Name(n):

Dozent: Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke

Übungsleiter: Christian Gloy, BSc
Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke
Dr. Immanuel van Santen

Übungsgruppe:

Höhere Analysis

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 14 — Do, 26. Januar 2017

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, ω_i eine stetig differenzierbare k_i-Form auf M (mit $i = 1, 2$) und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, dann gelten

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1}\omega_1 \wedge d\omega_2 \qquad d(f \cdot \omega_1) = df \wedge \omega_1 + f \cdot d\omega_1$$

b) Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^{2n}$ die 2-Form $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ wobei hier $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ die Koordinaten auf $\mathbb{R}^{2n}$ bezeichnen. Bestimmen Sie eine 1-form η mit $d\eta = \omega$ und berechnen Sie das n-fache Dachprodukt $\omega \wedge \ldots \wedge \omega$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und den Zylinder $Z \subset \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$Z = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : S^2 \to Z$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2, 0, xy)$ als Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten beliebig oft differenzierbar ist. Berechnen Sie die lokale Darstellung von f in allen Karten von S^2 und Z, die Sie verwenden.

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)

a) Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta).$$

Wir schreiben $(x_1, x_2, x_3) = \Phi(r, \theta, \varphi)$ und betrachten auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ die Differentialformen $\omega_1 = f_1 \mathrm{d}x_1 + f_2 \mathrm{d}x_2 + f_3 \mathrm{d}x_3$ und $\omega_2 = F_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + F_2 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + F_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$. Sei $V = \Phi^{-1}(U)$, $\Phi^*\omega_1 = g_1 \mathrm{d}r + g_2 \mathrm{d}\varphi + g_3 \mathrm{d}\theta$ und $\Phi^*\omega_2 = G_1 \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi + G_2 \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}r + G_3 \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$. Berechnen Sie g_j und G_j für $j = 1, 2, 3$.

b) Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Differentialform

$$\omega = 2x_1x_3 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 - (x_3^2 + \mathrm{e}^{x_1})\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.$$

Zeigen Sie, $\mathrm{d}\omega = 0$, und bestimmen Sie eine 1-Form η mit $\mathrm{d}\eta = \omega$.

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet. Zeigen Sie: Gibt es einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi : U \to G$, dann ist jede stetig differenzierbare geschlossene k-Form auf U exakt.

b) Auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei die 1-Form ω durch

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

gegeben. Zeigen Sie, dass ω auf U keine Stammfunktion besitzt, die Einschränkung von ω auf $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ hingegen schon.

Abgabe bis zum 2.2.2017 um 12:15.