Höhere Analysis

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 14 Do, 26. Januar 2017

Aufgabe 1 $(2 + 2$ Punkte)

a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, ω_i eine stetig differenzierbare k_i-Form auf M (mit $i = 1, 2$) und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, dann gelten

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2 \qquad d(f \cdot \omega_1) = df \wedge \omega_1 + f \cdot d\omega_1$$

b) Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^{2n}$ die 2-Form $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ wobei hier $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ die Koordinaten auf $\mathbb{R}^{2n}$ bezeichnen. Bestimmen Sie eine 1-form η mit $d\eta = \omega$ und berechnen Sie das n-fache Dachprodukt $\omega \wedge \ldots \wedge \omega$.

Lösung: Sei m die Dimension von M. Sei (U, ψ_U) eine Karte, bezüglich der ω_1 und ω_2 die lokalen Darstellungen

$$\omega_1 = \sum_{1 \le i_1 < \ldots i_{k_1} \le m} f_{i_1 \ldots i_{k_1}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k_1}} \qquad \omega_2 = \sum_{1 \le j_1 < \ldots j_{k_2} \le m} \bar{f}_{j_1 \ldots j_{k_2}} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k_2}}$$

besitzen. Dann gilt nach Linearität und der Produktregel

$$\begin{aligned}
d(f\omega_1) &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots i_{k_1} \le m} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}((f \circ \psi_U) \cdot f_{i_1 \ldots i_{k_1}}) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k_1}} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \psi_U) dx_i \wedge \sum_{1 \le i_1 < \ldots i_{k_1} \le m} f_{i_1 \ldots i_{k_1}} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k_1}} \\
&\quad + f \sum_{1 \le i_1 < \ldots i_{k_1} \le m} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(f_{i_1 \ldots i_{k_1}}) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k_1}} \\
&= df \wedge \omega_1 + f \cdot d\omega_1.
\end{aligned}$$

Es hat $\omega_1 \wedge \omega_2$ die lokale Darstellung

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{1 \le i_1 < \ldots i_{k_1} \le m} \sum_{1 \le j_1 < \ldots j_{k_2} \le m} f_{i_1 \ldots i_k} \bar{f}_{j_1 \ldots j_{k_2}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k_1}} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k_2}}$$

Beachten Sie, dass für die Formel der äußeren Ableitung die Reihenfolge der $i_1, \ldots i_{k_1}, j_1, \ldots, j_{k_2}$ unerheblich ist, da ein Ändern der Reihenfolge nur Vorzeichen entstehen lässt. Nun folgt aufgrund der Produktregel

$$
\begin{aligned}
d(\omega_1 \wedge \omega_2) = & \sum_{1\leq i_1<\ldots i_{k_1}\leq m} \sum_{1\leq j_1<\ldots j_{k_2}\leq m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(f_{i_1\ldots i_{k_1}} \cdot \bar{f}_{j_1\ldots j_{k_2}}) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k_1}} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k_2}} \\
= & \sum_{1\leq i_1<\ldots i_{k_1}\leq m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(f_{i_1\ldots i_{k_1}}) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k_1}} \wedge \Big(\sum_{1\leq j_1<\ldots j_{k_2}\leq m} \bar{f}_{j_1\ldots j_{k_2}} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k_2}} \Big) \\
+ & \sum_{1\leq i_1<\ldots i_{k_1}\leq m} \sum_{1\leq j_1<\ldots j_{k_2}\leq m} \sum_{i=1}^{m} f_{i_1\ldots i_{k_1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{f}_{j_1\ldots j_{k_2}}) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k_1}} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k_2}} \\
= & \sum_{1\leq i_1<\ldots i_{k_1}\leq m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(f_{i_1\ldots i_{k_1}}) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k_1}} \wedge \Big(\sum_{1\leq j_1<\ldots j_{k_2}\leq m} \bar{f}_{j_1\ldots j_{k_2}} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k_2}} \Big) \\
+ & (-1)^{k_1} \sum_{1\leq i_1<\ldots i_{k_1}\leq m} f_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k_1}} \wedge \sum_{1\leq j_1<\ldots j_{k_2}\leq m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{f}_{j_1\ldots j_{k_2}}) dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k_2}} \\
= & d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2
\end{aligned}
$$

wobei das Vorzeichen in der vorletzten Zeile durch das k_1-malige Vertauschen von dx_i nach hinten entsteht.
In Teil b) findet man z.B. durch genaues Hinsehen heraus, dass $\eta = \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i$ oder $\eta = -\sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$ die gewünschte Eigenschaft erfüllen. Für das n-fache Dachprodukt gilt zunächst

$$
\omega \wedge \ldots \wedge \omega = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} dx_{i_1} \wedge dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n} \wedge dy_{i_n} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} dx_{\sigma(1)} \wedge dy_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma(n)} \wedge dy_{\sigma(n)}
$$

wobei die zweite Gleichung daraus folgt, dass das Dachprodukt von zwei gleichen 1-formen verschwindet. Durch 4-maliges Vertauschen sieht man $dx_i \wedge dy_i \wedge dx_j \wedge dy_j = dx_j \wedge dy_j \wedge dx_i \wedge dy_i$, was $dx_{\sigma(1)} \wedge dy_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma(n)} \wedge dy_{\sigma(n)} = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n$ impliziert. Insgesamt folgt daher

$$
\omega \wedge \ldots \wedge \omega = n! \cdot dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n.
$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und den Zylinder $Z \subset \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$
Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}.
$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : S^2 \to Z$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2, 0, xy)$ als Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten beliebig oft differenzierbar ist. Berechnen Sie die lokale Darstellung von f in allen Karten von S^2 und Z, die Sie verwenden.

Lösung: Zunächst stellen wir fest, dass f wohldefiniert ist, d.h. $f(S^2) \subset Z$. Des Weiteren gilt $f(S^2) \subset \{(1, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ und diese Teilmenge von Z können wir durch die Karte $\psi : U = (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \to Z$, $(\varphi, z) \mapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi), z)$ abdecken. Außerdem ist $\psi^{-1} : \psi(U) \to U$ durch $(x, y, z) \mapsto (\arctan(y/x), z)$ gegeben. Als Karten von S^2 verwenden wir die sterographischen Projektionen

$$
\varphi_N : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}, \qquad (y_1, y_2) \mapsto \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \frac{2y_2}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right)
$$

$$
\varphi_S : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{S\}, \qquad (y_1, y_2) \mapsto \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \frac{2y_2}{\|y\|^2 + 1}, \frac{1 - \|y\|^2}{\|y\|^2 + 1} \right)
$$

Eine schnelle Rechnung zeigt nun, dass die Funktionen $\psi^{-1} \circ f \circ \phi_N : \mathbb{R}^2 \to U$ und $\psi^{-1} \circ f \circ \phi_S : \mathbb{R}^2 \to U$ beide durch

$$(y_1, y_2) \mapsto \left(0, \frac{4y_1y_2}{(\|y\|^2+1)^2}\right)$$

gegeben sind. Dieser Ausdruck ist offensichtlich beliebig of differenzierbar, daher gilt das auch für f.

Aufgabe 3 $(2+2$ Punkte$)$

a) Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r\cos\theta)\,.$$

Wir schreiben $(x_1, x_2, x_3) = \Phi(r, \theta, \varphi)$ und betrachten auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ die Differentialformen $\omega_1 = f_1 \mathrm{d}x_1 + f_2 \mathrm{d}x_2 + f_3 \mathrm{d}x_3$ und $\omega_2 = F_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + F_2 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + F_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$. Sei $V = \Phi^{-1}(U)$, $\Phi^*\omega_1 = g_1 \mathrm{d}r + g_2 \mathrm{d}\varphi + g_3 \mathrm{d}\theta$ und $\Phi^*\omega_2 = G_1 \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi + G_2 \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}r + G_3 \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$. Berechnen Sie g_j und G_j für $j = 1, 2, 3$.

b) Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Differentialform

$$\omega = 2x_1x_3 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 - (x_3^2 + \mathrm{e}^{x_1})\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.$$

Zeigen Sie, $\mathrm{d}\omega = 0$, und bestimmen Sie eine 1-Form η mit $\mathrm{d}\eta = \omega$.

Lösung:

a) Wir berechnen zunächst

$$\mathrm{D}\Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Für $(r, \theta, \varphi) \in V$ und $(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x} = \Phi(r, \theta, \varphi)$ ergibt sich über

$$(\Phi^*\omega_1)(r, \theta, \varphi)(\mathbf{v}) = \omega_1(x)\left(\mathrm{D}\Phi(\mathbf{v})\right)$$

und

$$\mathrm{d}x_i\left(\mathrm{D}\Phi(\mathbf{v})\right) = \mathrm{d}(x_i \circ \Phi)(\mathbf{v}) = \mathrm{d}\Phi_i(\mathbf{v}),$$

dass

$$\begin{aligned}
&(\Phi^*\omega_1)(r, \theta, \varphi) = \\
&f_1(\mathbf{x}) \cdot (\sin(\theta)\cos(\varphi)\mathrm{d}r + r\cos(\theta)\cos(\varphi)\mathrm{d}\theta - r\sin(\theta)\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi) + \\
&f_2(\mathbf{x}) \cdot (\sin(\theta)\sin(\varphi)\mathrm{d}r + r\cos(\theta)\sin(\varphi)\mathrm{d}\theta + r\sin(\theta)\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi) + \\
&f_3(\mathbf{x}) \cdot (\cos(\theta)\mathrm{d}r - r\sin(\theta)\mathrm{d}\theta)\,.
\end{aligned}$$

Dies liefert dann

$$\begin{aligned}
g_1(r, \theta, \varphi) &= f_1(\mathbf{x})\sin(\theta)\cos(\varphi) + f_2(\mathbf{x})\sin(\theta)\sin(\varphi) + f_3(\mathbf{x})\cos(\theta) \\
g_2(r, \theta, \varphi) &= f_1(\mathbf{x})r\cos(\theta)\cos(\varphi) + f_2(\mathbf{x})r\cos(\theta)\sin(\varphi) - f_3(\mathbf{x})r\sin(\theta) \\
g_3(r, \theta, \varphi) &= -f_1(\mathbf{x})r\sin(\theta)\sin(\varphi) + f_2(\mathbf{x})r\sin(\theta)\cos(\varphi).
\end{aligned}$$

Analoges Vorgehen liefert über $\Phi^*(\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j) = \mathrm{d}\Phi_i \wedge \mathrm{d}\Phi_j$ im zweiten Fall:

$$\begin{aligned}
G_1(r, \theta, \varphi) &= F_1(\mathbf{x})r^2\sin^2(\theta)\cos(\varphi) + F_2(\mathbf{x})r^2\sin^2(\theta)\sin(\varphi) + F_3(\mathbf{x})r^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\
G_2(r, \theta, \varphi) &= F_1(\mathbf{x})r\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\varphi) + F_2(\mathbf{x})r\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(\varphi) - F_3(\mathbf{x})r\sin^2(\theta) \\
G_3(r, \theta, \varphi) &= -F_1(\mathbf{x})r\sin(\varphi) + F_2(\mathbf{x})r\cos(\varphi).
\end{aligned}$$

Nun kann man noch $f_i(\mathbf{x}) = f_i(\Phi(r, \theta, \varphi))$ und $F_i(\mathbf{x}) = F_i(\Phi(r, \theta, \varphi))$ für $i = 1, 2, 3$ schreiben.

b) Wir berechnen unter Verwendung von $\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$:

$$\mathrm{d}\omega = 2x_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - 2x_3 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = 0.$$

Integration nach x_1 liefert

$$\eta = -x_1 \mathrm{d}x_3 - \left(x_3^2 x_1 + \mathrm{e}^{x_1}\right) \mathrm{d}x_2 + C(x_2, x_3) \mathrm{d}x_2.$$

Dann ist

$$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 - \left(x_3^2 + \mathrm{e}^{x_1}\right) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + 2x_1 x_3 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - \frac{\partial C}{\partial x_3} \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3,$$

d. h. $C = \mathrm{const.}$

Um die Wichtigkeit der Funktion C zu sehen, stellen wir uns vor, wir hätten zunächst nach x_3 integriert:

$$\eta = -x_1 x_3^2 \mathrm{d}x_2 + x_3 \mathrm{d}x_1 + C(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1.$$

Dann ist

$$\mathrm{d}\eta = -x_3^2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 - 2x_1 x_3 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial C}{\partial x_2} \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1.$$

Also muss

$$\frac{\partial C}{\partial x_2} = \mathrm{e}^{x_1}$$

gelten und somit $C(x_1, x_2) = x_2 \mathrm{e}^{x_1} + \mathrm{const.}$

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet. Zeigen Sie: Gibt es einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi : U \to G$, dann ist jede stetig differenzierbare geschlossene k-Form auf U exakt.

b) Auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei die 1-Form ω durch

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

gegeben. Zeigen Sie, dass ω auf U keine Stammfunktion besitzt, die Einschränkung von ω auf $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ hingegen schon.

Lösung: Sei ω eine geschlossene k-Form auf U. Sei $\psi = \varphi^{-1}$. Dann ist $\psi^*\omega$ eine geschlossene k-Form auf U, denn $d(\psi^*\omega) = \psi^* d\omega = \psi^* 0 = 0$ nach Satz 4.3.28 (iii). Nach Satz 4.3.31 existiert eine stetig differenzierbare $k-1$ form η auf G mit $d\eta = \psi^*\omega$. Dann ist $\varphi^*\eta$ eine stetig differenzierbare $k-1$-Form auf G und es gilt $d(\varphi^*\eta) = \varphi^* d\eta = \varphi^*\psi^*\omega = (\psi \circ \varphi)^*\omega = (id_U)^*\omega = \omega$. Damit ist a) gezeigt.

Um b) zu zeigen, betrachten wir die geschlossene Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to U$, gegeben durch $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. In Beispiel 4.2.19 wurde gezeigt, dass $\int_\gamma \omega = 2\pi$. Daher kann ω nicht Differential einer Funktion sein, da sonst $\int_\gamma \omega = 0$ wäre, siehe Korollar 4.2.18. Andererseits ist ω auf W exakt, da W sternförmig um $x_0 = (1, 0) \in U$ ist: Ist $(x, y) \in W$, dann ist auch $(1, 0) + t(x - 1, y - 0) \in W$ für $t \in [0, 1]$, denn $t \cdot y \neq 0$ für $t > 0$, falls $y \neq 0$; und $1 + t(x - 1) > 0$ für $t \in [0, 1]$ falls $y = 0$, da dann $x > 0$ gelten muss.