Name(n):

Dozent: Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke

Übungsleiter: Christian Gloy, BSc
Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke
Dr. Immanuel van Santen

Übungsgruppe:

Höhere Analysis

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 7 — Do, 24. November 2016

Aufgabe 1 $(1+3$ Punkte$)$

Für jede Y Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) sei $\mathring{Y}$ der zugehörige offene Kern. Zeigen Sie Lemma 2.2.18:

a) $\mathring{Y}$ ist offen und für jede andere offene Menge Z, die in Y enthalten ist, gilt, dass $Z \subset \mathring{Y}$.

b) Es gibt kompakte Mengen K, sodass $\lambda(K \setminus \mathring{K}) > 0$. Gehen Sie hierbei wie folgt vor:

- Betrachten Sie die kompakten Mengen

$$C_1 = [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{8}, 1]$$
$$C_2 = [0, \frac{1}{4} - \frac{3}{32}] \cup [\frac{1}{4} - \frac{1}{32}, \frac{1}{2} - \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{8}, \frac{3}{4} + \frac{1}{32}] \cup [\frac{3}{4} + \frac{3}{32}, 1]$$

  und definieren Sie induktiv C_{n+1}, indem Sie aus der Mitte der 2^n kompakten Intervalle von C_n jeweils ein offenes Intervall der Länge $2^{-2(n+1)}$ entfernen.

- Zeigen Sie, dass $C = \cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ eine kompakte Menge ist, die $\lambda(C) > 0$ und $\mathring{C} = \emptyset$ erfüllt.

Aufgabe 2 $(3+1$ Punkte$)$

a) Berechnen Sie $\det(d\Pi_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}))$ aus Beispiel 2.2.23 mittels vollständiger Induktion.

b) Nutzen Sie die Transformationsformel, um $\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\})$ für $n = 3$ und $n = 4$ zu berechnen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine Treppenfunktion $\varphi = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{Y_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c_i \in \mathbb{R}$ heißt elementar, wenn jedes $Y_i \subset \mathbb{R}^n$ eine elementare Menge ist. Zeigen Sie: Zu jeder elementaren Treppenfunktion $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine stetige Funktion mit kompakten Träger f, sodass $\|f - \varphi\|_1 < \epsilon$.
Hinweis: Behandeln Sie zunächst denn Fall, dass $\varphi = \chi_Y$ und $Y = [a, b)$ ein halboffenes Intervall ist.

Aufgabe 4 (2 + 1 + 1 Punkte)

In dieser Aufgabe ist $\mathbb{R}^n$ mit der Lebesgue-Algebra $\mathcal{L}$ und dem Lebesgue-Maß λ ausgestattet.

a) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ λ^*-messbar mit $\lambda^*(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass es für jedes $\epsilon > 0$ eine elementare Menge Y gibt, sodass $\lambda^*(X \setminus Y \cup Y \setminus X) < \epsilon$.

b) Zeigen Sie, dass es für jede integrierbare Treppenfunktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine elementare Treppenfunktion ψ gibt, sodass $\|\varphi - \psi\|_1 < \epsilon$.

c) Folgern Sie Lemma 2.2.22 aus den auf diesem Blatt bewiesenen Aussagen.

Abgabe bis zum 1.12.2016 um 12:15.