Name(n):

Dozent: Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke

Übungsleiter: Christian Gloy, BSc
Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke
Dr. Immanuel van Santen

Übungsgruppe:

Höhere Analysis

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 10 Do, 15. Dezember 2016

Aufgabe 1 $(2+2$ Punkte$)$

a) Sei $M_1 \subset \mathbb{R}^m$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ und $M_2 \subset \mathbb{R}^n$ eine l-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$ ist und bestimmen Sie die Dimension.

b) Seien $A \subset M_1$ und $B \subset M_2$ integrierbare Teilmengen (d.h. χ_A und χ_B sind integrierbare Funktionen auf M_1 bzw. M_2). Zeigen Sie, dass $A \times B$ eine integrierbare Teilmenge von $M \times N$ ist und dass $\operatorname{vol}(A \times B) = \operatorname{vol}(A) \cdot \operatorname{vol}(B)$ gilt.

Aufgabe 2 $(2+2$ Punkte$)$

Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) $\mathfrak{A} = \{A \subset M \mid \chi_A : M \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}$ ist eine σ-Algebra und $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$, $\mu(A) := \operatorname{vol}(A)$ ist ein Maß auf $\mathfrak{A}$. $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ wird damit zu einem Maßraum.

b) Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar bezüglich des Maßraumes $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ (Definition 1.6.2) wenn Sie integrierbar im Sinne von Definition 3.2.15 ist und die beiden Definitionen des Integrals stimmen überein.

Aufgabe 3 $(1+1+1+1$ Punkte$)$

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem offenen Intervall I definierte stetig differenzierbare Funktion ohne Nullstellen.

a) Zeigen Sie, dass $M_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = (f(x))^2, x \in I\right\}$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Geben Sie eine Karte (U, φ_U) an, die ganz M_f bis auf eine Nullmenge (im Sinne des Maßraumes in Aufgabe 2) abdeckt. (*Hinweis: Spezielle M_f wurden schon in Aufgabe 2 auf Blatt 9 untersucht.*)

c) Berechnen Sie die Gram'sche Determinante dieser Karte und geben Sie eine Formel für $\operatorname{vol}(M_f)$ an.

d) Geben Sie ein Beispiel für eine Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^3$ an, die unbeschränkt ist (d.h. es existieren Punkte $x_i \in M \subset \mathbb{R}^3$, $i \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{i\to\infty} \|x_i\| = \infty$) aber $\operatorname{vol}(M) < \infty$ erfüllt.

Aufgabe 4 $(2+2$ Punkte$)$

a) Berechnen Sie die Oberfläche $\operatorname{vol}(S^n)$ der Sphären $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ für $n = 1, 2, 3$.

b) Geben Sie einen Zusammenhang zwischen der Oberfläche der Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und dem Volumen von $B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ an. (*Hinweis: Polarkoordinaten*)

Abgabe bis zum 22.12.2016 um 12:15.