Name(n):

Dozent: Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke

Übungsleiter: Christian Gloy, BSc
Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke
Dr. Immanuel van Santen

Übungsgruppe:

Höhere Analysis

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 5 — Do, 10. November 2016

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\{\Omega_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Megen mit $\Omega_m \subset \Omega_{m+1}$ für $m \in \mathbb{N}$ und $\cup_{m\in\mathbb{N}}\Omega_m = \Omega$. Wenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz und den Satz von der dominierten Konvergenz an, um folgende Aussage zu zeigen: Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, die über jedem Ω_m integrierbar ist und gilt

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\Omega_m} |f| \, d\mu < \infty$$

dann ist f über ganz Ω integrierbar und es gilt

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_{\Omega_m} f \, d\mu.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie: Ist f Lebesgue-integrierbar, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = \lim_{n\to\infty} f(x-n) = 0$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 $(2+2$ Punkte)

a) Zeigen Sie: Die Funktion

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x}, \qquad x \geq 0$$

ist auf $[0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar aber nicht Lebesgue-integrierbar. *Hinweis*: Betrachten Sie die Intervalle, auf denen f konstantes Vorzeichen besitzt.

b) Es sei $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\operatorname{sgn} = \chi_{(0,\infty)} - \chi_{(-\infty,0)}$, wobei χ_A die charakteristische Funktion der Menge A ist. Für welche Parameter $\alpha > 0$ ist die Funktion

$$f_\alpha(x) := \operatorname{sgn}(\sin(x)) \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^\alpha, \qquad x \geq 0$$

auf $[0, \infty)$ uneigentlich Riemann-Integrierbar, für welche Lebesgue-integrierbar?

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

Beweisen Sie:

a) Für jedes $\alpha > 1$ ist die Funktion

$$g_\alpha(x) := \sin(x^\alpha), \qquad x \geq 0$$

auf $[0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar aber nicht Lebesgue-integrierbar.

b) Für jedes $\epsilon > 0$ und $\alpha > 1$ ist die Funktion $x \mapsto e^{-\epsilon x} g_\alpha(x)$ auf $[0, \infty)$ Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{[0,\infty)} e^{-\epsilon x} \sin(x^\alpha) dx = \int_0^\infty \sin(x^\alpha) dx,$$

wobei auf der rechten Seite das uneigentliche Riemann-Integral steht.

Abgabe bis zum 17.11.2016 um 12:15.