangle - \langle V, [X,W]\rangle \\
&= \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle - \langle [X,V], W\rangle - \langle V, [X,W]\rangle \\
&= \langle \nabla_V X, W\rangle + \langle V, \nabla_W X\rangle.
\end{aligned}$$

□

2.12 Krümmung

Definition 2.12.1. *Der* Riemannsche Krümmungstensor *einer kovarianten Ableitung ∇ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist*

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM);\ (X,Y,Z) \mapsto R(X,Y)Z,$$

definiert durch

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Ist ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang einer pseudo-Riemannschen Metrik g auf M, so sprechen wir auch einfach vom Riemannschen Krümmungstensor von g.

Bemerkung 2.12.2. *Manche Bücher bezeichnen das Negative von R als Riemannschen Krümmungstensor, z.B. [1].*

Offensichtlich ist R in jedem Eintrag $\mathbb{R}$-linear. Um zu zeigen, dass R wirklich ein $(3,1)$-Tensorfeld auf M definiert, ist zu zeigen, dass R in jedem Eintrag $C^\infty(M)$-linear ist. Wir führen diese Rechnung für einen Fall durch:

$$\begin{aligned}
R(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{fX}Z - \nabla_{[fX,Y]}Z \\
&= f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - \nabla_{f[X,Y]-(Yf)X}Z \\
&= f(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) - (Yf)\nabla_X Z + (Yf)\nabla_X Z \\
&= fR(X,Y)Z.
\end{aligned}$$

Beispiel 2.12.3. *Berechnen wir den Krümmungstensor von $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Standardmetrik. Um R zu bestimmen, genügt es, $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$ zu berechnen, wobei ∂_r die zur kanonischen Karte assoziierten Basisfelder sind. Wir wissen, dass $\nabla_{\partial_i}\partial_j = 0$, und dass $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Damit ist $R(\partial_i, \partial_j)\partial_j = 0$, und also R konstant 0.*

Bemerkung 2.12.4. *Dieses Beispiel zeigt eine mögliche Sicht auf den Riemannschen Krümmungstensor: in Koordinaten einer beliebige pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gilt*

$$R(\partial_i, \partial_j)Z = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}Z - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}Z,$$

d.h., R misst, inwieweit die obigen kovarianten Ableitungen miteinander kommutieren.

Lemma 2.12.5. *Es seien (M, g) und (N, h) pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten, versehen mit den entsprechenden Levi-Civita-Zusammenhängen und assoziierten Krümmungstensoren R^M und R^N. Ist φ eine Isometrie zwischen M und N, so gilt für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$:*

$$\varphi_*(R(X, Y)Z) = R(\varphi_*X, \varphi_*Y)\varphi_*Z.$$

Beweis. Mit Lemma 2.11.2 gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi_*R^M(X, Y)Z &= \varphi_*(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= \nabla_{\varphi_*X}\varphi_*\nabla_Y Z - \nabla_{\varphi_*Y}\varphi_*\nabla_X Z - \nabla_{\varphi_*[X,Y]}\varphi_*Z \\
&= \nabla_{\varphi_*X}\nabla_{\varphi_*Y}\varphi_*Z - \nabla_{\varphi_*Y}\nabla_{\varphi_*X}\varphi_*Z - \nabla_{[\varphi_*X,\varphi_*Y]}\varphi_*Z \\
&= R^N(\varphi_*X, \varphi_*Y)\varphi_*Z.
\end{aligned}$$

□

Aus Beispiel 2.12.3 und Lemma 2.12.5 folgt, dass der Krümmungstensor einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, die isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ ist, verschwindet; wenn wir zeigen können, dass eine gegebene pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtverschwindenden Krümmungstensor besitzt, so kann sie nicht zu $\mathbb{R}^n$ isometrisch sein.

Bemerkung 2.12.6. *Dies ist sogar eine Äquivalenz - eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist genau dann lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^n$, wenn der Krümmungstensor verschwindet. Der Beweis wird eine Übungsaufgabe auf dem 11. Übungsblatt sein.*

Bevor wir uns den geometischen Eigenschaften von (M, g) zuwenden, die im Krümmungstensor kodiert sind, sammeln wir in dem folgenden Satz einige formale Eigenschaften von R.

Satz 2.12.7. *Es sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit assoziiertem Krümmungstensor R. Dann gilt für alle Vektorfelder X, Y, Z, W auf M:*

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$
2. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
   (die erste*, oder* algebraische Bianchi-Identität*)*

3. $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = -\langle R(X,Y)W,Z\rangle$

4. $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$

Beweis. 1. folgt sofort aus der Definition. Für 2. rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&\quad + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}Y \\
&\quad + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.
\end{aligned}$$

Wir haben hier die Torsionsfreiheit von ∇ sowie die Jacobi-Identität benutzt.

Für 3. genügt es zu zeigen, dass $\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = 0$ (Polarisierung: ersetze Z durch $Z+W$ und multipliziere aus). Dies zeigen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,Z\rangle &= \langle \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle \\
&= X\langle\nabla_Y Z, Z\rangle - \langle\nabla_Y Z,\nabla_X Z\rangle - Y\langle\nabla_X Z,Z\rangle + \langle\nabla_X Z,\nabla_Y Z\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle \\
&= \frac{1}{2}XY\langle Z,Z\rangle - \frac{1}{2}YX\langle Z,Z\rangle - \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hier haben wir dir Metrizität von ∇ benutzt.

Für 4. benutzen wir 2. vier Mal:

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(Y,Z)X,W\rangle + \langle R(Z,X)Y,W\rangle &= 0 \\
\langle R(Y,Z)W,X\rangle + \langle R(Z,W)Y,X\rangle + \langle R(W,Y)Z,X\rangle &= 0 \\
\langle R(Z,W)X,Y\rangle + \langle R(W,X)Z,Y\rangle + \langle R(X,Z)W,Y\rangle &= 0 \\
\langle R(W,X)Y,Z\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle + \langle R(Y,W)X,Z\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Wir summieren diese vier Gleichungen auf und benutzen 1. und 3., so dass die linken acht Summanden wegfallen und wir lediglich

$$2\langle R(Z,X)Y,W\rangle + 2\langle R(W,Y)Z,X\rangle = 0$$

erhalten, d.h. $\langle R(Z,X)Y,W\rangle = \langle R(Y,W)Z,X\rangle$. □

Allgemein definieren wir:

Definition 2.12.8. *Es sei V ein endlich-dimensionaler pseudo-Euklidischer Vektorraum $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann ist ein* algebraischer Krümmungstensor *auf V eine trilineare Abbildung $R: V\times V\times V \to V$; $(u,v,w)\mapsto R(u,v)w$, die die Relationen aus Satz 2.12.7 erfüllt.*

Wir haben also gezeigt, dass für den Krümmungstensor R einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit alle Abbildungen $R_p : T_pM\times T_pM\times T_pM \to T_pM$ algebraische Krümmungstensoren sind.

2.13 Schnittkrümmung

Der Krümmungstensor einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) ist ein kompliziertes Objekt: wir setzen drei Tangentialvektoren ein, und erhalten wiederum einen Tangentialvektor. Im Folgenden werden wir die sogenannte Schnittkrümmung definieren, die ein viel einfacheres Objekt ist, aber immer noch die gesamte Information des Krümmungstensors enthält.

Es sei $\sigma \subset V$ ein zweidimensionaler Unterraum eines pseudo-Euklidischen Vektorraumes $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $\{u,v\}$ eine Basis von σ. Wir bezeichnen mit $Q(u,v)$ den Ausdruck

$$Q(u,v) = \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2.$$

Wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit ist, dann ist $Q(u,v) = ||u||^2||v||^2 - \langle u,v\rangle^2$ der Flächeninhalt des durch u und v aufgespannten Parallelogramms.

Wir sagen, dass σ *nichtentartet* ist, wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$, eingeschränkt auf σ, eine nichtentartete symmetrische Bilinearform ist.

Lemma 2.13.1. *σ ist genau dann nichtentartet, wenn $Q(u,v) \neq 0$.*

Beweis. Bezüglich der Basis u,v von σ hat die auf σ eingeschränkte symmetrische Bilinearform g_p die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle u,v\rangle & \langle v,v\rangle \end{pmatrix}$. Damit ist $Q(u,v)$ die Determinante dieser Matrix, und es gilt $Q(u,v) \neq 0$ genau dann, wenn diese Matrix invertierbar ist, was äquivalent dazu ist, dass Q eine nichtentartete symmetrische Bilinearform ist. $\square$

Natürlich ist im Falle eines Euklidischen Skalarproduktes jede 2-Ebene $\sigma \subset V$ nichtentartet.

Es sei nun (M,g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit, versehen mit dem Levi-Civita-Zusammenhang und dem assoziierten Krümmungstensor.

Definition 2.13.2. *Wir definieren die* Schnittkrümmung *einer nichtentarteten 2-Ebene $\sigma \subset T_pM$ durch*

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(u,v)v,u\rangle}{Q(u,v)},$$

wobei $\{u,v\}$ eine Basis von σ ist.

Lemma 2.13.3. *Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Basis $\{u,v\}$ von σ.*

Beweis. Ist x,y eine weitere Basis von σ, so gibt es eine invertierbare Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so dass $u = ax+by$, $v = cx+dy$. Damit rechnen wir

$$\begin{aligned} \langle R(u,v)v,u\rangle &= \langle R(ax+by, cx+dy)cx+dy, ax+by\rangle \\ &= \langle R(ax,dy)cx,by\rangle + \langle R(ax,dy)dy,ax\rangle \\ &\quad + \langle R(by,cx)cx,by\rangle + \langle R(by,cx)dy,ax\rangle \\ &= (ad-bc)^2\langle R(x,y)y,x\rangle \end{aligned}$$

und genauso zeigt man $Q(u,v) = (ad-bc)^2 Q(x,y)$. $\square$

Wir haben nun also aus R eine Abbildung K konstruiert, die jedem zweidimensionalen Unterraum eine reelle Zahl zuordnet.

Bemerkung 2.13.4. *Die Abbildung K enthält sämtliche Informationen über R: man kann zeigen, dass zwei algebraische Krümmungstensoren, die dieselben Schnittkrümmungen besitzen, identisch sind.*

Beispiel 2.13.5. *Betrachten wir $M = \mathbb{R}^n$, versehen mit der Standardmetrik. Wir haben bereits gesehen, dass der Riemannsche Krümmungstensor identisch verschwindet. Damit ist $K(\sigma) = 0$, unabhängig von σ.*

Definition 2.13.6. *Wir sagen, dass eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit* konstante (Schnitt-)Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ *besitzt, wenn $K(\sigma)$ unabhängig von der nichtentarteten 2-Ebene $\sigma \subset T_pM$ (und von $p \in M$) gleich κ ist.*

$\mathbb{R}^n$, versehen mit der Standardmetrik, hat also konstante Schnittkrümmung 0. Wir sagen: $\mathbb{R}^n$ ist *flach*.

Beispiel 2.13.7. *Es sei $\pi : M \to N$ eine differenzierbare Überlagerung von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Es sei auf M eine Riemannsche Metrik g gegeben, und wir nehmen an, dass die Decktransformationsgruppe der Überlagerung (siehe Aufgabenblatt 2) aus Isometrien von (M, g) besteht. Dann können wir auf N eine Riemannsche Metrik h definieren, so dass $\pi^*h = g$. Die Abbildung $\pi : (M, g) \to (N, h)$ wird so zu einer* lokalen *Isometrie: zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine Umgebung U, so dass $\pi : U \to \pi(U)$ eine Isometrie ist. Insbesondere gilt für jede 2-Ebene $\sigma \subset T_pM$, dass $K(\sigma) = K(\pi_*\sigma)$. Falls M konstante Schnittkrümmung besitzt, so also auch N.*

Wir können also beispielsweise die Überlagerung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ betrachten, und so eine flache Riemannsche Metrik auf dem Torus $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ konstruieren. Man beachte, dass dies im Fall $n = 2$ nicht dieselbe Riemannsche Metrik ist, wie die, die man erhält, wenn man den Torus T^2 als Drehfläche im $\mathbb{R}^3$ auffasse (vgl. Aufgabe 10.3).

Um kompliziertere Beispiele zu betrachten, ist folgendes Lemma hilfreich:

Lemma 2.13.8. *Es seien M und N pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten, $\varphi : M \to N$ eine Isometrie, und $\sigma \subset T_pM$ eine 2-Ebene. Dann gilt: $K^M(\sigma) = K^N(d\varphi_p(\sigma))$.*

Beweis. Es sei $\{u, v\}$ eine Basis von σ. In Lemma 2.12.5 haben wir gezeigt, dass $d\varphi(R(u, v)v) = R(d\varphi(u), d\varphi(v))d\varphi(v)$, da φ eine Isometrie ist. Damit gilt für den Zähler in der Definition von $K(\sigma)$:

$$\langle R(u, v)v, u\rangle = \langle d\varphi(R(u, v)v), d\varphi(u)\rangle = \langle R(d\varphi(u), d\varphi(v))d\varphi(v), d\varphi(u)\rangle.$$

Der Nenner $Q(u, v)$ ist über die Metrik definiert, und daher offensichtlich invariant unter $d\varphi$. Damit folgt $K(d\varphi(\sigma)) = K(\sigma)$. □

Satz 2.13.9. *S^n, versehen mit der Standardmetrik, hat konstante Krümmung.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass jede Matrix A in $\mathrm{O}(n+1)$ nach Definition das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n+1}$ invariant lässt. Da A ebenfalls S^n auf sich abbildet, folgt, dass A eine Isometrie von S^n definiert.

Es seien $\sigma_1 \in T_pS^n$ und $\sigma_2 \in T_qS^n$ zwei 2-Ebenen. Wir wählen orthonormale Basen $\{v_i, w_i\}$ von σ_i. Da $T_pS^n = p^\perp$ und $T_qS^n = q^\perp$, gilt, dass $\{p, v_1, w_1\}$ und $\{q, v_2, w_2\}$ jeweils eine Orthonormalbasis eines dreidimensionalen Unterraumes von $\mathbb{R}^{n+1}$ bilden. Damit gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{O}(n+1)$, die $Ap = q$, $Av_1 = v_2$ und $Aw_1 = w_2$ erfüllt (orthogonale Matrizen sind genau die, die Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen schicken, und jede Menge von orthonormalen Vektoren kann zu einer Orthonormalbasis erweitert werden). Diese Abbildung A ist nun eine Isometrie von S^n, die σ_1 auf σ_2 schickt. Nach Lemma 2.13.8 folgt, dass $K(\sigma_1) = K(\sigma_2)$. □

In den Übungen werden wir sehen, dass der hyperbolische Raum H^n ebenfalls konstante Krümmung hat.

Satz 2.13.10. *Es sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung κ. Dann hat der Riemannsche Krümmungstensor von M folgende Gestalt:*

$$R(u, v)w = \kappa(\langle v, w\rangle u - \langle u, w\rangle v).$$

Beweis. Wir definieren über die rechte Seite dieser Gleichung einen $(3, 1)$-Tensor R' auf M. Wenn wir zeigen können, dass R' einen algebraischen Krümmungstensor definiert, der dieselbe Schnittkrümmungen wie R besitzt, dann folgt mit Bemerkung 2.13.4, dass $R = R'$.

Zur ersten Bedingung:

$$R'(u, v)w = \kappa(\langle v, w\rangle u - \langle u, w\rangle v) = -R'(v, u)w.$$

Zur zweiten Bedingung:

$$\begin{aligned} R'(u, v)w + R(v, w)u + R(w, u)v &= \kappa(\langle v, w\rangle u - \langle u, w\rangle v \\ &\quad + \langle w, u\rangle v - \langle v, u\rangle w \\ &\quad + \langle u, v\rangle w - \langle w, v\rangle u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zur dritten Bedingung:

$$\langle R'(u, v)w, z\rangle = \kappa(\langle v, w\rangle\langle u, z\rangle - \langle u, w\rangle\langle v, z\rangle) = -\langle R'(u, v)z, w\rangle.$$

Zur vierten Bedingung:

$$\langle R'(u, v)w, z\rangle = \kappa(\langle v, w\rangle\langle u, z\rangle - \langle u, w\rangle\langle v, z\rangle) = \langle R'(w, z)u, v\rangle.$$

Damit definiert R' auf jedem Tangentialraum einen algebraischen Krümmungstensor. Es bleibt, die Schnittkrümmungen von R' zu berechnen: wir haben

$$\langle R'(u, v)v, w\rangle = \kappa(\langle v, v\rangle\langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle^2) = \kappa Q(u, v),$$

also gilt für eine durch u und v aufgespannte, nichtentartete 2-Ebene σ, dass

$$K(\sigma) = \frac{\kappa Q(u, v)}{Q(u, v)} = \kappa.$$

□

2.14 Jacobifelder

In diesem Abschnitt schränken wir uns auf den Fall einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ein. Es sei $c : [a, b] \to M$ eine Kurve in M und $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$; $(s, t) \mapsto f(s, t) = f_s(t)$ eine Variation von γ. Es sei V ein Vektorfeld längs f, d.h. $V(s, t) \in T_{f(s,t)}M$.

Lemma 2.14.1. *Es gilt*

$$\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\nabla}{\partial t}V = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s}V + R(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})V.$$

Beweis. Eine lange Rechnung führt diese Gleichung auf die Definition des Krümmungstensors zurück, ähnlich wie Lemma 2.9.6 auf die Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs zurückgeführt werden kann. Wir verweisen für den Beweis auf [1, Lemma 4.1]. □

Wir nehmen nun an, dass $c = \gamma$ sowie für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Kurve f_s eine Geodätische ist, und definieren

$$J(t) := \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{s=0}$$

als das *Variationsvektorfeld* von f.

Satz 2.14.2. *J erfüllt die Gleichung*

$$\frac{\nabla^2}{dt^2}J + R(J, \dot\gamma)\dot\gamma = 0. \tag{2.14.1}$$

Beweis. Es gilt $\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, da f_s für jedes s eine Geodätische ist. Damit folgt mit Lemmata 2.14.1 und 2.9.6, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\nabla}{\partial s}(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}) = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t} + R(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} + R(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Setzen wir $s = 0$, folgt die Behauptung. □

Definition 2.14.3. *Ein Vektorfeld J längs einer Geodätischen γ heißt* Jacobifeld längs γ*, falls die* Jacobigleichung

$$\frac{\nabla^2}{dt^2}J + R(J, \dot\gamma)\dot\gamma = 0$$

gilt.

Satz 2.14.4. *Es sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine Geodätische in einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Dann bilden die Jacobifelder längs γ einen $2n$-dimensionalen Vektorraum. Genauer: Die Abbildung $J \mapsto (J(a), \frac{\nabla J}{dt}(0))$ ist ein Isomorphismus mit $T_pM \oplus T_pM$.*

Beweis. Es sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine orthonormale Basis von $T_{\gamma(a)}M$, und X_i die Fortsetzung von v_i zu einem parallelen Vektorfeld längs γ. Es sei $J(t) = \sum_i f_i(t)X_i(t)$ ein beliebiges Vektorfeld längs γ. Dann gilt

$$\frac{\nabla^2}{dt^2}J = \sum_i f_i''(t)X_i(t),$$

und andererseits

$$\begin{aligned} R(J,\dot\gamma)\dot\gamma &= \sum_j \langle R(J,\dot\gamma)\dot\gamma, X_j\rangle X_j \\ &= \sum_{i,j} f_i\langle R(X_i,\dot\gamma)\dot\gamma, X_j\rangle X_j = \sum_{i,j} f_i a_{ij} X_j, \end{aligned}$$

wobei wir

$$a_{ij} = \langle R(X_i,\dot\gamma)\dot\gamma, X_j\rangle$$

setzen. Damit ist J genau dann ein Jacobifeld, wenn

$$f_j''(t) + \sum_i f_i(t)a_{ij}(t) = 0$$

für alle j. Dies ist ein lineares System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Es folgt, dass es zu vorgegebenen $f_i(a)$ und $f_i'(a)$ (d.h. zu vorgegebenen $J(a)$ und $\frac{\nabla J}{dt}(a)$) genau ein Jacobifeld mit diesen Anfangsbedingungen gibt. □

Beispiel 2.14.5. 1. *Das Vektorfeld $\dot\gamma$ ist immer ein Jacobifeld längs ein Geodätischen γ. Hier verschwinden beide Summanden in der Jacobigleichung separat.*

2. *Das Vektorfeld $J(t) = t\dot\gamma(t)$ ist ebenfalls ein Jacobifeld längs γ. Hierfür rechnen wir $\frac{\nabla}{dt}J(t) = \dot\gamma(t)$, also verschwinden wieder beide Summanden in der Jacobigleichung.*

3. *Ein Vektorfeld der Form $J(t) = f(t)\dot\gamma(t)$ ist genau dann ein Jacobifeld, wenn f eine lineare Funktion ist: es gilt, dass $\frac{\nabla^2}{dt^2}J(t) = f''(t)\dot\gamma$ genau dann verschwindet, wenn f linear ist.*

4. *Es sei die Kurve γ nun auf einem Intervall der Form $[0,a]$ definiert. Wir betrachten die Variation $f(s,t) = \exp_p(tv(s))$, wobei $v(s)$ eine Kurve in T_pM ist. Wir setzen $v = v(0)$ und $w = v'(0) \in T_pM$. Da für jedes s die Kurve $t \mapsto f(s,t)$ eine Geodätische ist, folgt, dass*

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,t) = (d\exp_p)_{tv}(tw)$$

ein Jacobifeld längs γ_v mit $J(0) = 0$ ist. Jacobifelder sind also eng verwandt mit dem Differential der Exponentialabbildung in von 0 verschiedenen Punkten.

Als weiteres Beispiel betrachten wir Jacobifelder in Riemannschen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung:

Satz 2.14.6. *Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung κ. Es sei $\gamma : [0, a]$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in M sowie J ein Jacobifeld längs γ, das zu γ senkrecht ist, und $J(0) = 0$ erfüllt. Weiterhin sei X das eindeutige parallele Vektorfeld längs γ mit $X(0) = \frac{\nabla J}{dt}(0)$. Dann gilt:*

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{\kappa})}{\sqrt{\kappa}} X(t) & \text{falls } \kappa > 0 \\ tX(t) & \text{falls } \kappa = 0 \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-\kappa})}{\sqrt{-\kappa}} X(t) & \text{falls } \kappa < 0 \end{cases}$$

Beweis. Wir haben in Satz 2.13.10 gezeigt, dass der Krümmungstensor von M die Gestalt

$$R(u, v)w = \kappa(\langle v, w\rangle u - \langle u, w\rangle v).$$

hat. Damit gilt

$$R(J, \dot\gamma)\dot\gamma = \kappa(||\dot\gamma||^2 J - \langle J, \dot\gamma\rangle\dot\gamma) = \kappa J,$$

also lautet die Jacobigleichung in diesem Fall

$$\frac{\nabla^2}{dt^2} + \kappa J = 0.$$

Es ist nun leicht nachzurechnen, dass die angegebenen Vektorfelder Jacobifelder sind, deren Anfangsbedingungen mit den von J übereinstimmen. □

Beispiel 2.14.7. *Wir haben bereits gesehen, dass die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ konstante Krümmung besitzt, aber wir haben noch nicht die Konstante κ berechnet. Wir betrachten dazu die Geodätische $\gamma(t) = (\cos t)e_1 + (\sin t)e_2$ in S^n, wobei $\{e_i\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Es handelt sich hierbei um die eindeutige Geodätische durch $(1, 0, \ldots, 0) = e_1$ mit Anfangsrichtung $e_2 \in T_{e_1}S^n$ (d.h. sie ist nach Bogenlänge parametrisiert). Wir betrachten die Variation von γ durch Geodätische, die durch*

$$f(s, t) = (\cos t)e_1 + \sin t((\cos s)e_2 + (\sin s)e_3)$$

gegeben ist. Für jedes feste s handelt es sich hierbei um eine Geodätische in S^n. Damit ist durch $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ ein Jacobifeld längs γ gegeben; explizit lautet es

$$J(t) = (\sin t)e_3.$$

Es handelt sich also bei J um ein Jacobifeld, das zu jedem Zeitpunkt senkrecht zu γ steht. Nach Satz 2.14.6 folgt, dass $\kappa = 1$.

Bemerkung 2.14.8. *Wir haben nun mehrere Beispiele von Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung gesehen: $\mathbb{R}^n$ und Tori besitzen eine flache Metrik, die Standardmetrik auf S^n hat konstante positive Schnittkrümmung, und in den Übungen werden wir sehen, dass der hyperbolische Raum konstante negative Krümmung besitzt. Man kann sich nun fragen, ob es weitere Beispiele gibt. In Kapitel 8 von [1] wird gezeigt, dass alle Beispiele von diesen drei Modellräumen überlagert wird:*

Es sei M eine vollständige, einfach zusamenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n, mit konstanter Schnittkrümmung κ. Dann ist M isometrisch zu

1. *S^n, falls $\kappa = 1$*

2. *$\mathbb{R}^n$, falls $\kappa = 0$*

3. *H^n, falls $\kappa = -1$.*

Wir bemerken, dass der Fall $\kappa = 0$ zum grožen Teil in einer Übungsaufgabe behandelt wurde.

Als nächstes beweisen wir die Umkehrung von Satz 2.14.2.

Satz 2.14.9. *Wenn J ein Jacobifeld entlang einer Geodätischen $\gamma : [a, b] \to M$ ist, dann existiert eine Variation $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$, deren Variationsvektorfeld genau J ist.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $a = 0$. Es sei $c(s)$ eine Kurve in M mit $c(0) = \gamma(0)$ und $c'(0) = J(0)$, sowie X ein Vektorfeld längs c mit $X(0) = \gamma'(0)$ und $\frac{\nabla X}{ds}(0) = \frac{\nabla J}{dt}(0)$. (Z.B.: $X(t) = Y(t) + tZ(t)$, wobei Y das parallele Vektorfeld längs c mit $Y(0) = \gamma'(0)$ und Z das parallele Vektorfeld längs c mit $Z(0) = \frac{\nabla J}{dt}(0)$ ist.) Wir setzen

$$f(s, t) = \exp_{c(s)}(tX(s)).$$

Es gilt: $f(0, t) = \exp_p(t\gamma'(0)) = \gamma(t)$, also ist f eine Variation von γ. Es sei I das Variationsvektorfeld von f.

Da $f(s, 0) = c(s)$, gilt $I(0) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = c'(0) = J(0)$. Außerdem gilt

$$\frac{\nabla I}{dt}(0) = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) = \frac{\nabla X}{\partial s}(0) = \frac{\nabla J}{dt}(0),$$

also folgt aus Satz 2.14.4, dass $J = I$. □

Betrachten wir den Spezialfall, dass J ein Jacobifeld längs $\gamma : [0, a] \to M$ mit $J(0) = 0$ ist: dann können wir eine Variation der Form

$$f(s, t) = \exp_p(t(v + sw))$$

wählen, wobei $p = \gamma(0)$, $v = \dot\gamma(0)$ und $w = \frac{\nabla J}{dt}(0)$. Es folgt, dass J von der Form ist, wie sie in Beispiel 2.14.5 beschrieben wurde:

Korollar 2.14.10. *Ist J ein Jacobifeld längs $\gamma : [0, b] \to M$ mit $J(0) = 0$, dann gilt*

$$J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw),$$

wobei $v = \dot\gamma(0)$ und $w = \frac{\nabla J}{dt}(0)$.

2.15 Geometrische Interpretation der Schnittkrümmung

In diesem Abschnitt werden wir mit Hilfe von Jacobifeldern eine geometrische Interpretation der Schnittkrümmung $K(\sigma)$ einer 2-Ebene $\sigma \subset T_pM$ im Tangentialraum einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M geben.

Satz 2.15.1. *Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\gamma : [0,a] \to M$ eine Geodätische, sowie J ein Jacobifeld der Form*

$$J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw),$$

wobei $v = \dot\gamma(0)$ und $w \in T_vT_pM \cong T_pM$ mit $||w|| = 1$. Dann lautet die Taylorentwicklung von $||J(t)||^2$ um $t = 0$ wie folgt:

$$||J(t)||^2 = t^2 - \frac{1}{3}\langle R(v,w)w, v\rangle t^4 + S(t),$$

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{S(t)}{t^4} = 0$.

Beweis. Wir müssen die ersten Ableitungen der Funktion $\langle J, J\rangle$ in 0 berechnen. Da $J(0) = 0$, gilt

$$\langle J, J\rangle(0) = 0$$

und

$$\langle J, J\rangle'(0) = 2\langle J, \frac{\nabla}{dt}J\rangle(0) = 0.$$

Es gilt nach Korollar 2.14.10, dass $\frac{\nabla J}{dt}(0) = w$, so dass

$$\langle J, J\rangle''(0) = 2\langle \frac{\nabla J}{dt}, \frac{\nabla J}{dt}\rangle(0) + 2\langle J, \frac{\nabla^2 J}{dt^2}\rangle(0) = 2.$$

Da nach der Jacobigleichung $\frac{\nabla^2 J}{dt^2}(0) = -(R(J,\dot\gamma)\dot\gamma)(0) = 0$, gilt

$$\langle J, J\rangle'''(0) = 6\langle \frac{\nabla J}{dt}, \frac{\nabla^2 J}{dt^2}\rangle(0) + 2\langle \frac{\nabla^3 J}{dt}, J\rangle(0) = 0.$$

Zuletzt benötigen wir die vierte Ableitung von $\langle J, J\rangle$ in 0. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle J, J\rangle''''(0) &= 6\langle \frac{\nabla^2 J}{dt}, \frac{\nabla^2 J}{dt^2}\rangle(0) + 8\langle \frac{\nabla J}{dt}, \frac{\nabla^3 J}{dt}\rangle(0) + 2\langle \frac{\nabla^4 J}{dt}, J\rangle(0) \\ &= -8\langle \frac{\nabla J}{dt}, \frac{\nabla}{dt}(R(J,\dot\gamma)\dot\gamma)\rangle(0).\end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass

$$\frac{\nabla}{dt}(R(J,\dot\gamma)\dot\gamma)(0) = (R(\frac{\nabla J}{dt}, \dot\gamma)\dot\gamma)(0). \tag{2.15.1}$$

Damit folgt, da $v = \dot\gamma(0)$ und $w = \frac{\nabla J}{dt}(0)$:

$$\langle J, J\rangle''''(0) = -8\langle R(w,v)v, w\rangle = -8\langle R(v,w)w, v\rangle.$$

Insgesamt gilt also:

$$||J(t)||^2 = \frac{2}{2!}t^2 + \frac{-8}{4!}\langle R(v,w)w, v\rangle t^4 + S(t) = t^2 - \frac{1}{3}\langle R(v,w)w, v\rangle t^4 + S(t)$$

für ein Restglied $S(t)$, das $\lim_{t\to 0} \frac{S(t)}{t^4} = 0$ erfüllt.

Es bleibt also, (2.15.1) zu beweisen. Dafür rechnen wir für ein beliebiges Vektorfeld X längs γ wie folgt:

$$\begin{aligned}\langle\frac{\nabla}{dt}(R(J,\dot\gamma)\dot\gamma),X\rangle(0) &= \frac{d}{dt}\langle R(J,\dot\gamma)\dot\gamma,X\rangle(0)-\langle R(J(0),\dot\gamma(0))\dot\gamma(0),\frac{\nabla X}{dt}(0)\rangle\\ &= \frac{d}{dt}\langle R(X,\dot\gamma)\dot\gamma,J\rangle(0)\\ &= \langle\frac{\nabla}{dt}(R(X,\dot\gamma)\dot\gamma),J(0)\rangle+\langle R(X,\dot\gamma)\dot\gamma,\frac{\nabla J}{dt}\rangle(0)\\ &= \langle R(\frac{\nabla J}{dt}\dot\gamma)\dot\gamma,X\rangle.\end{aligned}$$

Dies impliziert die gewünschte Gleichung. □

Es sei nun $\sigma \subset T_pM$ eine 2-Ebene, und $\{x,y\}$ eine Orthonormalbasis von σ. Es sei $c(s)=\cos s\,x+\sin s\,y$. Dann parametrisiert die Kurve $c_r(s)=\exp_p(rc(s))$ den sogenannten *geodätischen Kreis um p vom Radius r* (man beachte, dass c_r natürlich keine Geodätische ist). Es sei $L_r=L(c_r)$ die Länge dieses geodätischen Kreises.

Satz 2.15.2. *Die Taylorentwicklung von L_r lautet*

$$L_r = 2\pi r-\frac{\pi}{3}K(\sigma)r^3+Q(r),$$

wobei $\lim_{r\to 0}\frac{Q(r)}{r^3}=0$. *Insbesondere:*

$$\frac{\pi}{3}K(\sigma)=\lim_{r\to 0}\frac{2\pi r-L_r}{r^3}.$$

Beweis. Es gilt $L_r=\int_0^{2\pi}||(d\exp_p)_{rc(s)}(rc'(s))||ds$. Nun ist

$$J_s(r)=(d\exp_p)_{rc(s)}(rc'(s))$$

ein Jacobifeld längs $r\mapsto \exp_p(rc(s))$, so dass wir Satz 2.15.1 anwenden können: Es gilt

$$||J_s(r)||^2=r^2-\frac{1}{3}\langle R(c(s),c'(s))c'(s),c(s)\rangle r^4+S(r)$$

für ein Restglied S mit $\lim_{r\to 0}\frac{S(r)}{r^4}=0$. Da $\{c(s),c'(s)\}$ nun für jedes s eine Orthonormalbasis von σ ist, folgt also

$$||J_s(r)||^2=r^2-\frac{1}{3}K(\sigma)r^4+S(r). \tag{2.15.2}$$

Wir behaupten, dass dies impliziert, dass

$$||J_s(r)||=r-\frac{1}{6}K(\sigma)r^3+\widetilde{S}(s,r), \tag{2.15.3}$$

wobei $\lim_{r\to+0}\frac{\widetilde{S}(s,r)}{r^3}=0$. Man beachte, dass wir nicht behaupten, dass $||J_s(r)||$ in $r=0$ differenzierbar ist. Zuerst bemerken wir, dass (2.15.2) impliziert, dass

$$0=\lim_{r\to 0}\frac{||J_s(r)||^2-r^2}{r^2}=\lim_{r\to 0}\frac{||J_s(r)||^2}{r^2}-1,$$

also dass

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{||J_s(r)||}{r}\right)^2 = 1.$$

Da für $r > 0$ der Bruch in der Klammer positiv ist, folgt, dass

$$\lim_{r\to +0}\frac{||J_s(r)||}{r} = 1.$$

Mit dieser Information rechnen wir

$$0 = \lim_{r\to +0}\frac{||J_s(r)||^2 - r^2 + \frac{1}{3}K(\sigma)r^4}{r^4} = \lim_{r\to +0}\frac{||J_s(r)|| - r}{r^3}\underbrace{\frac{||J_s(r)|| + r}{r}}_{\to 2} + \frac{1}{3}K(\sigma),$$

also

$$\lim_{r\to +0}\frac{||J_s(r)|| - r}{r^3} = -\frac{1}{6}K(\sigma),$$

was (2.15.3) impliziert. Nun folgt

$$L_r = \int_0^{2\pi} r - \frac{1}{6}K(\sigma)r^3 + \widetilde{S}(r)ds = 2\pi r - \frac{\pi}{3}K(\sigma)r^3 + \int_0^{2\pi}\widetilde{S}(s,r)ds,$$

und $\lim_{r\to 0}\frac{\int_0^{2\pi}\widetilde{S}(s,r)ds}{r^3} = 0.$ □

Beispiel 2.15.3. *Im Fall $M = \mathbb{R}^n$ ist die Länge eines geodätischen Kreises vom Radius r genau $2\pi r$. Die Schnittkrümmung misst also, inwieweit die Längen von geodätischen Kreisen in M von den Längen von geodätischen Kreisen im Euklidischen Raum abweichen. Bei positiver Krümmung ist die Länge kleiner als im Euklidischen Raum, bei negativer Krümmung größer.*

Kapitel 3

Globale Riemannsche Geometrie

3.1 Konjugierte Punkte

Definition 3.1.1. *Es sei $\gamma : [a,b] \to M$ eine nichtkonstante Geodätische in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M, und $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$. Wir sagen, dass q entlang γ zu p* konjugiert *ist, wenn es ein nichtverschwindendes Jacobifeld J entlang γ mit $J(a) = 0$ und $J(b) = 0$ gibt. Ist q entlang γ zu p konjugiert, so ist der Raum der Jacobifelder entlang γ, die in a und b verschwinden, ein Vektorraum; seine Dimension heißt die* Vielfachheit *des konjugierten Punktes q.*

Bezeichnet n die Dimension von M, so wissen wir bereits, dass der Raum der Jacobifelder J entlang $\gamma : [a,b] \to M$, die in a verschwinden, n-dimensional ist. Weiterhin verschwindet das Jacobifeld $(t-a)\dot\gamma(t)$ nur in a; es folgt, dass die Vielfachheit eines konjugierten Punktes immer höchstens $\dim M - 1$ ist.

Beispiel 3.1.2. *Betrachten wir S^n mit der Standardmetrik, und $\gamma : [0,\pi]$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in S^n. Wir wissen, dass $\gamma(\pi)$ der zu $\gamma(0)$ antipodale Punkt ist. Wir haben in Beispiel 2.14.7 gezeigt, dass S^n konstante Schnittkrümmung 1 besitzt. Nach Satz 2.14.6 folgt, dass jedes Jacobifeld J entlang γ, das zu γ senkrecht steht und $J(0) = 0$ erfüllt, von der Form $J(t) = \sin(t)X(t)$ ist, wobei X ein paralleles Vektorfeld längs γ mit $X(0) \perp \dot\gamma(0)$ (und damit $X(t) \perp \dot\gamma(t)$ für alle t) ist. Jedes dieser Vektorfelder verschwindet aber nun für $t = \pi$; damit ist $\gamma(\pi)$ ein zu $\gamma(0)$ konjugierter Punkt längs γ mit Multiplizität $n-1$.*

Beispiel 3.1.3. *Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung κ, mit $\kappa \leq 0$, so folgt aus Satz 2.14.6, dass keine konjugierten Punkte existieren.*

Satz 3.1.4. *Es sei $\gamma : [0,a] \to M$ eine Geodätische, $p = \gamma(0)$, $v = \dot\gamma(0)$. Der Punkt $\gamma(t_0)$, $t_0 \in [0,a]$, ist genau dann entlang γ zu p konjugiert, wenn $t_0 v$ ein kritischer Punkt von $\exp_p$ ist. Die Multiplizität von $\gamma(t_0)$ als konjugierter Punkt von p entlang γ ist gleich der Dimension des Kerns von $(d\exp_p)_{t_0 v}$.*

Beweis. $\gamma(t_0)$ ist genau dann ein zu p konjugierter Punkt längs γ, wenn es ein nichtverschwindendes Jacobifeld J längs γ mit $J(0) = 0$ und $J(t_0) = 0$ gibt.

Nach Korollar 2.14.10 gilt aber, dass Jacobifelder J entlang γ mit $J(0) = 0$ genau die Felder der Form

$$J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw)$$

für ein $w \in T_{tv}T_pM \cong T_pM$ sind. J verschwindet genau dann nicht identisch, wenn $w \neq 0$. Die Bedingung $J(t_0) = 0$ ist nun äquivalent dazu, dass w im Kern von $(d\exp_p)_{t_0v}$ liegt. Das zeigt die erste Behauptung.

Wir wissen nach Satz 2.14.4, dass

$$\{\text{Jacobifelder } J \text{ mit } J(0) = 0\} \to T_pM;\ J \mapsto \frac{\nabla J}{dt}(0)$$

ein linearer Isomorphismus ist. Unter dieser linearen Abbildung geht nun der Vektorraum der Jacobifelder, die zusätzlich in t_0 verschwinden, auf den Kern von $(d\exp_p)_{t_0v}$, da in der Darstellung oben $w = \frac{\nabla J}{dt}(0)$ gilt. Damit folgt die zweite Behauptung. □

3.2 Der Satz von Hadamard

In diesem Abschnitt beweisen wir die folgende Aussage über Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Schnittkrümmung:

Theorem 3.2.1 (Hadamard)**.** *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K(\sigma) \leq 0$ für alle 2-Ebenen σ. Dann gibt es keine konjugierten Punkte in M. Mit anderen Worten: $\exp_p : T_pM \to M$ ist ein lokaler Diffeomorphismus (auf ganz T_pM).*

Beweis. Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine beliebige nichtkonstante Geodätische in M sowie J ein nichttriviales Jacobifeld entlang γ mit $J(0) = 0$ (d.h. $\frac{\nabla J}{dt}(0) \neq 0$). Wir müssen zeigen, dass J zu keinem Zeitpunkt $t \neq 0$ verschwindet; dies zeigt auch die zweite Behauptung, da J von der Form $J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw)$ ist, wobei $v = \dot\gamma(0)$.

Es gilt nun

$$\begin{aligned}\langle J, J\rangle'' &= 2\langle J, \frac{\nabla J}{dt}\rangle' \\ &= 2\langle \frac{\nabla J}{dt}, \frac{\nabla J}{dt}\rangle + 2\langle J, \frac{\nabla^2 J}{dt^2}\rangle \\ &= 2\langle \frac{\nabla J}{dt}, \frac{\nabla J}{dt}\rangle - 2\underbrace{\langle R(J,\dot\gamma)\dot\gamma, J\rangle}_{\leq 0} \geq 0,\end{aligned}$$

da $K \leq 0$. Die Funktion $f(t) = ||J(t)||^2$ hat also die Eigenschaften, dass $f(0) = 0$ und $f''(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist f konvex, und da $f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt, dass f keine weitere Nullstelle haben kann. □

Für diejenigen, die den Begriff der Überlagerung kennen, bemerken wir, dass man folgenden Satz zeigen kann:

Satz 3.2.2. *Es sei $\pi : M \to N$ eine surjektive lokale Isometrie zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, wobei M zusammenhängend und vollständig ist. Dann ist π eine (Riemannsche) Überlagerung.*

Diesen Satz kann man nun wiederum anwenden, um eine stärkere Version des Satzes von Hadamard zu geben:

Theorem 3.2.3. *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K(\sigma) \leq 0$ für alle 2-Ebenen σ. Dann ist* $\exp : T_pM \to M$ *für alle $p \in M$ eine differenzierbare Überlagerung.*

Insbesondere: falls M zusätzlich einfach zusammenhängend ist, dann ist M diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung 3.2.4. *Der Satz von Hadamard zeigt, dass der Diffeomorphietyp von einfach-zusammenhängenden vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sehr einfach ist. Für $K > 0$ oder $K \geq 0$ ist die Situation viel schwieriger. Die Struktur von kompakten Mannigfaltigkeiten, die eine Riemannsche Metrik mit positiver Schnittkrümmung zulassen, ist eine der großen ungelösten Fragen der Riemannschen Geometrie. Neben den Sphären und projektiven Räumen ($\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ und $\mathbb{O}P^2$) gibt es nur wenige bekannte Beispiele in niedrigen Dimensionen. Bereits die Antwort auf so einfach aussehende Fragen, ob $S^2 \times S^2$ eine Riemannsche Metrik positiver Schnittkrümmung zulässt, ist unbekannt (die Hopf-Vermutung besagt, dass es eine solche nicht gibt). Natürlich lässt diese Mannigfaltigkeit eine Metrik mit $K \geq 0$ zu; einfach das Produkt der Standardmetrik mit sich selbst. Allgemeiner ist kein Beispiel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit $K \geq 0$ bekannt, von der man zeigen kann, dass sie keine Metrik mit $K > 0$ besitzt.*

Unser nächstes Ziel ist es, den Satz von Bonnet-Myers zu beweisen, der eine topologische Aussage über Mannigfaltigkeiten mit positiver Schnittkrümmung trifft; die Aussage ist aber weit weniger erschöpfend als der Satz von Hadamard im Fall $K \leq 0$.

3.3 Variation der Energie

Wir erinnern daran, dass für eine differenzierbare Kurve $c : [0, a] \to M$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M die *Länge* von c durch

$$L(c) = \int_0^a ||c'(t)||dt$$

definiert ist. Wir werden im Folgenden Variationen $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \to M$; $(s, t) \mapsto f(s, t)$ von c betrachten. Wir beobachten, dass der Integrand in

$$L(f_s) = \int_0^a ||f_s'(t)||dt$$

nicht überall differenzierbar sein muss; daher betrachten wir in diesem Abschnitt das sogenannte *Energiefunktional*, definiert durch

$$E(c) = \int_0^a ||c'(t)||^2 dt.$$

Bemerkung 3.3.1. *Es gibt Varianten der Aussagen über das Energiefunktional, die wir in diesem Abschnitt beweisen werden, für das Längenfunktional, wenn wir uns auf reguläre Kurven (d.h. $c'(t) \neq 0$ für alle t) einschränken.*

Wir beobachten zunächst, dass aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\int_0^a fg dt\right)^2 \leq \int_0^a f^2 dt \cdot \int_0^a g^2 dt$$

folgt (setze $f(t) = 1$ und $g(t) = ||c'(t)||$):

$$L(c)^2 \leq aE(c);$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f und g proportional sind, d.h. wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Lemma 3.3.2. *Es seien $p, q \in M$ sowie $\gamma : [0, a] \to M$ eine die Länge minimierende Geodätische von p nach q. Dann gilt für alle Kurven $c : [0, a] \to M$ von p nach q, dass $E(\gamma) \leq E(c)$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn c eine die Länge minimierende Geodätische ist.*

Bemerkung 3.3.3. *Man beachte, dass wir in diesem Lemma nicht voraussetzen müssen, dass c proportional zur Bogenlänge ist. Anders als das Längenfunktional ist die Energie nicht unter Umparametrisierung invariant.*

Beweis. Es gilt

$$aE(\gamma) = L(\gamma)^2 \leq L(c)^2 \leq aE(c).$$

Falls Gleichheit gilt, dann folgt $L(c)^2 = aE(c)$, d.h. c ist proportional zur Bogenlänge parametisiert, und außerdem gilt $L(\gamma) = L(c)$, was nach Satz 2.9.1 impliziert, dass c eine (minimierende) Geodätische ist.

Ist c umgekehrt eine die Länge minimierende Geodätische von p nach q, dann ist c insbesondere proportional zur Bogenlänge parametrisiert, und es gilt Gleichheit in obiger Ungleichungskette. □

Zu einer Variation f von c wie oben können wir das zugehörige Variationsvektorfeld

$$V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$$

betrachten. Umgekehrt induziert ein Vektorfeld längs einer Kurve auch eine Variation (in nicht eindeutiger Weise):

Lemma 3.3.4. *Es sei V ein Vektorfeld längs einer Kurve $c : [0, a] \to M$. Dann existiert eine Variation $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \to M$ mit Variationsvektorfeld V.*

Falls $V(0) = 0$ und $V(a) = 0$, so können wir annehmen, dass $f(s, 0) = c(0)$ und $f(s, 1) = c(1)$ für alle s (wir sagen, die Variation f ist eigentlich*).*

Beweis. Wir erinnern an Lemma 2.9.10, das besagte, dass um jeden Punkt in M eine Umgebung U und eine Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\exp_q$ für jedes $q \in U$ auf $B_\varepsilon(0)$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. (Die Betonung liegt darauf, dass ε unabhängig von q ist.)

Da $c([0, a])$ kompakt ist, können wir $c([0, a])$ mit endlich vielen solcher Umgebungen U überdecken. Es sei δ die kleinste der Zahlen ε, die diesen offenen Mengen zugeordnet sind. Es folgt: für alle $t \in [0, a]$ ist $\exp_{c(t)}$ auf $B_\delta(0)$ definiert (und ein Diffeomorphismus aufs Bild).

Es sei nun $C := \max_{t\in[0,a]} ||V(t)||$ und $\alpha < \frac{\delta}{C}$. Wir setzen

$$f : (-\alpha, \alpha) \times [0, a] \to M \; (s, t) \mapsto \exp_{c(t)}(sV(t)).$$

Nach Wahl von α ist f wohldefiniert. Da exp differenzierbar ist, und $(s,t) \mapsto sV(t)$ eine differenzierbare Abbildung ins Tangentialbündel darstellt, folgt, dass f differenzierbar ist. Weiterhin gilt $f(0,t) = c(t)$, und das Variationsvektorfeld von f ist durch

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0,t) = \frac{\partial f}{\partial s}(\exp_{c(t)}(sV(t)))\Big|_{s=0} = (d\exp_{c(t)})_0(V(t)) = V(t)$$

gegeben.

Zuletzt gilt, dass wann immer $V(t) = 0$, die Variation zum Zeitpunkt t konstant auf den Punkt $c(t)$ abbildet. □

Im Folgenden werden wir für eine Variation $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,a] \to M$ einer Kurve $c : [0,a] \to M$ die Variation des Energiefunktionals in Abhängigkeit des Parameters s untersuchen: es sei

$$E(s) = E(f_s) = \int_0^a ||f_s'(t)||^2 dt.$$

Satz 3.3.5 (Erste Variationsformel für die Energie)**.** *Es bezeichne V das Variationsvektorfeld der Variation f. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2}E'(0) = -\int_0^a \langle V(t), \frac{\nabla}{dt}c'(t)\rangle dt - \langle V(0), c'(0)\rangle + \langle V(a), c'(a)\rangle.$$

Beweis. Wir leiten unter dem Integral ab und berechnen mit Hilfe von Lemma 2.9.6:

$$\begin{aligned} E'(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^a \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt = 2\int_0^a \langle \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt = 2\int_0^a \langle \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt \\ &= 2\int_0^a \frac{d}{dt}\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle - \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\frac{1}{2}E'(s) = \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle\Big|_{t=0}^{t=a} - \int_0^a \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt. \tag{3.3.1}$$

Einsetzen von $s = 0$ liefert die gewünschte Behauptung. □

Wir erhalten unmittelbar als Korollar:

Korollar 3.3.6. *Eine differenzierbare Kurve $c : [0,a] \to M$ ist genau dann eine Geodätische, wenn für jede eigentliche Variation f von c gilt, dass $E'(0) = 0$.*

Beweis. Ist c eine Geodätische sowie f eine eigentliche Variation von c, so folgt sofort aus Satz 3.3.5, dass $E'(0) = 0$.

Es sei umgekehrt $E'(0) = 0$ für alle eigentlichen Variationen von c. Wir müssen zeigen, dass c eine Geodätische ist. Es sei $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion mit $g(0) = g(a) = 0$ und $g(t) > 0$ für $0 < t < a$. Wir betrachten das Vektorfeld $V(t) = g(t)\frac{\nabla}{dt}c'(t)$ längs c. Nach Lemma 3.3.4 gibt es eine eigentliche Variation f von c, die V als Variationsvektorfeld besitzt. Nach Satz 3.3.5 folgt:

$$0 = \frac{1}{2}E'(0) = -\int_0^a \langle V(t), \frac{\nabla}{dt}c'(t)\rangle dt = -\int_0^a \underbrace{g(t)||\frac{\nabla}{dt}c'(t)||^2}_{\geq 0} dt.$$

Da der Integrand stetig ist, folgt, dass er bereits verschwinden muss, also ist $\frac{\nabla}{dt}c' = 0$, d.h. c ist eine Geodätische. □

Bemerkung 3.3.7. *Wir können uns die Aussage der ersten Variationsformel so veranschaulichen, dass Geodätische zwischen zwei Punkten p und q genau die kritischen Punkte des Energiefunktionals $E : \Omega_{p,q} \to \mathbb{R}$ sind, wobei $\Omega_{p,q}$ den Raum der differenzierbaren Wege von p nach q bezeichnet. Eine Variation einer Kurve c entspricht in diesem Bild einer Kurve im Raum $\Omega_{p,q}$. Man beachte jedoch, dass $\Omega_{p,q}$ nicht die Struktur einer (endlich-dimensionalen) Mannigfaltigkeit trägt, so dass diese Sichtweise zwar hilfreich, für uns aber eher heuristisch zu verstehen ist.*

Wir setzen nun voraus, dass wir einen kritischen Punkt des Energiefunktionals, d.h. eine Geodätische, vorliegen haben, und berechnen die zweite Ableitung des Energiefunktionals entlang einer Variation dieser Geodätischen.

Satz 3.3.8 (Zweite Variationsformel für die Energie)**.** *Es sei $\gamma : [0, a] \to M$ eine Geodätische und $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \to M$ eine eigentliche Variation, mit Variationsvektorfeld V. Dann gilt für die Funktion $E(s) = E(f_s)$:*

$$\frac{1}{2}E''(0) = -\int_0^a \langle \frac{\nabla^2}{dt^2}V + R(V, \gamma')\gamma', V\rangle dt.$$

Beweis. Wir leiten (3.3.1) ein weiteres Mal ab und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E''(s) = {} & \langle \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle\Big|_{t=0}^{t=a} + \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle\Big|_{t=0}^{t=a} \\ & - \int_0^a \langle \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt - \int_0^a \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt.\end{aligned}$$

Wir setzen nun $s = 0$. Es verschwinden sowohl der erste als auch der zweite Summand, weil f eine eigentliche Variation ist ($f(s, 0)$ und $f(s, a)$ sind konstante Kurven). Der dritte Summand verschwindet, weil γ eine Geodätische ist; damit erhalten wir mit Lemma 2.14.1:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E''(0) &= -\int_0^a \langle V, \frac{\nabla}{\partial s}\Big|_{s=0}\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt \\ &= -\int_0^a \langle \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s}\Big|_{s=0}\frac{\partial f}{\partial t} + R(V, \gamma')\gamma', V\rangle dt \\ &= -\int_0^a \langle \frac{\nabla^2}{dt^2}V + R(V, \gamma')\gamma', V\rangle dt.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.3.9. *Betrachten wir nicht eigentliche Variationen von γ, so erhalten wir weitere Summanden auf der rechten Seite. Vgl. [1, Kapitel 9, Bemerkung 2.9].*

Bemerkung 3.3.10. *Man beachte, dass das Verschwinden des Ausdrucks $\frac{\nabla^2}{dt^2}V + R(V, \gamma')\gamma'$ genau die Jacobigleichung ist.*

3.4 Der Satz von Bonnet-Myers

In diesem Abschnitt geben wir eine Anwendung der Variationsformeln für die Energie. Es sei M eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, $n \geq 2$. Wir definieren:

Definition 3.4.1. *Für $p \in M$ und $v \in T_pM$ mit $||v|| = 1$ definieren wir die* Ricci-Krümmung *in Richtung v durch*

$$\mathrm{Ric}_p(v) = \frac{1}{n-1}\,\mathrm{Spur}(u \mapsto R(u,v)v).$$

Wählen wir eine Orthonormalbasis $\{u_i\}$ von T_pM, mit $u_n = v$, dann können wir die Ricci-Krümmung in Richtung v wie folgt berechnen:

$$\mathrm{Ric}_p(v) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(u_i,v)v, u_i\rangle = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}K(\sigma_i),$$

wobei σ_i die durch $u_n = v$ und u_i aufgespannte 2-Ebene in T_pM bezeichnet. Es handelt sich also bei der Ricci-Krümmung in Richtung v um ein Mittel über gewisse Schnittkrümmungen von 2-Ebenen, die v enthalten.

Beispiel 3.4.2. *Für die Sphäre S^n mit der Standardmetrik erhalten wir konstante Ricci-Krümmung* $\mathrm{Ric}_p(v) = 1$. *Dieses Beispiel motiviert den Vorfaktor $\frac{1}{n-1}$. (Man beachte, dass nicht alle Autoren diesen Vorfaktor verwenden.)*

Man beachte, dass trivialerweise gilt, dass Aussagen der Form $K \geq 0$, $K > 0$, $K < 0$, $K \leq 0$, $K \geq \alpha > 0$ etc. die entsprechende Aussage für die Ricci-Krümmung impliziert.

Theorem 3.4.3. *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir nehmen an, dass es $r > 0$ gibt, so dass*

$$\mathrm{Ric}_p(v) \geq \frac{1}{r^2} > 0$$

für alle $p \in M$ und alle $v \in T_pM$ mit $||v|| = 1$. Dann ist M kompakt und der Durchmesser *von M,* $\mathrm{diam}(M) = \sup_{p,q\in M} d(p,q)$, *erfüllt* $\mathrm{diam}(M) \leq \pi r$. *Weiterhin ist $\pi_1(M)$ endlich.*

Beweis. Es genügt für die ersten beiden Aussagen zu zeigen, dass die Länge einer jeden minimierende Geodätischen $\gamma : [0,1] \to M$ zwischen zwei beliebigen Punkten p und q durch πr beschränkt ist, da nach dem Satz von Hopf-Rinow aufgrund der Vollständigkeit von M abgeschlossene und beschränkte Teilmengen von M kompakt sind.

Wir nehmen also an, dass wir eine minimierende Geodätische $\gamma : [0,1] \to M$ der Länge $l > \pi r$ gewählt haben. Es sei $n = \dim M$, und $X_1, \ldots, X_{n-1}$ parallele Orthonormalfelder längs γ, die zu γ' senkrecht stehen. Wir vervollständigen dies zu einem orthonormalen Rahmen mittels $X_n = \frac{\gamma'}{l}$. Für $j = 1, \ldots, n-1$ sei V_j das durch

$$V_j(t) = \sin(\pi t)X_j(t)$$

gegebene Vektorfeld entlang γ. Da $V_j(0) = 0$ und $V_j(1) = 0$, gibt es nach Satz 3.3.4 eine eigentliche Variation f_j von γ mit Variationsvektorfeld V_j. Wir bezeichnen mit $E_j(s)$ die Energie von $f_j(s,\cdot)$. Mit Hilfe der zweiten Variationsformel für die Energie, Satz 3.3.8, und der Tatsache, dass die X_j parallel sind, berechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E_j''(0) &= -\int_0^1 \langle \frac{\nabla^2}{dt^2}V_j + R(V_j,\gamma')\gamma', V_j\rangle dt\\ &= \int_0^1 \sin^2(\pi t)(\pi^2 - l^2 K(\sigma_j(t)))dt,\end{aligned}$$

wobei $\sigma_j(t)$ die durch $X_n(t)$ und $X_j(t)$ aufgespannte 2-Ebene bezeichnet. Wir summieren diese Gleichung über j und erhalten unter Verwendung der Voraussetzung

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} E_j''(0) &= \int_0^1 \sin^2(\pi t)((n-1)\pi^2 - (n-1)\underbrace{l^2\,\mathrm{Ric}_{\gamma(t)}(X_n(t))}_{>(\pi r)^2\frac{1}{r^2}})dt\\ &< \int_0^1 \sin^2(\pi t)((n-1)\pi^2 - (n-1)\pi^2)dt = 0.\end{aligned}$$

Es folgt, dass es mindestens einen Index j gibt, so dass $E_j''(0) < 0$. Damit folgt, dass für kleines s gilt, dass $E_j(s) < E(\gamma)$, was Lemma 3.3.2 widerspricht.

Für die Aussage über die Fundamentalgruppe betrachten wir die universelle Überlagerung $\pi : \widetilde{M} \to M$, wobei wir $\widetilde{M}$ mit der Riemannschen Metrik versehen, so dass π eine lokale Isometrie wird. Mit dieser Riemannschen Metrik ist die Ricci-Krümmung von $\widetilde{M}$ nach unten durch dieselbe Konstante δ beschränkt. Nach dem soeben bewiesenen Teil des Satzes folgt, dass $\widetilde{M}$ kompakt ist. Es folgt, dass eine Faser von π nur endlich viele Elemente besitzen kann. Da die Faser mit $\pi_1(M)$ identifiziert werden kann, folgt, dass $\pi_1(M)$ endlich ist. $\square$

Beispiel 3.4.4. *Die Sphäre S^n hat konstante Ricci-Krümmung* 1*, und ihr Durchmesser ist π.*

Beispiel 3.4.5. *Der Satz von Bonnet-Myers impliziert, dass der Torus T^n keine Riemannsche Metrik mit positiver Ricci-Krümmung besitzt: Da T^n kompakt ist, ist jede Riemannsche Metrik auf ihm vollständig, und aus dem selben Grund folgt, dass* $\mathrm{Ric} > 0$ *impliziert, dass* $\mathrm{Ric} \geq C > 0$ *für ein $C > 0$. Aber $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ ist unendlich.*

Bemerkung 3.4.6. *Es gilt, dass die universelle Überlagerung einer kompakten Mannigfaltigkeit M genau dann kompakt ist, wenn die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ endlich ist. Damit folgt aus dem Satz von Hadamard, dass die Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit $K \leq 0$ unendlich sein muss.*

Bemerkung 3.4.7. *Ein Indiz dafür, dass die Ricci-Krümmung weniger Information als die Schnittkrümmung beinhaltet, besagt folgende Tatsache, die 1994 von Lohkamp bewiesen wurde [7]: Jede Mannigfaltigkeit (kompakt oder nicht) besitzt eine vollständige Riemannsche Metrik mit* $\mathrm{Ric} \leq C < 0$ *für ein $C < 0$. Insbesondere lässt sich aus der Voraussetzung M kompakt,* $\mathrm{Ric} \leq 0$ *keinerlei Information über die Größe der Fundamentalgruppe von M ziehen.*

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir hier eine weitere Art der Krümmung: wir erhalten die *Skalarkrümmung* einer Mannigfaltigkeit M in einem Punkt p, indem wir über die Ricci-Krümmungen in p mitteln:

$$\mathrm{scal}(p) := \frac{1}{n}\,\mathrm{Ric}_p(u_i),$$

wobei $\{u_i\}$ eine Orthonormalbasis von T_pM ist. Die Skalarkrümmung ist unabhängig von der gewählten Basis, da wir sie wiederum als Spur einer geeigneten linearen Abbildung schreiben können. Wieder gilt, dass Ungleichungen für die Ricci-Krümmung die entsprechenden Ungleichungen für die Skalarkrümmung implizieren.

3.5 Differentialformen und Integration auf Mannigfaltigkeiten

Unser nächstes Ziel ist es, den Satz von Gauß-Bonnet zu beweisen. Dafür werden wir den sogenannten Cartanformalismus verwenden. Dafür benötigen wir zunächst einige Aussagen über Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten. Wir benötigen folgende Operationen für Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten, die genauso definiert sind wie man es für Differentialformen auf $\mathbb{R}^n$ kennt: das Dachprodukt $\wedge$, das äußere Differential d, und der Pullback unter einer differenzierbaren Abbildung. Das Dachprodukt benötigen wir nur für 1-Formen; für solche ist es folgendermaßen definiert: sind α und β 1-Formen, so ist $\alpha \wedge \beta$ die 2-Form, die durch

$$(\alpha \wedge \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v).$$

definiert ist. Das äußere Differential d kennen wir für 0-Formen, d.h. für Funktionen, bereits: es gilt für eine Funktion f, dass df die 1-Form ist, die durch $df(v) = v(f)$ definiert ist. d ist nun die eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Erweiterung dieser Abbildung, die k-Formen auf $k+1$-Formen abbildet, $d(df) = 0$ für jede Funktion erfüllt und eine Derivation in dem Sinne ist, dass

$$d(\eta \wedge \omega) = (d\eta) \wedge \omega + (-1)^k \eta \wedge (d\omega)$$

wenn η eine k-Form und ω eine l-Form ist. Explizit ist das äußere Differential einer k-Form ω durch

$$\begin{aligned}(d\omega)(X_0, \ldots, X_k) = &\sum_i (-1)^i X_i(\omega(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_k) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_k)\end{aligned}$$

gegeben. Für uns relevant wird nur der Fall einer 1-Form α sein, für welche diese Formel so aussieht:

$$(d\alpha)(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

Wenn $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung ist und ω eine Differential-k-Form auf N, dann ist $f^*\omega$ die durch

$$(f^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k))$$

definierte Differential-k-Form auf M.

Für den Satz von Gauß-Bonnet müssen wir in der Lage sein, Differentialformen über Mannigfaltigkeiten zu integrieren. Wir erinnern zunächst daran, dass eine alternierende n-Form ω auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum V dasselbe wie die Wahl einer *Orientierung* ist: eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ ist genau dann positiv orientiert, wenn $\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0$. Hierdurch motiviert definieren wir:

Definition 3.5.1. *Eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M heißt* orientierbar*, wenn es auf M eine nirgends verschwindende Differential-n-Form gibt. Eine solche Form induziert auf jedem Tangentialraum eine Orientierung. M heißt* orientiert*, wenn wir eine solche Familie von Orientierungen auf allen Tangentialräumen fixiert haben.*

Sind M und N orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so heißt ein Diffeomorphismus $f : M \to N$ orientierungserhaltend*, wenn df_p für jedes p eine positiv orientierte Basis von T_pM auf eine positiv orientierte Basis von $T_{f(p)}N$ schickt.*

Nun definieren wir Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten. Sei M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit und ω eine n-Form auf M. Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass ω kompakten Träger im Definitionsbereich U einer orientierungserhaltenden Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ hat, d.h. der Abschluss der Menge $\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}$ ist kompakt und in U enthalten. Auf $\mathbb{R}^n$ betrachten wir die Standardorientierung, die durch die n-Form $du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$ gegeben ist. Dann definieren wir

$$\int_M \omega := \int_{\phi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\phi(U)} A(u)du_1 \ldots du_n,$$

wenn $(\varphi^{-1})^*\omega = A(u)du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$ ist. Ist nun M kompakt und ω beliebig, so wählen wir einen Atlas $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ von M, der aus orientierungserhaltenden Karten besteht, sowie eine der Überdeckung durch die U_α untergeordnete Zerlegung der Eins (f_α), und setzen

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_M f_\alpha \omega.$$

Jede der Differentialformen $f_\alpha\omega$ hat nun Träger in einem Kartengebiet.

Ist auf einer orientierten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M nun zusätzlich eine Riemannsche Metrik g gegeben, so induziert diese eine natürliche *Volumenform*: dies ist die eindeutige n-Form vol, die ausgewertet auf positiv orientierten Orthonormalrahmen den Wert 1 annimmt.

3.6 Der Cartanformalismus

Es sei nun (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir fixieren einen lokalen Rahmen $E_1, \ldots, E_n$ auf einer offenen Menge U, d.h. die E_i sind punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf U. Da die E_i punktweise eine Basis des entsprechenden Tangentialraumes bilden, können wir den Levi-Civita-Zusammenhang von g auf U durch

$$\nabla E_i = \sum_{j=1}^n \omega_i^j E_j$$

ausdrücken, wobei die ω_i^j gewisse 1-Formen auf U sind, die sogenannten *Zusammenhangs-1-Formen.* Genauer: für alle Vektorfelder X auf U gilt

$$\nabla_X E_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_i^j(X) E_j.$$

Bemerkung 3.6.1. *Wir haben bereits zuvor eine Möglichkeit gesehen, den Levi-Civita-Zusammenhang lokal zu verstehen: in lokalen Koordinaten ist er durch die zugehörigen Christoffelsymbole gegeben. Der Zugang hier ist anders, da er nicht von einer gewählten Karte abhängt, sondern von einem gewählten Rahmen. Der Cartanformalismus besteht darin, sämtliche Berechnungen in solch einem gewählten lokalen Rahmen auszuführen.*

Man beachte, dass ein solcher Rahmen nicht unbedingt von der Form $E_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ für eine gewisse Karte $(x_1, \ldots, x_n)$ sein muss: z.B. werden wir auf dem letzten Übungsblatt sehen, dass ein orthonormaler Rahmen nur dann derart von einer Karte induziert sein kann, wenn die Mannigfaltigkeit auf dem Definitionsbereich des Rahmens flach ist.

Wir nehmen ab jetzt an, dass der Rahmen orthonormal ist. Dann gilt:

$$g(\nabla_X E_i, E_j) = g(\sum_k \omega_i^k(X) E_k, E_j) = \omega_i^j(X),$$

und andererseits aufgrund der Metrizität

$$g(\nabla_X E_i, E_j) = -g(E_i, \nabla_X E_j) = -g(E_i, \sum_k \omega_j^k(X) E_k) = -\omega_j^i(X),$$

d.h.

$$\omega_i^j = -\omega_j^i. \tag{3.6.1}$$

Bemerkung 3.6.2. *Mit anderen Worten: Die Matrix von 1-Formen (ω_{ij}) ist eine ,,1-Form mit Werten in den schiefsymmetrischen $n \times n$-Matrizen".*

Die E_i definieren duale 1-Formen $\omega^1, \ldots, \omega^n$ auf U, so dass für alle $p \in U$ gilt, dass $\omega_p^i(E_j(p)) = \delta_{ij}$. Dann übersetzt sich auch die Torsionsfreiheit von ∇ in eine Gleichung dieser 1-Formen: es gilt

$$d\omega^i = \sum_j \omega^j \wedge \omega_j^i. \tag{3.6.2}$$

Um dies einzusehen, schreiben wir die Torsionsfreiheit um: mit

$$\sum_j (\omega^j \wedge \omega_j^i)(E_k, E_l) = \sum_j \delta_{jk} \omega_j^i(E_l) - \delta_{jl} \omega_j^i(E_k) = \omega_k^i(E_k) - \omega_l^i(E_k)$$

berechnen wir

$$\nabla_{E_l} E_k - \nabla_{E_k} E_l = \sum_i (\omega_k^i(E_l) - \omega_l^i(E_k)) E_i = \sum_i \left(\sum_j (\omega^j \wedge \omega_j^i)(E_k, E_l) \right) E_i$$

und andererseits

$$\nabla_{E_l} E_k - \nabla_{E_k} E_l = [E_l, E_k] = \sum_i \omega^i([E_l, E_k]) E_i = \sum_i d\omega^i(E_k, E_l) E_i,$$

was zusammen (3.6.2) impliziert.

Schließlich möchten wir den Krümmungstensor in dieser neuen Sprache ausdrücken. Wir definieren die *Krümmungs-2-Formen* Ω_i^j durch

$$R(\cdot,\cdot)E_i = \sum_j \Omega_i^j E_j$$

und behaupten

$$d\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_i^j. \tag{3.6.3}$$

Um dies einzusehen, rechnen wir

$$\begin{aligned}
\sum_j \Omega_i^j(E_k,E_l)E_j &= R(E_k,E_l)E_i \\
&= \nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i - \nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_i - \nabla_{[E_k,E_l]}E_i \\
&= \sum_j \nabla_{E_k}\omega_i^j(E_l)E_j - \nabla_{E_l}\omega_i^j(E_k)E_j - \omega_i^j([E_k,E_l])E_j \\
&= \sum_j (E_k(\omega_i^j(E_l)))E_j + \omega_i^j(E_l)\nabla_{E_k}E_j \\
&\qquad - (E_l(\omega_i^j(E_k)))E_j - \omega_i^j(E_k)\nabla_{E_l}E_j - \omega_i^j([E_k,E_l])E_j \\
&= \sum_j d\omega_i^j(E_k,E_l)E_j \\
&\qquad + \omega_i^j(E_l)\sum_m \omega_j^m(E_k)E_m - \omega_i^j(E_k)\sum_m \omega_j^m(E_l)E_m \\
&= \sum_j d\omega_i^j(E_k,E_l)E_j + \sum_{j,m}(\omega_i^j \wedge \omega_j^m)(E_l,E_k)E_m \\
&= \sum_j \left(d\omega_i^j(E_k,E_l) - \sum_m \omega_i^m \wedge \omega_m^j(E_k,E_l) \right) E_j
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt j und m umbenannt haben.

Man beachte, dass im Fall, dass M zweidimensional ist (was der Fall ist, der uns für den Satz von Gauß-Bonnet interessieren wird), (3.6.3) folgende Gleichung liefert:

$$d\omega_2^1 = \Omega_2^1,$$

und da $E_1(p), E_2(p)$ dann eine Orthonormalbasis von T_pM ist, gilt

$$K(T_pM) = g(R(E_1(p),E_2(p))E_2(p),E_1(p)) = \Omega_2^1(E_1(p),E_2(p)),$$

d.h.

$$d\omega_2^1 = \Omega_2^1 = K\omega^1 \wedge \omega^2, \tag{3.6.4}$$

wobei $K(p) = K(T_pM)$ die Gauß-Krümmung von M in p, d.h. die Schnittkrümmung von T_pM bezeichnet.

3.7 Der Satz von Gauß-Bonnet

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Gauß-Bonnet (wir folgen dem zweiten Beweis in [9], siehe Seite 104ff):

Satz 3.7.1. *Es sei M eine zweidimensionale kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,d\,\mathrm{vol} = \chi(M).$$

Man beachte, dass das Integral über die Gauß-Krümmung auf der linken Seite eine echte Größe der Riemannschen Geometrie ist, während die *Eulercharakteristik* $\chi(M)$ auf der rechten Seite der Gleichung nicht von der gewählten Riemannschen Metrik abhängt; sie ist eine rein topologische Größe. Sie kann auf mehrere Weisen definiert werden; die Definition, die wir im Beweis verwenden werden, ist mittels einer *Triangulierung* von M:

Gegeben eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2$, so nennen wir eine Teilmenge $P \subset U$, so dass $\varphi(P)$ ein konvexes Polygon ist, ein *Polygon* in M. Der Rand ∂P eines Polygons P ist daher eine stückweise glatte Kurve in M. Jeden glatten Teil von ∂P nennen wir eine *Kante* oder *Seite* von P. Man kann zeigen, dass es immer eine Zerlegung von M in solche Polygone gibt, derart, dass jede Seite eines Polygons die Seite genau eines weiteren Polygons ist. Dies werden wir nicht beweisen; es gibt mehrere Beweise in der Literatur, z.B. [2]. Wir fixieren eine solche Zerlegung und bezeichnen mit F die Anzahl der Polygone der Zerlegung, mit E die Anzahl der Seiten der Polygone (jede Seite sei genau einmal gezählt, obwohl sie in zwei Polygonen auftritt), und V die Anzahl der Ecken (wir wissen a priori nichts über die Anzahl der Polgone, die sich an einer Ecke treffen). Dann ist die Eulercharakteristik von M definiert als

$$\chi(M) = F - E + V.$$

Anhand dieser Definition ist es natürlich nicht klar, dass $\chi(M)$ von der gewählten Zerlegung in Polygone unabhängig ist. Man beachte jedoch, dass dies aus dem Satz von Gauß-Bonnet folgen wird!

Beispiel 3.7.2. $\chi(S^2) = 2$, $\chi(T^2) = 0$. *Allgemein gilt für eine Fläche M_g vom Geschlecht g: $\chi(M_g) = 2 - 2g$.*

$$\int_M K d\,\mathrm{vol} = \sum \int_{P_i} K d\,\mathrm{vol}$$

Wir schreiben den Ausdruck $\int_{P_i} K d\,\mathrm{vol}$ nun mit Hilfe des Cartanformalismus um. Dafür wählen wir für jedes i einen positiv orientierten Orthonormalrahmen E_1, E_2 auf P_i und nennen den zugehörigen Korahmen ω^1, ω^2. Dann folgt aus (3.6.1), (3.6.2) und (3.6.4):

$$\begin{aligned} K d\,\mathrm{vol} &= K\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= d\omega^1_2 \\ d\omega^1 &= \omega^2 \wedge \omega^1_2 \\ d\omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2_1 = -\omega^1 \wedge \omega^1_2. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Stokes für Mannigfaltigkeiten (siehe z.B. [12]) gilt:

$$\sum \int_{P_i} K d\,\mathrm{vol} = \sum \int_{\partial P_i} \omega^1_2.$$

Wir zerlegen den Rand ∂P_i in seine Kanten γ (um die Notation einfach zu halten, verwenden wir keine Indizes - eigentlich sollten wir γ_{ij} schreiben). Eine Kante γ von P_i ist nun die Kante genau eines weiteren Polygons; wir bezeichnen die zu diesen Polygon gehörigen Daten mit $\bar{E}_1, \bar{E}_2$, $\bar{\omega}^1, \bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_2^1$. Dann gilt

$$\sum \int_{\partial P_i} \omega_2^1 = \sum_\gamma \int_\gamma (\omega_2^1 - \bar{\omega}_2^1);$$

man beachte, dass auf der rechten Seite nun über jede Kante genau einmal integriert wird. Wir versuchen nun, den Integranden in Termen der Winkel zwischen $\dot{\gamma}$, E_1 und $\bar{E}_1$ umzuschreiben. Wir definieren

$$\vartheta = \angle(E_1, \bar{E}_1)$$

als den Winkel zwischen E_1 und $\bar{E}_1$, was wohldefiniert bis auf Vielfache von 2π ist. Wir behaupten nun, dass

$$\omega_2^1 - \bar{\omega}_2^1 = -d\vartheta. \tag{3.7.1}$$

Um dies einzusehen, schreiben wir

$$\begin{aligned} E_1 &= (\cos\vartheta)\bar{E}_1 + (\sin\vartheta)\bar{E}_2 \\ E_2 &= -(\sin\vartheta)\bar{E}_1 + (\cos\vartheta)\bar{E}_2. \end{aligned}$$

(Der Rahmen E_1, E_2 entsteht durch Anwendung einer Drehung um den Winkel ϑ (im Uhrzeigersinn) aus dem Rahmen $\bar{E}_1, \bar{E}_2$, da beide Rahmen dieselbe Orientierung induzieren.)

Es folgt für die zugehörigen Korahmen:

$$\begin{aligned} \omega^1 &= (\cos\vartheta)\bar{\omega}^1 + (\sin\vartheta)\bar{\omega}^2 \\ \omega^2 &= -(\sin\vartheta)\bar{\omega}^1 + (\cos\vartheta)\bar{\omega}^2 \\ \bar{\omega}^1 &= (\cos\vartheta)\omega^1 - (\sin\vartheta)\omega^2 \\ \bar{\omega}^2 &= (\sin\vartheta)\omega^1 + (\cos\vartheta)\omega^2. \end{aligned}$$

Als nächstes bestimmen wir ω_2^1. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} \omega^2 \wedge \omega_2^1 &= d\omega^1 \\ &= d((\cos\vartheta)\bar{\omega}^1 + (\sin\vartheta)\bar{\omega}^2) \\ &= d(\cos\vartheta) \wedge \bar{\omega}^1 + (\cos\vartheta)d\bar{\omega}^1 + d(\sin\vartheta) \wedge \bar{\omega}^2 + (\sin\vartheta)d\bar{\omega}^2 \\ &= d(\cos\vartheta) \wedge ((\cos\vartheta)\omega^1 - (\sin\vartheta)\omega^2) + (\cos\vartheta)\bar{\omega}^2 \wedge \bar{\omega}_2^1 \\ &\qquad + d(\sin\vartheta) \wedge ((\sin\vartheta)\omega^1 + (\cos\vartheta)\omega^2) - (\sin\vartheta)\bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}_2^1 \\ &= ((\cos\vartheta)d(\sin\vartheta) - (\sin\vartheta)d(\cos\vartheta)) \wedge \omega^2 \\ &\qquad + (\cos\vartheta)\bar{\omega}^2 \wedge \bar{\omega}_2^1 - (\sin\vartheta)\bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}_2^1 \\ &= ((\cos\vartheta)d(\sin\vartheta) - (\sin\vartheta)d(\cos\vartheta)) \wedge \omega^2 \\ &\qquad + (\cos\vartheta)((\sin\vartheta)\omega^1 + (\cos\vartheta)\omega^2) \wedge \bar{\omega}_2^1 \\ &\qquad - (\sin\vartheta)((\cos\vartheta)\omega^1 - (\sin\vartheta)\omega^2) \wedge \bar{\omega}_2^1 \\ &= \omega^2 \wedge ((\sin\vartheta)d(\cos\vartheta) - (\cos\vartheta)d(\sin\vartheta) + \bar{\omega}_2^1). \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\omega^1 \wedge \omega_2^1 &= -d\omega^2 \\
&= d((\sin\vartheta)\bar{\omega}^1 - (\cos\vartheta)\bar{\omega}^2) \\
&= d(\sin\vartheta) \wedge \bar{\omega}^1 + (\sin\vartheta)d\bar{\omega}^1 - d(\cos\vartheta) \wedge \bar{\omega}^2 - (\cos\vartheta)d\bar{\omega}^2 \\
&= d(\sin\vartheta) \wedge ((\cos\vartheta)\omega^1 - (\sin\vartheta)\omega^2) + (\sin\vartheta)\bar{\omega}^2 \wedge \bar{\omega}_2^1 \\
&\qquad - d(\cos\vartheta) \wedge ((\sin\vartheta)\omega^1 + (\cos\vartheta)\omega^2) + (\cos\vartheta)\bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}_2^1 \\
&= ((\cos\vartheta)d(\sin\vartheta) - (\sin\vartheta)d(\cos\vartheta)) \wedge \omega^1 \\
&\qquad + (\sin\vartheta)\bar{\omega}^2 \wedge \bar{\omega}_2^1 + (\cos\vartheta)\bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}_2^1 \\
&= ((\cos\vartheta)d(\sin\vartheta) - (\sin\vartheta)d(\cos\vartheta)) \wedge \omega^1 \\
&\qquad + (\sin\vartheta)((\sin\vartheta)\omega^1 + (\cos\vartheta)\omega^2) \wedge \bar{\omega}_2^1 \\
&\qquad + (\cos\vartheta)((\cos\vartheta)\omega^1 - (\sin\vartheta)\omega^2) \wedge \bar{\omega}_2^1 \\
&= \omega^1 \wedge ((\sin\vartheta)d(\cos\vartheta) - (\cos\vartheta)d(\sin\vartheta) + \bar{\omega}_2^1)
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Rechnungen folgern wir

$$\omega_2^1 - \bar{\omega}_2^1 = (\sin\vartheta)d(\cos\vartheta) - (\cos\vartheta)d(\sin\vartheta) = -d\vartheta,$$

d.h. Formel 3.7.1 ist richtig.

Wir parametrisieren nun jede Kante gegen den Uhrzeigersinn (bezüglich der Orientierung) als $t \mapsto \gamma(t)$ und definieren die Winkel

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= \angle(\dot{\gamma}(t), E_1(\gamma(t))) \\
\bar{\theta}(t) &= \angle(\dot{\gamma}(t), \bar{E}_1(\gamma(t))).
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\bar{\theta} = \theta + \vartheta.$$

Ausführlich folgt das aus den Additionstheoremen, da

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma} &= (\cos\theta)E_1 + (\sin\theta)E_2 \\
&= (\cos\theta)((\cos\vartheta)\bar{E}_1 + (\sin\vartheta)\bar{E}_2) + (\sin\theta)(-(\sin\vartheta)\bar{E}_1 + (\cos\vartheta)\bar{E}_2) \\
&= (\cos\theta + \vartheta)\bar{E}_1 + (\sin\theta + \vartheta)\bar{E}_2
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\dot{\gamma} = (\cos\bar{\theta})\bar{E}_1 + (\sin\bar{\theta})\bar{E}_2.$$

Damit rechnen wir nun

$$\begin{aligned}
\int_M K\,d\,\mathrm{vol} &= \sum_\gamma \int_\gamma \omega_2^1 - \bar{\omega}_2^1 \\
&= -\sum_\gamma \int_0^1 d\vartheta(\dot{\gamma}(t))dt \\
&= \sum_\gamma \left(\int_0^1 \dot{\theta}(t)dt - \int_0^1 \dot{\bar{\theta}}(t)dt \right) \\
&= \sum_{\partial P_i} \int_0^1 \dot{\theta}(t)dt,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder über die Ränder aller P_i integrieren, d.h. jede Kante taucht zweimal auf.

Betrachet man nun die Winkelfunktionen θ für sämtliche Kanten eines Polygons P_i hintereinander, so erhält man eine stückweise stetige Funktion, die an den Randpunkten Werte annimmt, die sich genau um 2π unterscheiden. Genauer: definieren wir die Außenwinkel $\theta_{ij} = \angle(\dot\gamma(t^+), \dot\gamma(t^-))$, wobei j über die Ecken von P_i läuft $\dot\gamma(t^-)$ und $\dot\gamma(t^+)$ sind die links- bzw. rechtsseitigen Ableitungen an der Ecke j), so erhalten wir

$$\int_{\partial P_i} \dot\theta(t)dt + \sum_j \theta_{ij} = 2\pi.$$

Betrachten wir nun auch die Innenwinkel $\theta'_{ij} = \pi - \theta_{ij}$, so berechnen wir schlussendlich

$$\begin{aligned}\int_M K d\,\mathrm{vol} &= \sum_i \left(2\pi - \sum_j (\pi - \theta'_{ij})\right) \\ &= 2\pi F - \sum_{i,j} \pi + \sum_{i,j} \theta'_{ij}.\end{aligned}$$

Der mittlere Term ist eine Summe über alle Kanten eines jeden Polygons über den konstanten Term π, d.h. diese Summe ist $-2\pi E$, und die letzte Summe berechnet sich wie folgt: die Summe aller Innenwinkel an einem festen Eckpunkt ist gleich 2π, d.h. die gesamte Summe ist $2\pi V$. Insgesamt erhalten wir also

$$\int_M K d\,\mathrm{vol} = 2\pi(F - E + V) = 2\pi\chi(M).$$

Korollar 3.7.3. *Die Definition der Euler-Charakteristik einer kompakten* 2*-dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit ist unabhängig von der gewählten Triangulierung.*

Ohne Beweis erwähnen wir, dass kompakte 2-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeiten durch ihre Eulercharakteristik bestimmt sind: sie sind diffeomorph zu S^2, T^2 oder einer Fläche vom höheren Geschlecht (d.h. einem Torus mit $g > 1$ Löchern, d.h. einer zusammenhängenden Summe $T^2\# \cdots \# T^2$). Die einzige kompakte orientierbare Fläche mit positiver Eulercharakteristik ist demnach S^2. Es folgt:

Korollar 3.7.4. *Es sei (M, g) eine kompakte* 2*-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver Gauß-Krümmung. Dann ist M diffeomorph zu S^2.*

Bemerkung 3.7.5. *In diesem Korollar können wir natürlich nicht isometrisch schreiben – schließlich können wir beispielsweise die Standardmetrik ein wenig stören, und erhalten eine Metrik mit positiver, aber nicht konstanter Krümmung.*

Aus dem Satz von Gauß-Bonnet folgt, dass der Torus T^2 keine Metrik mit strikt positiver oder strikt negativer Krümmung tragen kann. Dies ist anders für die Flächen von höherem Geschlecht: ohne Beweis erwähnen wir, dass Tori mit g Löchern, $g > 1$, eine Metrik konstanter negativer Schnittkrümmung tragen.

(Man beachte, dass dies vom Satz von Gauß-Bonnet erlaubt wird!) Nach Bemerkung 2.14.8 bedeutet dies, dass die universelle Überlagerung dieser Flächen (mit dieser Metrik) durch den zweidimensionalen hyperbolischen Raum gegeben ist. In der Tat kann man, ähnlich wie im Fall von T^2, siehe Beispiel 2.13.7, eine Metrik konstanter Krümmung auf diesen Flächen so konstruieren, dass man eine geeignete Decktransformationsgruppe, die isometrisch auf H^2 wirkt, vorgibt. Den Torus mit zwei Löchern erhält man beispielsweise, indem man die Kanten eines Achtecks geeignet identifiziert; man muss nun eine Gruppe von Isometrien von H^2 finden, die ein solches Achteck als Fundamentalbereich besitzt, und die Kanten geeignet identifiziert, was nicht trivial ist.

Kapitel 4

Untermannigfaltigkeiten

In diesem kurzen letzten Kapitel betrachten wir folgende Situation: Es sei $f : M \to \overline{M}$ eine Immersion einer Mannigfaltigkeit M mit Dimension n in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $\overline{M}$ der Dimension $n+k$. Bereits in Beispiel 2.1.43. haben wir beschrieben, wie wir mittels f die Riemannsche Metrik auf M zurückziehen können: für $v, w \in T_pM$ setzen wir $\langle v, w\rangle := \langle df_p(v), df_p(w)\rangle$. Dies ist genau die Bedingung, dass f zu einer sogenannten *isometrischen Immersion* wird. (Natürlich i.A. nicht zu einer Isometrie). Wir möchten in diesem Kapitel den Zusammenhang zwischen den Geometrien von M und $\overline{M}$ verstehen. Wir werden in diesem Kapitel rein lokale Betrachtungen anstellen, so dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass f eine Einbettung ist; wir werden M als Teilmenge von $\overline{M}$ auffassen, so dass f die Inklusionsabbildung ist; wir bezeichnen f ab jetzt mit $i : M \to \overline{M}$.

Es sei nun $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+k}$, $\varphi = (x_1, \ldots, x_{n+k})$ eine Untermannigfaltigkeitskarte: $\psi := (x_1, \ldots, x_n) : U \cap M \to \mathbb{R}^n$ ist eine Karte von M. Wir nehmen zusätzlich an, dass $\varphi(U)$ unter der Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ invariant ist; z.B. sei φ so, dass das Bild $\varphi(U)$ ein Quader ist. Mit Hilfe dieser Karte sehen wir, dass wir zu einer gegebenen Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf U eine Fortsetzung der Einschränkung $f|_{U\cap M}$ finden: Wir setzen

$$\overline{f} = f \circ \psi^{-1} \circ \pi \circ \varphi.$$

Ebenso können wir lokale Vektorfelder auf M (hochgradig nicht eindeutig) lokal fortsetzen: Es seien $(\partial_1, \ldots, \partial_{n+k})$ die zu φ assoziierten lokalen Basisfelder. Dann sind die Einschränkungen von $\partial_1, \ldots, \partial_{n+k}$ auf $U \cap M$ die lokalen Basisfelder der Karte ψ von M, und ein gegebenes Vektorfeld X auf $U \cap M$ können wir auf $U \cap M$ in der Form

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \partial_i|_{U\cap M}$$

schreiben. Indem wir die f_i nun, wie oben beschrieben, zu Funktionen $\overline{f}_i$ auf U fortsetzen, erhalten wir über die Zuordnung

$$\overline{X} := \sum_{i=1}^{n} \overline{f}_i \partial_i$$

ein Vektorfeld auf U, das, eingeschränkt auf M, mit X übereinstimmt. Mit anderen Worten (vergleiche Übungsblatt 7, Aufgabe 2):

$$\overline{X} \circ i = di(X),$$

d.h. X und $\overline{X}$ sind i-verwandt.

Wir werden im Folgenden den Levi-Civita-Zusammenhang ∇ von M mit dem Levi-Civita-Zusammenhang $\overline{\nabla}$ von $\overline{M}$ vergleichen. Dafür betrachten wir für einen Punkt $p \in M \subset \overline{M}$ die Zerlegung

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus \nu_pM,$$

wobei $T_pM = di(T_pM)$, und

$$\nu_pM = \{v \in T_p\overline{M} \mid v \perp T_pM\}$$

den *Normalenraum* von M in $\overline{M}$ in p bezeichnet. Man kann zeigen, dass $\nu M := \bigcup_{p\in M} \nu_pM$ die Struktur eines Vektorbündels über M trägt; wir nennen es das *Normalenbündel* von M. Ist $v \in T_p\overline{M}$, so bezeichnen wir mit $v^\top$ und $v^\perp$ den tangentialen bzw. normalen Anteil von v, so dass

$$v = v^\top + v^\perp.$$

Wir betrachten nun zu lokalen Vektorfeldern X und Y auf $U \cap M$ beliebige lokale Fortsetzungen $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ auf U, und zerlegen $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ in den tangentialen und normalen Anteil:

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp. \tag{4.0.1}$$

Wir betrachten zunächst den zweiten Summanden, d.h. den Teil von $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$, der senkrecht zu M steht.

Wir definieren nun die *zweite Fundamentalform* α von M durch

$$\alpha(X,Y)(p) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}_p}\overline{Y})^\perp;$$

α schickt also zwei Vektorfelder auf $U \cap M$, tangential zu M, auf ein Vektorfeld, normal zu M. A priori ist jedoch nicht klar, dass α wohldefiniert ist.

Bemerkung 4.0.6. *Klassisch wurde die Riemannsche Metrik als* erste Fundamentalform *bezeichnet. Obwohl diese Bezeichnung mittlerweile fast ausgestorben ist, ist die Bezeichnung von α als zweite Fundamentalform geblieben. Oft wird sie auch mit dem Symbol II bezeichnet.*

Lemma 4.0.7. *Die zweite Fundamentalform α ist wohldefiniert, symmetrisch in X und Y, und linear über $C^\infty(M)$.*

Beweis. Es seien $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ beliebige Erweiterungen von X bzw. Y. Dann gilt

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X})^\perp = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp = [\overline{X},\overline{Y}]^\perp \tag{4.0.2}$$

Wir wissen nun, dass X und $\overline{X}$, sowie Y und $\overline{Y}$ i-verwandt sind. Nach Übungsaufgabe 2 von Blatt 7 sind damit auch $[X,Y]$ und $[\overline{X},\overline{Y}]$ i-verwandt, d.h.

$$di([X,Y]) = [\overline{X},\overline{Y}] \circ i.$$

Insbesondere ist $[\overline{X},\overline{Y}]$ in Punkten aus M tangential zu M, und (4.0.2) verschwindet in Punkten von M. Es gilt also für alle $p \in M$, dass

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp}(p) = (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X})^{\perp}(p).$$

Der Ausdruck $(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})(p)$ hängt von $\overline{X}$ nur im Punkt p ab. Damit gilt dasselbe für $(\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X})^{\perp}(p)$; die Zuordnung

$$\alpha(v,w) := (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp}(p),$$

wobei $v,w \in T_pM$, und $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ beliebige Erweiterungen auf U von Erweiterungen X und Y von v und w auf $U \cap M$ sind, ergibt also Sinn. (Mit anderen Worten: $\alpha(X,Y) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp}$ ist linear über den C^{∞}-Funktionen.) Für $p \in M$ definiert α nun also eine bilineare Abbildung

$$\alpha : T_pM \times T_pM \to \nu_pM;$$

die Rechnung oben zeigt außerdem, dass α symmetrisch ist, d.h., dass $\alpha(v,w) = \alpha(w,v)$. □

Damit haben wir den normalen Anteil der Zerlegung (4.0.1) untersucht; der folgende Satz beschäftigt sich nun mit der tangentialen Komponente:

Satz 4.0.8 (Gauß-Formel)**.** *Es seien $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ beliebige Erweiterungen von Vektorfeldern X und Y auf M. Dann gilt*

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})(p) = (\nabla_X Y)(p) + (\alpha(X,Y))(p)$$

für alle $p \in M$.

Bemerkung 4.0.9. *Für den Spezialfall einer Untermannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^n$, versehen mit der induzierten Riemannschen Metrik, erhalten wir die wohlbekannte Aussage, dass der Levi-Civita-Zusammenhang auf M durch $\nabla_{X_p}Y = \mathrm{pr}_{T_pM}(dY_p)(X_p)$ gegeben ist. (Vgl. Aufgabe 2, Blatt 8.)*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für jedes $p \in M$ der tangentiale Anteil von $(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})(p)$ durch $\nabla_{X_p}Y$ gegeben ist. Dies geht genauso wie im Beweis der in der Bemerkung erwähnten Übungsaufgabe: man definiert durch $(\nabla^{\top}_X Y)(p) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top}(p)$ einen Zusammenhang auf M, und zeigt, dass er metrisch und torsionsfrei ist. Sämtliche dieser Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen; hier exemplarisch die Torsionsfreiheit:

$$(\nabla^{\top}_X Y)(p) - (\nabla^{\top}_Y X)(p) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X})^{\top}(p) = [\overline{X},\overline{Y}]^{\top}(p) = [X,Y](p).$$

□

Beachten Sie, dass für $p \in M$ gilt, dass $\overline{X}_p \in T_pM$. Der Ausdruck $\overline{\nabla}_{\overline{X}_p}\overline{Y}$ hängt von den Werten von $\overline{Y}$ nur entlang einer Kurve in Richtung $\overline{X}_p$ ab; wählen wir hier eine Kurve in M, so sehen wir, dass die Notation $\overline{\nabla}_X Y$ wohldefiniert ist; wir erhalten die Gaußgleichung

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y).$$

Für ein Vektorfeld Y entlang einer Kurve c in M, das zu jedem Zeitpunkt tangential zu M ist, erhalten wir (ebenfalls analog zur Vorgehensweise bei Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$):

$$\frac{\overline{\nabla}}{dt}Y = \frac{\nabla}{dt}Y + \alpha(\dot{c}, Y). \tag{4.0.3}$$

Daraus sehen wir: wann immer die Kurve c (die ganz in M verläuft), eine Geodätische in $\overline{M}$ ist, dann ist sie ebenfalls eine Geodätische in M. Umgekehrt ist dies jedoch nicht korrekt. Wir definieren:

Definition 4.0.10. *Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \overline{M}$ heißt* totalgeodätisch *in $\overline{M}$, wenn für jeden Punkt $p \in M$ und jeden Vektor $v \in T_pM$ die Geodätische in $\overline{M}$ durch p in Richtung v komplett in M verläuft.*

Die obigen Beobachtungen implizieren:

Satz 4.0.11. *M ist genau dann totalgeodätisch in $\overline{M}$, wenn die zweite Fundamentalform α verschwindet.*

Beweis. Ist die zweite Fundamentalform identisch 0, dann impliziert Gleichung (4.0.3), dass jede Geodätische in M bereits eine Geodätische in $\overline{M}$ ist. Umgekehrt impliziert, dass M totalgeodätisch ist, über dieselbe Gleichung, dass $\alpha(u, u) = 0$ für alle $u \in T_pM$. Da α eine symmetrische Bilinearform ist, bedeutet dies, dass α bereits komplett verschwinden muss. □

Beispiel 4.0.12. *Zusammenhängende, vollständige, totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind affine Unterräume.*

Die zweite Fundamentalform α kann auch benutzt werden, um die kovariante Ableitung von zu M normalen Vektorfeldern zu berechnen: Es seien X und Y lokale Vektorfelder auf M, erweitert zu Vektorfeldern $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ auf $\overline{X}$ und ξ ein lokaler Schnitt von νM, den wir ebenfalls zu einem Vektorfeld $\overline{\xi}$ auf U erweitern können. Wieder gilt, dass der Ausdruck $\overline{\nabla}_{\overline{X}_p}\overline{\xi}$ nur von den Werten von $\overline{\xi}$ entlang einer Kurve in Richtung $\overline{X}_p$ in M abhängt, so dass $\overline{\nabla}_X\xi$ ein wohldefinierter Ausdruck ist.

Satz 4.0.13 (Weingarten-Gleichung)**.** *Es gilt*

$$\langle \overline{\nabla}_X\xi, Y\rangle = -\langle \xi, \alpha(X, Y)\rangle.$$

Beweis. $\langle \xi, Y\rangle$ ist die konstante Nullfunktion auf M. Daher gilt

$$0 = X\langle \xi, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X\xi, Y\rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X\xi, Y\rangle + \langle \xi, \alpha(X, Y)\rangle,$$

da der tangentiale Anteil von $\overline{\nabla}_X Y$ senkrecht zu ξ steht. □

Mit Hilfe der zweiten Fundamentalform können wir nun die Krümmungstensoren R und $\overline{R}$ von M bzw. $\overline{M}$ vergleichen:

Satz 4.0.14 (Gauß-Gleichung)**.** *Für alle $x, y, z, w \in T_pM$ gilt*

$$\langle \overline{R}(x, y)z, w\rangle = \langle R(x, y)z, w\rangle - \langle \alpha(x, w), \alpha(y, z)\rangle + \langle \alpha(x, z), \alpha(y, w)\rangle.$$

Beweis. Wir erweitern die gegebenen Tangentialvektoren zu lokalen Vektorfeldern auf M, die wir mit den entsprechenden Großbuchstaben bezeichnen. Dann gilt mit der Gauß-Formel, Satz 4.0.8:

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z, W\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) - \overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \alpha(X,Z)) \\ &\quad - (\nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X,Y],Z)), W\rangle.\end{aligned}$$

Da die zweite Fundamentalform Werte im Normalenbündel annimmt, verschwindet der allerletzte Summand mit α. Mit Hilfe von Satz 4.0.13, der Weingarten-Gleichung, rechnen wir

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z, W\rangle - \langle \alpha(Y,Z), \alpha(X,W)\rangle \\ &\quad - \langle \overline{\nabla}_Y \nabla_X Z, W\rangle + \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W\rangle.\end{aligned}$$

Wir zerlegen jeden Summanden, der $\overline{\nabla}$ enthält, mit Hilfe der Gauß-Formel in seinen tangentialen sowie normalen Anteil, und sehen, dass nur der tangentiale Anteil überlebt. Es folgt die Behauptung. □

Als Folgerung können wir die Schnittkrümmungen von M und $\overline{M}$ vergleichen. Beispielsweise erhalten wir:

Korollar 4.0.15. *Wir setzen voraus, dass $\overline{M}$ konstante Schnittkrümmung κ besitzt. Dann gilt für eine 2-Ebene $\sigma \subset T_pM$, mit Orthonormalbasis $\{x,y\}$:*

$$K(\sigma) = \kappa + \langle \alpha(x,x), \alpha(y,y)\rangle - ||\alpha(x,y)||^2$$

Ist M also totalgeodätisch in $\overline{M}$, dann hat M ebenfalls konstante Schnittkrümmung κ.

Definition 4.0.16. *Wir definieren den* Weingartenoperator A_ξ *durch*

$$A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Mit Hilfe dieser Definition nimmt die Weingartengleichung folgende Gestalt an:

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \xi, \alpha(X,Y)\rangle. \tag{4.0.4}$$

Insbesondere sehen wir, dass $(A_\xi X)(p)$ nur von den Werten von X und ξ im Punkt p abhängt; wir erhalten, dass der Weingartenoperator für jedes p eine lineare Abbildung $A_\xi : T_pM \to T_pM$ definiert.

Die Symmetrie von α übersetzt sich in die Selbstadjungiertheit von A_ξ:

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \xi, \alpha(X,Y)\rangle = \langle \xi, \alpha(Y,X)\rangle = \langle A_\xi Y, X\rangle.$$

Für jedes $p \in M$ können wir daher eine orthonormale Basis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ aus Eigenvektoren von $A_\xi : T_pM \to T_pM$ finden, mit zugehörigen Eigenwerten λ_i. Die λ_i heißen *Hauptkrümmungen* in Richtung ξ_p, und die u_i *Hauptkrümmungsrichtungen.*

Beispiel 4.0.17. *Es sei M eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$, d.h.* $\dim M = n$. *Es sei γ eine Geodätische in M; dann folgt aus 4.0.3:*

$$\ddot{\gamma} = \alpha(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

Betrachten wir den Fall $S^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, und $p \in S^n(r)$. Es sei $v \in T_pS^n$ mit $||v|| = 1$. Dann ist die eindeutige Geodätische in Richtung v gegeben durch

$$\gamma_v(t) = (\cos(\frac{t}{r})p + r\sin(\frac{t}{r})v),$$

und es gilt $\ddot{\gamma}_v(t) = -\frac{1}{r^2}\cos(\frac{t}{r})p - \frac{1}{r}\sin(\frac{t}{r})v$; damit:

$$\alpha(v, v) = -\frac{1}{r^2}p.$$

Ist nun $\{u, v\}$ eine Orthonormalbasis einer 2-Ebene σ in T_pS^n, dann folgt, da $||u + v|| = \sqrt{2}$, dass $\alpha(v + w, v + w) = -\frac{2}{r^2}p$, so dass

$$\alpha(v, w) = \frac{1}{2}(\alpha(v + w, v + w) - \alpha(v, v) - \alpha(w, w)) = 0.$$

Korollar 4.0.15 besagt also, dass

$$K(\sigma) = 0 + \langle\frac{1}{r^2}p, \frac{1}{r^2}p\rangle = \frac{1}{r^2},$$

wie wir bereits in einer Übungsaufgabe berechnet hatten.

Den Weingartenoperator in Richtung $\frac{1}{r}p$ können wir wie folgt bestimmen: Gleichung (4.0.4) besagt, dass der Weingartenoperator ein Vielfaches der Identität ist; genauer gilt für $\xi = p \in \nu_pS^n$: $A_\xi = -\frac{1}{r}\,\mathrm{id}_{T_pS^n}$.

Bemerkung 4.0.18. *Betrachten wir den Fall einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$, $p \in M$ und $\xi \in \nu_pM$ mit $||\xi|| = 1$. Dann definiert man die* Gauß-Krümmung *in Richtung ξ_p durch*

$$K(p) = \det A_{\xi_p},$$

also als Produkt der beiden Hauptkrümmungen. Nach Definition ist die Gauß-Krümmung eine extrinsische Größe, d.h. sie hängt von der Lage von M im umgebenden Raum $\mathbb{R}^3$ ab. Ein wichtiger Satz der klassischen Differentialgeometrie ist nun Gauß' Theorema egregium (egregium (lat.): ruhmvoll), der besagt, dass $K(p)$ mit der Schnittkrümmung $K(T_pM)$ übereinstimmt, d.h. eine intrinsische Größe von M ist. (Man beachte, dass wir in Aufgabe 3 von Blatt 12 die Gauß-Krümmung als $K(T_pM)$ definiert haben.) Vergleiche [6] für Details.

Literaturverzeichnis

[1] Manfredo P. do Carmo, *Riemannian geometry.* Mathematics: Theory & Applications. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[2] P. H. Doyle, D. D. A. Moran, *A short proof that compact* 2*-manifolds can be triangulated*, Invent. Math. 1968, vol. 5, no. 2, pp. 160–162.

[3] Witold Hurewicz, *Lectures on ordinary differential equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1990.

[4] Detlef Gromoll, Wilhelm Klingenberg und Wolfgang Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen*, Zweite Auflage. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 55. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[5] Michel A. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comment. Math. Helv. **34** (1960), 257–270.

[6] John M. Lee, *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*, Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer-Verlag, New York, 1997.

[7] Joachim Lohkamp, *Metrics of negative Ricci curvature*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), no. 3, 655–683.

[8] John W. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. (2) **64** (1956), 399-405.

[9] Peter Petersen, *Riemannian Geometry*, second edition. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer-Verlag, New York-Berlin, 2006.

[10] Clifford H. Taubes, *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*, J. Differential Geom. **25** (1987), no. 3, 363-430.

[11] Wolfgang Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 7. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[12] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Corrected reprint of the 1971 edition. Graduate Texts in Mathematics, 94. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.