Name(n):

Dozent: Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke

Übungsleiter: Christian Gloy, BSc
Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke
Dr. Immanuel van Santen

Übungsgruppe:

Höhere Analysis

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 1 — Mo. 17. Oktober 2016

Aufgabe 1 $(1 + 2 + 1$ Punkte$)$

a) Beweisen Sie: Ist $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ring und sind $X, Y \in \mathfrak{R}$, so gilt auch $X \cap Y \in \mathfrak{R}$.

b) Beweisen Sie: $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann eine Algebra, wenn gilt:

1. $\Omega \in \mathfrak{A}$,
2. $X \in \mathfrak{A}$ impliziert $X^c \in \mathfrak{A}$ und
3. mit $X, Y \in \mathfrak{A}$ ist auch $X \cup Y \in \mathfrak{A}$.

c) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 1.18, indem Sie zeigen: Ist $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein σ-Ring und sind $X_n \in \mathfrak{A}$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $\cap_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathfrak{A}$.

Aufgabe 2 $(1 + 1 + 1 + 1$ Punkte$)$

Zeigen Sie folgende Aussagen bzw. beantworten Sie folgende Fragen:

a) $\mathfrak{A} = \{A \subset \Omega \mid A$ oder A^c endlich$\}$ ist eine Algebra.

b) Ist $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω, Ω_1 eine weitere Menge und $\phi : \Omega_1 \mapsto \Omega$ eine Abbildung. Dann ist $\mathfrak{A}_1 = \left\{\phi^{-1}(A) \mid A \in \mathfrak{A}\right\}$ eine σ-Algebra auf Ω_1.

c) Sei $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra, Ω_2 eine weitere Menge und $\psi : \Omega \mapsto \Omega_2$ eine Abbildung. Ist dann $\mathfrak{A}_2 = \{\psi(A) \mid A \in \mathfrak{A}\}$ eine σ-Algebra auf Ω_2? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Sei Ω eine nichtleere Menge, $a \in \Omega$ und $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\epsilon_a : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$, gegeben durch

$$\epsilon_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in A \\ 0, & \text{falls } a \notin A \end{cases}$$

ein Maß auf $\mathfrak{A}$ ist.

Abgabe bis zum 20.10.2016 um 12:15