Name(n):

Dozent: Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke

Übungsleiter: Christian Gloy, BSc
Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke
Dr. Immanuel van Santen

Übungsgruppe:

Höhere Analysis

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 9 — Do, 8. Dezember 2016

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x,y,z) := x^2 + xy - y - z, \qquad g(x,y,z) := 2x^2 + 3xy - 2y - 3z$$

Zeigen Sie, dass

$$M := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0\big\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Klasse C^s für jedes $s \in \mathbb{N}$ ist und dass

$$\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(t) = (t, t^2, t^3)$$

eine globale Parameterdarstellung von M ist, d.h. dass $\varphi(\mathbb{R}) = M$ und dass φ eine Immersion und $\varphi : \mathbb{R} \to M$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ jeweils die Menge

$$M_a = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x^2 + y^2 - z^2 = a\big\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ M_a eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie auch die Klasse sowie die Dimension und geben Sie für jeden Punkt $p \in M_a$ eine Parameterdarstellung gemäß Satz 3.1.19 an.

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)

a) Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn für nichtleere offene Mengen $U, V \subset X$ mit $U \cup V = X$ gilt, dass $U \cap V \neq \emptyset$ und wegzusammenhängend, wenn für $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $c : [0,1] \to X$ existiert mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$. Zeigen Sie: Sind X, Y topologische Räume, X zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend) und $\varphi : X \to Y$ stetig, dann ist $\varphi(X)$ auch zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend). Zeigen Sie außerdem: Ist X wegzusammenhängend, dann auch zusammenhängend (Sie dürfen dazu verwenden, dass $[0,1]$ zusammenhängend ist).

b) Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ M_a (mit der Definition aus Beispiel 2) keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie für diese M_a eine kleinste Teilmenge $U \subset M_a$ an, für die $M_a \setminus U$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und begründen Sie, warum das der Fall ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Geben Sie für $n = 1, 2, 3$ Überdeckungen der Untermannigfaltigkeit $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit Kartengebieten und die dazugehörigen Karten an. Was ist die minimale Anzahl von Karten, die man jeweils zu einer Überdeckung von S^n mit Kartengebieten benötigt?

Abgabe bis zum 15.12.2016 um 12:15.