Name(n):

Dozent: Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke

Übungsleiter: Christian Gloy, BSc
Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke
Dr. Immanuel van Santen

Übungsgruppe:

Höhere Analysis

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 11 — Do, 22. Dezember 2016

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

a) Auf der 2-Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sei die Funktion $f : S^2 \to \mathbb{R}$ gegeben als $f(x, y, z) = z^2$. Berechnen Sie $\int_{S^2} f dS$.

b) Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ der Dimensionen k bzw. l mit mit $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Zeigen Sie: Ist $k + l \geq n$ und $N_x M_1 \cap N_x M_2 = \{0\}$ für alle $x \in M_1 \cap M_2$ (man sagt: M_1 und M_2 schneiden sich transversal), dann ist $M_1 \cap M_2$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Dimension.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$. Betrachten Sie die Mengen $K_r^p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p \leq r \right\}$. Zeigen Sie, dass K_r^p für jedes $r > 0$ und $p > 1$ ein Kompaktum mit glattem Rand ist und bestimmen Sie für jedes $x \in \partial K_r^p$ Tangentialraum, Normalenraum und äußere Normale von ∂K_r^p in x.

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)

a) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{1-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{falls } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

aus $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ist, d. h. f ist unendlich oft differenzierbar und hat kompakten Träger.

b) Die Funktion $G(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - k)$ ist unendlich oft differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $G(x) \neq 0$, genauer gilt $G(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $e^{-\frac{1}{3}} \leq G \leq 2$.

Aufgabe 4 (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

a) Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $g(x) = \frac{f(x)}{G(x)}$. Zeigen Sie: $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq g \leq 1$ und $\operatorname{supp} g = [-1, 1]$.

b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) = 1$.

c) Für $\epsilon > 0$ und $b \in \epsilon\mathbb{Z}^n$ setzen wir

$$\sigma_{b,\epsilon} = \prod_{\nu=1}^{n} g\left(\frac{x_\nu - b_\nu}{\epsilon}\right).$$

Dann gilt $0 \leq \sigma_{b,\epsilon} \leq 1$ und $\operatorname{supp} \sigma_{b,\epsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - b\|_\infty \leq \epsilon\}$.

d) Zeigen Sie, dass $\sum_{b \in \epsilon\mathbb{Z}^n} \sigma_{b,\epsilon}(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und dass jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt, dass $\operatorname{supp} \sigma_{b,\epsilon} \cap K \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $b \in \epsilon\mathbb{Z}$.

Aufgabe 5 (6 Bonuspunkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von Dimension k. Zeigen Sie: Ist $k < n$, dann ist M eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$. Ist M Borel-Messbar?

Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Abgabe bis zum 12.1.2017 um 12:15.