Name(n):

Dozent: Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke

Übungsleiter: Christian Gloy, BSc
Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke
Dr. Immanuel van Santen

Übungsgruppe:

Höhere Analysis

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 13 — Do, 19. Januar 2017

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension k und $U \subset M$ ein Gebiet, dann gibt es für je zwei Punkte $x, y \in U$ eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to U$, sodass $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

Aufgabe 2 $(2 + 2$ Punkte$)$

Es sei $M = \mathbb{R}^3$ als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ aufgefasst. Sei die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\gamma(t) = (e^{t\sin(t)}, t^2 - 2\pi t, \cos(t/2))$. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_\gamma (xdx + ydy + zdz), \qquad \int_\gamma zdy,$$

wobei wir mit x, y, z die Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^3$ bezeichnen.

Aufgabe 3 $(2 + 2$ Punkte$)$

Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [a, b] \to M$ ein stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg und ω eine stetige Pfaff'sche Form auf M. Die Länge von γ ist definiert als

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\gamma'(t)\right\| dt$$

wobei die Unterteilungspunkte $a = t_0 < \dots t_m = b$ derart sind, dass $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ stetig differenzierbar ist. Des Weiteren definieren wir für ω eine Funktion $\|w\| : M \to \mathbb{R}$ als

$$\|w\|(x) = \sup_{\substack{v \in T_xM \\ \|v\|=1}} w(x)(v).$$

a) Zeigen Sie, dass die Länge parametrisierungsinvariant ist, d.h. $L(\gamma \circ \tau) = L(\gamma)$ für jeden Diffeomorphismus $\tau : [c, d] \to [a, b]$.

b) Zeigen Sie: Für das Integral von ω längs γ gilt die Abschätzung

$$\int_\gamma \omega \le L(\gamma) \cdot \sup_{t \in [a,b]} \|w\|(\gamma(t)).$$

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

Es sei $M = \mathbb{R}^3$ als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ aufgefasst. Seien $r, c > 0$ und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ct)$ (man nennt diese Kurve Schraubenlinie). Berechnen Sie die Integrale

$$\int_\gamma ((x^2 - y^2)dx + 3zdy + 4xydz), \qquad \int_\gamma (x^4 dx + y^4 dy + z^4 dz),$$

wobei wir mit x, y, z die Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^3$ bezeichnen.