Name(n):

Übungsgruppe:

Dozent: Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke

Übungsleiter: Christian Gloy, BSc
Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke
Dr. Immanuel van Santen

Höhere Analysis

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 6 Do, 17. November 2016

Aufgabe 1 $(3+1$ Punkte$)$

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $X \in \mathfrak{A}$ und $\sim$ die in Definition 1.6.8 eingeführte Äquivalenzrelation. Seien $f_1, f_2, g_1, g_2 : X \to \mathbb{C}$ messbare Funktionen und $\alpha \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) Sind $f_1 \sim f_2$ und $g_1 \sim g_2$ dann gelten auch $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$, $f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2$ und $\alpha f_1 \sim \alpha f_2$. Folgern Sie, dass $V/\sim$ aus Bemerkung 2.1.3 in natürlicher Weise zu einer Algebra wird.

b) Gilt $f_1 \sim f_2$ dann ist für jedes $p \in [1, \infty)$ die Funktion f_1 genau dann in $\mathcal{L}^p(X)$ enthalten, wenn $f_2 \in \mathcal{L}^p(X)$. In diesem Fall gilt $\|f_1\|_p = \|f_2\|_p$.

Aufgabe 2 $(2+2$ Punkte$)$

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $X \in \mathfrak{A}$.

a) Seien $p, q, r \in [1, \infty)$ derart, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X)$, dann ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^r(X)$ und es gilt

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

b) Seien $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{L}^{p_0}(X) \cap \mathcal{L}^{p_1}(X)$, dann ist $f \in \mathcal{L}^p(X)$ für alle $p \in (p_0, p_1)$ und es gilt die Abschätzung

$$\|f\|_{p_\theta} \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta}$$

für alle $\theta \in (0,1)$, wobei p_θ durch $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ definiert ist.

Aufgabe 3 $(1+1+1+1$ Punkte$)$

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $X \in \mathfrak{A}$. Zeigen Sie:

a) $L^p(X)$ ist für $p \in [1, \infty)$, $p \neq 2$ im Allgemeinen kein Hilbertraum, d.h. die Norm wird nicht durch ein Skalarprodukt induziert. *Hinweis: Parallelogrammgleichung*

b) Ist $\mu(X) < \infty$ und $f : X \to \mathbb{C}$ beschränkt, dann ist $[f] \in L^p(X)$ für alle $p \in [1, \infty)$.

c) Ist $\mu(X) < \infty$ und $1 \leq p < q < \infty$, dann gilt $L^q(X) \subset L^p(X)$.

d) Belegen Sie durch Beispiele: Ist $\mu(X) = \infty$ und $1 \leq p < q < \infty$, dann gilt weder $L^q(X) \subset L^p(X)$ noch $L^p(X) \subset L^q(X)$.

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

Wir betrachten den Raum $C([0,1],\mathbb{C}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$. Aus der Analysis I wissen wir, dass dieser Raum versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_{\text{sup}} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ ein Banachraum ist. Sei $p \in [1,\infty)$ und $i_p : C([0,1],\mathbb{C}) \to L^p([0,1])$ gegeben durch $i_p(f) = [f]$

a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung wohldefiniert, injektiv und stetig (bezüglich der jeweiligen Normen) ist.

b) Sei $X_p = i_p(C([0,1],\mathbb{C})) \subset L^p([0,1])$, versehen mit der Metrik $d_p([f],[g]) = \|[f-g]\|_p$. Zeigen Sie, dass (X_p, d_p) für kein $p \in [1,\infty)$ vollständig ist.

Abgabe bis zum 24.11.2016 um 12:15.