Mathematik II für Studierende der Informatik

Mathias Schacht

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

SoSe 2025

Stand: 10. Juli 2025

Teil 2 - Analysis

5. Reelle Zahlen, Folgen & Konvergenz

Axiome der reellen Zahlen

Die Menge der $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen erfüllt die folgende Axiome:

(*a*) $\mathbb{R}$ zusammen mit der Addition und Multiplikation ist ein Körper

(*b*) $\mathbb{R}$ ist mit $<$ ein angeordneter Körper, d. h. für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

- (*O1*) es gilt genau eine der Relationen $x < y$, $x = y$, oder $x > y$
- (*O2*) $<$ is transitiv
- (*O3*) $x < y \Longrightarrow x + z < y + z$
- (*O4*) $x < y$ und $z > 0 \Longrightarrow xz < yz$

(*c*) $\mathbb{R}$ ist vollständig, d. h. für alle nichtleeren $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ mit $x < y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ existiert $z \in \mathbb{R}$, so dass $x \leqslant z \leqslant y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

(*d*) $\mathbb{R}$ ist ARCHIMEDISCH, d. h. für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \leqslant n$.

Bemerkungen:

- durch die Axiome ist $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt
- endliche Körper und $\mathbb{C}$ können nicht angeordnet sind
- $\mathbb{Q}$ ist angeordnet und archimedisch, aber nicht vollständig, z. B. die Mengen
$$X = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \quad \text{und} \quad Y = \{y \in \mathbb{Q} : y^2 > 2\}$$
können durch keine rationale Zahl „separiert“ werden
- es gibt angeordnete Körper die nicht archimedisch sind
- archimedisch folgt aus Vollständigkeit und somit ist dieses Axiom redundant
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ordnungserhaltend

Konsequenzen aus den Ordnungsaxiomen

(*O1*) es gilt genau eine der Relationen $x < y$, $x = y$, oder $x > y$
(*O2*) $<$ is transitiv
(*O3*) $x < y \implies x + z < y + z$
(*O4*) $x < y$ und $z > 0 \implies xz < yz$

Lemma

Für alle $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ gilt:
(*1*) $x < y$ und $z < w \implies x + z < y + w$
(*2*) $x < y$ und $0 > z \implies xz > yz$
(*3*) $0 < 1$
(*4*) $0 < x < y \implies 0 < y^{-1} < x^{-1}$
(*5*) für alle $x, y > 0$ gilt: $x < y \iff x^2 < y^2$.

Beweis:
(*1*) Annahmen und (*O3*) ergeben $x+z < y+z$ und $z+y < w+y$ ✓
(*2*) mit (*O3*) folgt $-z > 0$ und (*O4*) ergibt $-xz < -yz$ und (*2*) folgt aus (*O3*) ✓
(*3*) Körper $\implies 0 \neq 1$. Falls $1 < 0$, dann gilt $1 \cdot 1 > 0 \cdot 1$ nach (*2*)
und somit erhalten wir den Widerspruch $1 > 0$ ↯ ✓
(*4*) (*O4*) $\implies 0 < xy$; (*3*) $\Rightarrow 0 < (xy)^{-1}$ und (*O4*) mit $0 < x < y$ ergibt (*4*) ✓
(*5*) „$\Rightarrow$“ Annahme multipliziert mit x bzw. y ergibt mit (*O4*) $x^2 < xy = xy < y^2$ ✓
„$\Leftarrow$“ $x^2 < y^2 \implies x \neq y$ und die Annahme $y < x$ führt nach dem ersten Teil („$\Rightarrow$“)
zum Widerspruch $y^2 < x^2$ □

Bemerkung: Rechenregeln von $<$ übertragen sich auf natürliche Weise auf $\leqslant$

Intervalle

Für Endpunkte $x \leqslant y$ definieren wir folgende Intervalle:

$$[x,y] := \{z \in \mathbb{R} \colon x \leqslant z \leqslant y\}\,,$$
$$(x,y) := \{z \in \mathbb{R} \colon x < z < y\}\,,$$
$$[x,y) := \{z \in \mathbb{R} \colon x \leqslant z < y\}\,,$$
$$(x,y] := \{z \in \mathbb{R} \colon x < z \leqslant y\}\,.$$

Dabei heißt $[x,y]$ abgeschlossenes Intervall, (x,y) offenes Intervall und $(x,y]$ und $[x,y)$ halboffene Intervalle.

Wir betrachten auch unendliche/unbeschränkte Intervalle

$$(-\infty,y] := \{z \in \mathbb{R} \colon z \leqslant y\}\,,$$
$$(-\infty,y) := \{z \in \mathbb{R} \colon z < y\}\,,$$
$$[x,\infty) := \{z \in \mathbb{R} \colon x \leqslant z\}\,,$$
$$(x,\infty) := \{z \in \mathbb{R} \colon x < z\}\,,$$
$$(-\infty,\infty) := \mathbb{R}\,.$$

Betrag und Abstand

Wir erinnern an die Definition des Betrages einer reellen Zahl, der dem natürlichen Abstand zu 0 angibt:

$$|x| := \begin{cases} x\,, & \text{falls } x \geqslant 0\,, \\ -x\,, & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Satz (Rechenregeln des Betrags)

Für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $|x| \geqslant 0$ und $|x| = 0 \iff x = 0$ (positiv definit)

(b) $|xy| = |x| \cdot |y|$ (homogen)
insbesondere falls $y \neq 0$, dann gilt $|xy^{-1}| = |x||y^{-1}|$

(c) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

(d) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$ ($|x - y|$ heißt Abstand zwischen x und y)

Beweis: Jeweils die Definition von $|\cdot|$ einsetzen und alle entsprechenden Fallunterscheidungen $x \geqslant 0$ bzw. $x < 0$ usw. „durchspielen." $\square$

Bemerkung: Mit Induktion lässt sich die Dreiecksungleichung auf $\left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |x_i|$ für $k > 2$ verallgemeinern.

Rechenregeln für den Abstand $|x - y|$

Satz

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $|x - y| \geqslant 0$ und $|x - y| = 0 \iff x = y$ (positiv definit)

(b) $|x - y| = |y - x|$ (symmetrisch)

(c) $|x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis:

(a) Der Betrag (und somit auch der Abstand) ist nicht-negativ. Die positive Definitheit des Betrages besagt

$$|x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y\,. \qquad \checkmark$$

(b) Die Homogenität des Betrages impliziert

$$|x - y| = 1 \cdot |x - y| = |-1| \cdot |x - y| = |(-1) \cdot (x - y)| = |y - x|\,. \quad \checkmark$$

(c) Folgt aus der Dreiecksungleichung des Betrages durch

$$|x - z| = |x - y + y - z| \leqslant |x - y| + |y - z|\,. \qquad \square$$

Folgen

Definition

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung $\boldsymbol{a}\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkungen:

- Anstelle von $\boldsymbol{a}(n)$ schreibt man in diesem Zusammenhang oft a_n.
- Für die Folge schreiben wir auch $(a_1, a_2, \dots)$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder einfach (a_n).
- Oftmals werden Folgen auch mit unendlichen Teilmengen aus $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$ oder mit unendlichen Teilmengen aus $\mathbb{Z}$ mit einem kleinsten Element indiziert.

Beispiele:

- Folge mit Gliedern $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$ und so weiter, d. h.

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{bzw.} \qquad \left(n^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

- $a_1 = 1^2$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^2$ und so weiter entspricht $a_n = n^2$
- Folge $(-1, 3, -1, 3, \dots)$ mit $a_n = -1$ für n ungerade und 3 sonst
- Folge $(2, -2, 2, -2, \dots)$ ist gegeben durch $((-1)^n \cdot 2)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Konvergenz

Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen eine Zahl a, falls es für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geqslant n_\varepsilon$ die Ungleichung

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

gilt.

Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, so schreiben wir

$$a_n \longrightarrow a$$

für $n \longrightarrow \infty$ oder einfach $a_n \longrightarrow a$ oder

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = a\,.$$

Wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \longrightarrow a$ gibt, so ist die Folge (a_n) konvergent.

Falls kein solches $a \in \mathbb{R}$ existiert, so ist die Folge divergent.

Beispiel: $a_n = n^{-1}$

Da für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ die Ungleichung $n^{-1} > m^{-1}$ gilt, nähert sich Folge $(n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ immer weiter an 0 an.

Daher vermuten wir $a_n \longrightarrow 0$.

Um das nachzuweisen, müssen wir zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geqslant n_\varepsilon$ die Ungleichung

$$\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

gilt.
Wegen der Archimedischen Eigenschaft existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon^{-1} < n_\varepsilon$. Für alle $n > n_\varepsilon$ gilt ebenfalls $\varepsilon^{-1} < n$. Das Bilden der Kehrwerte liefert nun

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

für alle $n \geqslant n_\varepsilon$ und somit folgt $a_n \longrightarrow 0$.

Beispiel: $a_n = \frac{n-1}{n}$

Wir behaupten $a_n \longrightarrow 1$.

Es gilt nämlich

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n}\right| = \left|\frac{-1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

und nach dem vorigen Beispiel gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geqslant n_\varepsilon$ die Ungleichung $\frac{1}{n} < \varepsilon$ gilt. In diesem Fall gilt also

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

für alle $n \geqslant n_\varepsilon$ und damit konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1.

Divergente Beispiele

$a_n = n$

Die Folge mit den Gliedern $a_n = n$ divergiert. Sei nämlich $\varepsilon = 1$. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a \leqslant a_{n_0} = n_0$. Für alle $n > n_0$ ist a_n mindestens $a_{n_0} + 1$. Damit gilt für unendlich viele n die Ungleichung $|a_n - a| \geqslant 1$. Also konvergiert (a_n) nicht gegen a und da a beliebig war, ist die Folge divergent.

$(-1, 3, -1, 3, -1, 3, \dots)$

Sei $\varepsilon = 1$ und $a \in \mathbb{R}$.

Nach der Dreiecksungleichung muss einer der beiden Abstände $|(-1) - a|$ und $|a - 3|$ mindestens $\frac{1}{2}|-1-3| = 2$ sein.

Damit gibt es unendlich viele n mit $|a - a_n| > 1$. und die Folge konvergiert nicht gegen a.

Bemerkung: Qualitativ unterscheiden sich die beiden divergenten Folgen. Die erste Folge ist unbeschränkt und monoton, während die zweite oszilliert.

Bestimmte Divergenz

Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen divergiert bestimmt gegen ∞ (bzw. $-\infty$), falls für alle $R \in \mathbb{R}$ ein $n_R \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geqslant n_R$ die Ungleichung $a_n > R$ (bzw. $a_n < R$) gilt.

- Falls eine divergente Folge nicht bestimmt divergiert, so divergiert sie unbestimmt.
- Falls (a_n) bestimmt gegen ∞ divergiert, so schreiben wir

$$a_n \longrightarrow \infty \quad \text{für } n \longrightarrow \infty\,.$$

- Falls (a_n) bestimmt gegen $-\infty$ divergiert, so schreiben wir

$$a_n \longrightarrow -\infty \quad \text{für } n \longrightarrow \infty\,.$$

Eindeutigkeit von Grenzwerten

Lemma

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Seien a, $b \in \mathbb{R}$ verschieden beides Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da a und b verschieden sind, ist $d = |a - b| > 0$. Sei

$$\varepsilon = \frac{d}{2}\,.$$

Wegen $a_n \longrightarrow a$ und $a_n \longrightarrow b$ existieren n_0 und $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geqslant n_0$ und alle $m \geqslant m_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad |a_m - b| < \varepsilon\,.$$

Sei nun n größer als das Maximum von n_0 und m_0. Dann gilt gleichzeitig $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|a_n - b| < \varepsilon$. Also ist

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leqslant |a - a_n| + |b - a_n| < 2\varepsilon = |a - b|\,,$$

ein Widerspruch. □

Bemerkung: Damit ist die Schreibweise $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = a$ gerechtfertigt.

Nullfolgen

Satz

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n \longrightarrow \infty$ genau dann, wenn $a_n^{-1} \longrightarrow 0$ gilt.

Beweis: Es gelte $a_n \longrightarrow \infty$ und sei $\varepsilon > 0$. Da $a_n \longrightarrow \infty$ gilt, existiert für $R = \varepsilon^{-1}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geqslant n_0$ die Ungleichung $a_n > R = \varepsilon^{-1}$ gilt. Es folgt

$$\frac{1}{a_n} < \frac{1}{R} = \varepsilon$$

für alle $n \geqslant n_0$ und somit gilt $a_n^{-1} \longrightarrow 0$. ✓
Umgekehrt gelte $a_n^{-1} \longrightarrow 0$ und sei $R \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir können $R > 0$ annehmen und setzen $\varepsilon = R^{-1}$. Es existiert also $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geqslant n_0$ die Ungleichung $a_n^{-1} = |a_n^{-1} - 0| < \varepsilon$ gilt.

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon} = R$$

und $a_n \longrightarrow \infty$ folgt. □

Bemerkungen:

- Folgen die gegen 0 konvergieren heißen Nullfolgen
- man sieht leicht ein: $(a_n) \longrightarrow 0$ genau dann, wenn $(|a_n|) \longrightarrow 0$

Potenzen reeller Zahlen — Folge (c^n)

Wir unterscheiden mehrere Fälle abhängig vom Wert von $c \in \mathbb{R}$.

1. Fall ($c > 1$): In diesem Fall ist $c = 1 + b$ für ein $b > 0$. Wir zeigen $c^n \longrightarrow \infty$ und hierzu sei $R > 0$ beliebig. Setze $n_0 \geqslant \frac{R}{b}$. Dann gilt für alle $n \geqslant n_0$ mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes

$$c^n = (1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k = 1 + nb + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} b^k > nb \geqslant n_0 b \geqslant \frac{R}{b} \cdot b = R\,.$$

Also gilt $c^n \longrightarrow \infty$. ✓

2. Fall ($c = 1$): Folge (c^n) ist die konstante Folge $(1, 1, 1, \dots)$ und somit $c^n \longrightarrow 1$. ✓

3. Fall ($0 < c < 1$): In diesem Fall gilt $c^n \longrightarrow 0$. Hierzu sei $d = c^{-1}$. Wegen $0 < c < 1$ gilt $d > 1$, und damit nach dem ersten Fall $d^n \longrightarrow \infty$ und somit $d^{-n} = c^n \longrightarrow 0$. ✓

4. Fall ($c = 0$): Folge (c^n) ist konstant und konvergiert gegen 0. ✓

5. Fall ($-1 < c < 0$): Die Nullfolgeneigenschaft im 3. Fall besagt nun $|c^n| \longrightarrow 0$ und somit folgt auch hier $c^n \longrightarrow 0$. ✓

6. Fall ($c = -1$): Die Folge $(c_n) = (1, -1, 1, -1 \dots)$ oszilliert und ist divergent. ✓

7. Fall ($c < -1$): Aus dem 1. Fall folgt nun $|c^n|$ divergiert bestimmt gegen ∞. Für $c < -1$ wechselt aber jeweils das Vorzeichen und ist die Folge divergent. ✓

Beispiel $\frac{c^n}{n!}$

Wir zeigen für jedes feste $c \in \mathbb{R}$ ist $\left(\frac{c^n}{n!}\right)$ eine Nullfolge.

Für $\varepsilon > 0$ wählen wir erst

$$n_0 \geqslant |c|$$

und dann $n_\varepsilon \geqslant n_0$ groß genug, so dass

$$n_\varepsilon > \frac{|c|^{n_0+1}}{n_0! \cdot \varepsilon}$$

gilt. Insbesondere, gilt $|c|/n_0 \leqslant 1$ und für $n \geqslant n_\varepsilon$ erhalten wir

$$\left|\frac{c^n}{n!}\right| = \frac{|c|^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{|c|}{n_0+1} \cdot \frac{|c|}{n_0+2} \cdots \frac{|c|}{n} \leqslant \frac{|c|^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{|c|}{n} \leqslant \frac{|c|^{n_0+1}}{n_0!} \cdot \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon\,,$$

wegen der Wahl von n_ε und $\left(\frac{c^n}{n!}\right) \longrightarrow 0$ folgt. ✓

Beispiel $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

Die ersten Folgeglieder sind

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 2{,}25 \\ a_3 &= 2{,}\overline{370} \\ a_4 &= 2{,}44140625 \\ &\vdots \\ a_{10} &= 2{,}5937424601 \\ &\vdots \\ a_{100} &= 2{,}7048138294\ldots \\ &\vdots \\ a_{1000000} &= 2{,}7182804693\ldots \end{aligned}$$

und um das Konvergenzverhalten zu analysieren brauchen wir mehr Theorie.

Beschränktheit, Supremum und Infimum

Definition

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ reeller Zahlen heißt nach oben beschränkt, falls es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in X$ die Ungleichung $x \leqslant s$ gilt.

- Ist X durch s nach oben beschränkt, so ist s eine obere Schranke von X.
- Entsprechend definieren Beschränktheit nach unten und untere Schranken.
- Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls X sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt ist. In diesem Fall gibt es ein $s \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in X$ die Ungleichung $|x| \leqslant s$ gilt.
- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt nach oben, bzw. nach unten beschränkt, falls die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ der Folgenglieder nach oben bzw. nach unten beschränkt ist.

Definition

Ist s eine obere Schranke von $X \subseteq \mathbb{R}$ und gibt es kein $t < s$, so dass t ebenfalls eine obere Schranke von X ist, so nennen wir s die kleinste obere Schranke oder das Supremum von X und schreiben $\sup(X) = s$.

Analog definieren wir eine größte untere Schranke bzw. Infimum und $\inf(X)$.

Vollständigkeit impliziert Suprema/Infima beschränkter Mengen

Satz

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Beweis: Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Wenn X ein größtes Element enthält, so ist dieses bereits die kleinste obere Schranke von X. Wenn X kein größtes Element enthält, so sei

$$S = \{s \in \mathbb{R} \colon s \text{ ist obere Schranke von } X\}\,.$$

Für alle $x \in X$ und alle $s \in S$ gilt dann $x < s$. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in X$ und alle $s \in S$ die Ungleichung

$$x \leqslant c \leqslant s$$

gilt. Also ist c die kleinste obere Schranke von X. □

Bemerkung: Die Aussage für nach unten beschränkte Mengen und Infima zeigt man entsprechend.

Folge $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ist nach oben beschränkt

Wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n < 3$ gilt. Dazu berechnen wir a_n mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \leqslant \frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Damit ist

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \overset{\text{g.R.}}{=} 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3\,.$$

Dabei haben wir die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

benutzt, die mit vollständiger Induktion bewiesen werden kann.

Monotonie

Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt monoton steigend/wachsend, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$a_n \leqslant a_{n+1}$$

gilt.

Entsprechend definiert man monoton fallend.

Gilt die strenge Ungleichung, dann reden wir von streng monoton steigenden/fallenden Folgen.

Satz

Jede monotone wachsende, nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

Beweis: Für eine solche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei a das Supremum der Menge $A = \{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ der Folgenglieder. Wir zeigen nun $a_n \longrightarrow a$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $a = \sup(A)$, ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von A und es gibt $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \overset{\text{Monotonie}}{\leqslant} a_n \leqslant a\,.$$

Insbesondere gilt für alle $n \geqslant n_\varepsilon$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ und $a_n \longrightarrow a$ folgt. $\square$

Satz gilt analog für mononton fallende, nach unten beschränkte reelle Folgen.

Folge $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend

Wir betrachten die Quotienten a_{n+1}/a_n und zeigen, dass diese mindestens 1 sind:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1}$$

und erhalten also

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.$$

Die Bernoulli–Ungleichung:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \quad \text{für alle } x \geqslant -1$$

angewendet mit $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ und $n+1$ ergibt schließlich

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1\,.$$

EULER'sche Zahl e

Wir haben gezeigt das die Folge $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ mononton wachsend und nach oben beschränkt ist und erhalten das folgende Korollar.

Korollar

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist konvergent. $\square$

Der Grenzwert der Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ definiert die EULER'sche Zahl e.

Die ersten Stellen der Dezimaldarstellung lauten

$$\mathrm{e} = 2{,}7\,1828\,1828\,459045\ldots$$

Konvergente Teilfolgen

Satz (Bolzano–Weierstraß)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die nach oben und unten beschränkt ist. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die konvergiert.

Beweis: Wir betrachten maximale Indizes der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei ein Index $m \in \mathbb{N}$ maximal ist, falls $a_n < a_m$ für alle $n > m$ gilt.

Falls es unendlich viele maximale Indizes $n_1 < n_2 < \dots$ gibt, dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Teilfolge. Diese Teilfolge ist, genau wie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nach unten beschränkt und nach dem letzten Satz konvergiert $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Nehmen wir nun an, dass es nur endlich viele maximale Indizes $n_1 < n_2 < \dots < n_\ell$ gibt. Dann gibt es für jedes $n > n_\ell$ immer einen Index $n' > n$ mit $a_{n'} \geqslant a_n$.

Wir definieren rekursiv eine monoton wachsende Teilfolge wie folgt: Wähle $n_1 = n_\ell + 1$ und $n_2 = n'_1 > n_1$ sei der Index mit $a_{n_2} \geqslant a_{n_1}$. Danach wählen wir $n_3 = n'_2 > n_2$ mit $a_{n_3} \geqslant a_{n_2}$ usw.

Die dadurch entstehende Teilfolge $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist. Wieder folgt, dass die Teilfolge $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert. $\square$

Cauchy-Folgen

Definition (Cauchy-Folge)

Eine reelle Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, falls für jedes $\delta > 0$ ein n_δ existiert, so dass

$$|a_n - a_m| < \delta$$

für alle $n, m \geqslant n_\delta$ gilt.

Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass konvergente Folgen (a_n) mit $\lim a_n = a$ auch Cauchy-Folgen sind, da für gegebenes $\delta > 0$ mit der Wahl $\varepsilon = \delta/2$ und $n_\delta = n_\varepsilon$ folgt für $n, m \geqslant n_\delta$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < 2\varepsilon = \delta\,.$$

Die Umkehrung beruht auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen die in den Beweis über eine Anwendung des Satzes von Bolzano und Weierstraß eingeht.

Satz

Jede reelle Cauchy-Folge konvergiert.

Cauchy-Folgen sind beschränkt

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen. Wir wenden zuerst das Cauchy–Kriterium mit $\delta = 1$ an und erhalten einen Index n_δ, sodass

$$|a_n - a_m| < 1$$

für alls n, $m \geqslant n_\delta$ gilt.

Seien M und N das Minimum und Maximum der ersten n_δ Folgeglieder, d. h.

$$M = \min\{a_1, \dots, a_{n_\delta}\} \quad \text{und} \quad N = \max\{a_1, \dots, a_{n_\delta}\}\,.$$

Da $|a_{n_\delta} - a_m| < 1$ für alle $m \geqslant n_\delta$ gilt, haben wir auch

$$M - 1 \leqslant a_{n_\delta} - 1 < a_m < a_{n_\delta} + 1 \leqslant N + 1\,.$$

Demnach ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten durch $M - 1$ und nach oben durch $N + 1$ beschränkt. $\square$

Cauchy-Folgen konvergieren

Beweis: Die Beschränktheit von Cauchy-Folgen (a_n) garantiert mit dem Satz von Bolzano und Weierstraß die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und sei

$$a = \lim_{k\longrightarrow\infty} a_{n_k}$$

der Grenzwert der Teilfolge.

Wir zeigen, dass die ganze Folge gegen a konvergiert.

Dafür sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben und das Cauchy–Kriterium mit $\delta = \varepsilon/2$ garantiert einen Index n_δ, sodass $|a_n - a_m| < \delta$ für alle n, $m \geqslant n_\delta$ gilt. Aufgrund der Konvergenz der Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt es auch einen Index k_δ, sodass $|a_{n_k} - a| < \delta$ für alle $k \geqslant k_\delta$ gilt.

Nun wählen wir $n_\varepsilon = \max\{n_\delta, n_{k_\delta}\}$. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung für $n \geqslant n_\varepsilon$ und ein beliebiges k mit $n_k \geqslant n_\varepsilon$

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\delta = \varepsilon\,,$$

und somit konvergiert die ganze Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a. $\square$

Exkurs: Alternative Konstruktion der reellen Zahlen

Idee:

- $\mathbb{Q}$ ist bereits ein angeordneter und archimedischer Körper
- $\mathbb{Q}$ ist **nicht** vollständig und es gibt nicht-konvergente Cauchy-Folgen, z. B.:

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big)$$

  hat rationale Folgenglieder, aber der Grenzwert $\sqrt{2}$ ist nicht in $\mathbb{Q}$
- wir wollen $\mathbb{Q}$ also so erweitern, dass alle Cauchy-Folgen konvergieren
- definiere die reelle Zahl r als Grenzwert aller Cauchy-Folgen rationaler Zahlen die „gegen r konvergieren"

$\Rightarrow$ r entspricht einer Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen deren punktweise Differenz eine Nullfolge ist

- genauer zwei Cauchy-Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ definieren wir als äquivalent wenn $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist
- dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der rationalen Cauchy-Folgen deren Äquivalenzklassen dann den reelen Zahlen entsprechen, d. h. die Quotientenmenge dieser Äquivalenzrelation definiert man dann als $\mathbb{R}$
- übertrage dann die Anordnung und Rechenoperationen von $\mathbb{Q}$ über die Folgen auf kanonische Weise und kann die Axiome der reellen Zahlen nachweisen

Rechenregeln für Grenzwerte

Satz

Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen reeller Zahlen mit Grenzwerten a und b. Dann gilt:

(1) $(a_n + b_n) \longrightarrow a + b$,
(2) $(a_n \cdot b_n) \longrightarrow a \cdot b$,
(3) $(c \cdot a_n) \longrightarrow c \cdot a$ für alle $c \in \mathbb{R}$,
(4) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \longrightarrow \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$
(5) und $a \leqslant b$, falls $a_n \leqslant b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis: Teil (1) folgt direkt aus der Dreiecksungleichung da für festes $\varepsilon > 0$ und hinreichend großes n gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \qquad \checkmark$$

Für den Beweis von (2) nutzen wir die Beschränktheit der konvergenten Folge (a_n) aus. Sei also $|a_n| < A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und $C = \max\{A, |b|\}$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ wähle n_ε groß genug, sodass für alle $n \geqslant n_\varepsilon$ sowohl

$$|a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C} \qquad \text{und} \qquad |b_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C}$$

gilt. Für alle $n \geqslant n_\varepsilon$ folgt dann

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leqslant |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b|$$

und Rechenregel (2) folgt mit

$$|a_n b_n - ab| \leqslant |a_n| \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C} \cdot |b| = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|a_n|}{C} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|b|}{C} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon\,. \qquad \checkmark$$

Beweis der Rechenregeln (3)–(5) für Grenzwerte

Die Rechenregel (3) folgt direkt aus (2) mit der konstanten Folge. ✓

Für Rechenregel (4) ist es hinreichen $b_n^{-1} \longrightarrow b^{-1}$ nachzuweisen, da die allgemeine Form dann aus (2) folgt. O.B.d.A. sei $b > 0$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$ hinreichend klein so dass

$$\frac{1}{1-\delta} < 1 + \varepsilon b \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{1+\delta} < 1 - \varepsilon b$$

und n_0, so dass für $n \geqslant n_0$ gilt

$$(1-\delta)b \leqslant b_n \leqslant (1+\delta)b \quad \Longrightarrow \quad \frac{1+\varepsilon b}{b} > \frac{1}{(1-\delta)b} \geqslant \frac{1}{b_n} \geqslant \frac{1}{(1+\delta)b} > \frac{1-\varepsilon b}{b}\,.$$

Somit folgt

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \left|\frac{\varepsilon b}{b}\right| = \varepsilon\,.$$

✓

Regel (5) beweisen wir mit einem Widerspruch. Die Annahme $b < a$ führt mit $\varepsilon = (a-b)/2$ für hinreichend große n zu dem offensichtlichen Widerspruch

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$$

□

Rechenregeln für bestimmt divergente Folgen

Es gibt auch Rechenregeln für bestimmt divergente Folgen, allerdings können Ausdrücke der Form

$$0 \cdot \infty, \qquad \infty/\infty \qquad \text{oder} \qquad \infty - \infty$$

nicht sinnvoll betrachtet werden, da hier ganz unterschiedliche Ergebnisse möglich sind.

Exemplarisch geben wir ohne Beweis folgende Rechenregel an:

(6) Gilt $a_n \longrightarrow a$ für ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $b_n \longrightarrow \infty$, so ist

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a > 0, \\ -\infty, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Einschließungssatz

Satz

Es seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen reeller Zahlen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ gilt.

Falls $a_n \longrightarrow a$ und $c_n \longrightarrow a$, dann konvergiert auch (b_n) gegen a.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} c_n = a$ gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad |c_n - a| < \varepsilon$$

und somit

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < a + \varepsilon\,.$$

Es folgt also $|b_n - a| < \varepsilon$ und die behauptete Konvergenz ist damit gezeigt. $\square$

Reihen

Definition

Für eine Folge reeller Zahlen (a_n) betrachten wir die Partialsummen

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \, .$$

- Die Folge (s_n) der Partialsummen ist eine Reihe für die wir oft auch nur $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ schreiben.
- Die Summanden a_n sind die Glieder der Reihe.
- Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert gegen eine reelle Zahl s, falls die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ gegen s konvergiert. Dann schreiben wir
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \, .$$
- Gilt $s_n \longrightarrow \infty$ oder $s_n \longrightarrow -\infty$, so schreiben wir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ beziehungsweise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.
- Die Indizes einer Reihe können auch bei einer anderen Zahl als 1 anfangen.

Bemerkung: Mit konvergenten Reihen werden wir später die Exponentialfunktion $\exp(\,\cdot\,)$, Logarithmusfunktionen $\log(\,\cdot\,)$ und die Winkelfunktionen $\sin(\,\cdot\,)$ und $\cos(\,\cdot\,)$ definieren.

Geometrische Reihe

Satz

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ konvergiert für $c \in \mathbb{R}$ mit $|c| < 1$ gegen $\frac{1}{1-c}$.

Beweis: Mit vollständiger Induktion zeigt man für alle $c \neq 1$ die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} c^n = \frac{1-c^{n+1}}{1-c},$$

wobei wir 0^0 als 1 definieren.

Wir hatten bereits gesehen, dass die Folge (c^n) für $|c| < 1$ gegen 0 konvergiert. Mithilfe der Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir für die Folge der Partialsummen

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} c^n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1-c^{n+1}}{1-c} = \frac{1-\lim_{n\longrightarrow\infty} c^{n+1}}{1-c} = \frac{1-0}{1-c} = \frac{1}{1-c}. \qquad \square$$

Bemerkung: Für $c \geqslant 1$ folgt ebenso $\sum_{n=0}^{\infty} c^n = \infty$ und für $c <= -1$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ unbestimmt divergent.

Harmonische Reihe

Satz

Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert bestimmt gegen ∞.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die 2^{k-1} konsekutiven Glieder

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \frac{1}{2^{k-1}+3} + \cdots + \frac{1}{2^k} \geqslant \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}\,.$$

Für die Partialsumme s_n mit $n \geqslant 2^k$ folgt damit

$$s_n \geqslant s_{2^k} \geqslant k \cdot \frac{1}{2}\,.$$

Die Folge der Partialsummen ist also unbeschränkt und die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert bestimmt gegen ∞. $\square$

Bemerkung: Auf der anderen Seite kann man zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ für alle $\alpha > 1$ konvergiert.

6. Stetige Funktionen

Funktionsgrenzwerte

Für reelle Funktion f, d. h. $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, interessieren wir uns für Funktionsgrenzwerte

$$\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} f(x)\,.$$

Beachte:

- $\hat{x}$ muss nicht unbedingt in D liegen, es reicht wenn es eine Folge gibt, die gegen $\hat{x}$ konvergiert
- es kann mehr als eine Folge $x_n \longrightarrow \hat{x}$ geben

Definition

Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $\hat{x} \in \mathbb{R}$, so dass es eine Folge (x_n) mit Elementen aus $D \setminus \{\hat{x}\}$ gibt, die gegen $\hat{x}$ konvergiert.

Wir sagen, dass f an der Stelle $\hat{x}$ den Grenzwert a hat, und schreiben

$$\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} f(x) = a \qquad bzw. \qquad f(x) \longrightarrow a \text{ für } x \longrightarrow \hat{x}\,,$$

falls für alle Folgen (x_n) mit Elementen aus D mit $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = \hat{x}$ die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Bemerkung: Punkte $\hat{x}$ die die Voraussetzung der Definition erfüllen, heißen Häufungspunkte von D.

Uneigentliche Grenzen und Grenzwerte

- Wir können für den Grenzwert a auch die uneigentlichen Grenzwerte $-\infty$ und ∞ zulassen und definieren auf die naheliegende Weise

$$\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} f(x) = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} f(x) = -\infty\,.$$

- Schließlich lassen wir auch für $\hat{x}$ die uneigentlichen Grenzwerte ∞ und $-\infty$ zu. D. h.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = a$$

  bedeutet also, dass es mindestens eine Folge (x_n) von Elementen von D gibt, für die $x_n \longrightarrow \infty$ gilt und dass für alle solchen Folgen

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = a$$

  gilt. Analog definieren wir

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = a\,.$$

  Wieder sind auch in diesen Fällen $a = -\infty$ und $a = \infty$ zugelassen.

Beispiel: $f(x) = -x^3$

- Der Definitionsbereich D is ganz $\mathbb{R}$.
- Für jedes $\hat{x} \in \mathbb{R}$ gilt
$$\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} f(x) = \hat{x}^3\,,$$
da sich für jede Folge $x_n \longrightarrow \hat{x}$ mit den Rechenregeln für Grenzwerte
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} -x_n^3 = (-1) \cdot \Big(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n\Big) \cdot \Big(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n\Big) \cdot \Big(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n\Big) = -\hat{x}^3\,.$$
- Auf ähnliche Weise sieht man
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = -\infty$$
und
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \infty\,.$$

Beispiel für fehlenden Funktionsgrenzwert

Sei $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \geqslant 0\,, \\ -1\,, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

definiert.

- für die Nullfolge (n^{-1}) erhalten wir $\lim_{n\longrightarrow\infty} g(1/n) = 1$
- für die Nullfolge $(-n^{-1})$ erhalten wir $\lim_{n\longrightarrow\infty} g(-1/n) = -1$

$\Rightarrow$ Der Funktionsgrenzwert für $\hat{x} = 0$ existiert nicht

- wir könnten auch die Nullfolge $x_n = (-1)^n n^{-1}$ betrachten, für die die Folge der Funktionswerte $g(x_n)$ oszilliert und nicht konvergiert

Beispiel: $h(x) = x^{-1}$

$D = (0, \infty)$

Für alle $\hat{x} \in (0, \infty)$ gilt $\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} h(x) = \frac{1}{\hat{x}}$. Außerdem sind

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} h(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} h(x) = \infty\,.$$

$D = (-\infty, 0)$

Für alle $\hat{x} \in (-\infty, 0)$ gilt $\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} h(x) = \frac{1}{\hat{x}}$. Außerdem sind

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} h(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} h(x) = -\infty\,.$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \longrightarrow 0} h(x)$ nicht.

Stetigkeit

Definition

Eine reelle Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $\hat{x} \in D$, falls

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = f(\hat{x})$$

für alle Folgen (x_n) in D mit $x_n \longrightarrow \hat{x}$.

Die Funktion f heißt stetig auf einer Menge $X \subseteq D$, falls f an jeder Stelle $\hat{x} \in X$ stetig ist.

Falls eine reelle Funktion auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist, so nennen wir die Funktion stetig.

Ist f nicht stetig bei $\hat{x} \in D$, so ist $\hat{x}$ eine Unstetigkeitsstelle von f.

Bemerkung:

- Typischerweise wird es immer eine Folge $x_n \longrightarrow \hat{x}$ mit $x_n \neq \hat{x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ geben und somit ist Stetigkeit dann gleichbedeutend mit der Existenz des Funktionsgrenzwertes $\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} f(x) = f(\hat{x})$.
- Anschaulich ist eine Funktion f stetig in $\hat{x}$ wenn der Graph der Funktion $\{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^2$ an der Stelle $\hat{x}$ keinen *Sprung* hat.

Beispiele und Rechenregeln

- die Funktion $f(x) = -x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist stetig
- die Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \geqslant 0\,, \\ -1\,, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

  hat eine Unstetigkeitsstelle bei $\hat{x} = 0$.
- die Funktion $h(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist stetig
- konstante Funktionen $x \longmapsto c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sind stetig
- die Identität $x \longmapsto x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist stetig
- aus den Rechenregeln für Grenzwerte ergibt sich für zwei stetige Funktionen $f_1\colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f_2\colon D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dass auch die auf $D_1 \cap D_2$ definierten Funktionen

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad \text{und} \qquad (f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

  wieder stetig sind.

$\Rightarrow$ alle Polynome p als reelle Funktionen $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind stetig

Rationale Funktionen sind stetig

- Für zwei stetige Funktionen $f_1 \colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f_2 \colon D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ setzen wir

$$D = \big(D_1 \cap D_2\big) \smallsetminus \{x \in \mathbb{R} \colon f_2(x) = 0\}\,.$$

Dann ist die Funktion f_1/f_2 punktweise definiert auf D durch

$$x \longmapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

wieder stetig.
Beweis: Seien $\hat{x} \in D$ und eine Folge $x_n \longrightarrow \hat{x}$ beliebig. Die Stetigkeit von f_1 und f_2 besagt

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_1(x_n) = f_1(\hat{x}) \quad \text{und} \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} f_2(x_n) = f_2(\hat{x})\,.$$

Insbesondere gilt $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_2(x_n) \neq 0$ und nach den Rechenregeln für konvergente Folgen erhalten wir

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \Big(\frac{f_1}{f_2}\Big)(x_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{f_1(x_n)}{f_2(x_n)} = \frac{\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_1(x_n)}{\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_2(x_n)} = \frac{f_1(\hat{x})}{f_2(\hat{x})} = \Big(\frac{f_1}{f_2}\Big)(\hat{x})\,. \qquad \square$$

$\Rightarrow$ alle rationalen Funktionen, d. h. Funktionen der Form p/q für Polynome p und q, sind stetig auf ihrem Definitionsbereich

Komposition erhält Stetigkeit

Satz

Seien $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $f(X) \subseteq Y$. Die Funktion f sei an der Stelle $\hat{x} \in X$ stetig und die Funktion g sei an der Stelle $f(\hat{x})$ stetig. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle $\hat{x}$ stetig.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_n \longrightarrow \hat{x}$. Wir definieren durch $y_n := f(x_n)$ die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da f an der Stelle $\hat{x}$ stetig ist, gilt

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = f(\hat{x})$$

und da g an der Stelle $f(\hat{x})$ stetig ist, folgt

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(g \circ f)(x_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\longrightarrow\infty} g(y_n) = g(f(\hat{x})) = (g \circ f)(\hat{x})\,.$$

$\square$

Stetige Funktionen bilden Intervalle auf Intervalle ab

Satz Zwischenwertsatz

Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $[a, b] \subseteq D$ mit $f(a) < f(b)$. Dann gibt es für jedes $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Beweis: Angenommen für ein $y \in [f(a), f(b)]$ gibt es kein solches Urbild $x \in [a, b]$. Wir definieren zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv. Dafür setzen wir $a_1 := a$ und $b_1 := b$ und ausgehend von bereits definierten a_n und b_n betrachten wir $c_n = (a_n + b_n)/2$ und definieren a_{n+1} und b_{n+1} in Abhängigkeit von $f(c_n)$.
Falls $f(c_n) < y$ ist, dann setzten wir

$$a_{n+1} = c_n \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = b_n$$

und andernfalls gewissermaßen umgekehrt

$$a_{n+1} = a_n \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = c_n\,.$$

Der Punkt c_n liegt immer genau in der Mitte von a_n und b_n und deswegen gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}\,.$$

Somit folgt $\lim a_n = \lim b_n$ und sei x dieser Grenzwert. Wegen der Stetigkeit von f gilt dann

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(a_n) = f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(b_n)\,.$$

Da aber $f(a_n) < y < f(b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt $f(x) = \lim f(a_n) \leqslant y \leqslant \lim f(b_n) = f(x)$. □

Bemerkung: Der Satz gilt analog für falls $f(a) > f(b)$.

ε-δ-Kriterium

- Stetigkeit bedeutet, dass sich Funktionswerte bei hinreichend kleinen Änderungen der Eingabewerte nur geringfügig ändern

Satz

Eine reelle Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ is genau dann stetig in $\hat{x} \in D$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|\hat{x} - x| < \delta$ folgt

$$\big|f(\hat{x}) - f(x)\big| < \varepsilon\,.$$

Beweis: „$\Rightarrow$“ (Widerspruchsbeweis)

Angenommen für ein $\varepsilon > 0$ gibt es kein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|\hat{x} - x| < \delta$ die Ungleichung $|f(\hat{x}) - f(x)| < \varepsilon$ gilt.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\delta = 1/n$ können wir also ein $x_n \in D$ mit $|\hat{x} - x_n| < \frac{1}{n}$ wählen, so dass $|f(\hat{x}) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$ gilt. Die Folge (x_n) konvergiert gegen $\hat{x}$, während $(f(x_n))$ entweder garnicht konvergiert oder zumindest nicht gegen eine Zahl konvergiert, deren Abstand zu $f(\hat{x})$ kleiner als ε ist. Also ist $\hat{x}$ eine Unstetigkeitsstelle. ✓

„$\Leftarrow$“ (Widerspruchsbeweis)

Sei nun umgekehrt $\hat{x}$ eine Unstetigkeitsstelle, d. h. Dann gibt es eine Folge (x_n) in D, die gegen $\hat{x}$ konvergiert, während $(f(x_n))$ nicht gegen $f(\hat{x})$ konvergiert.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für kein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ alle $f(x_n)$ mit $n \geqslant n_\varepsilon$ einen Abstand $< \varepsilon$ zu $f(\hat{x})$ haben. Für jedes $\delta > 0$ kann man nun ein $n \in \mathbb{N}$ wählen, so dass zwar $|\hat{x} - x_n| < \delta$ gilt, aber trotzdem $|f(\hat{x}) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$ ist. □

Beispiel: ε-δ-Kriterium für $f(x) = x^2$

Sei $\hat{x} \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

Wir müssen ein hinreichend kleines $\delta > 0$ finden, so dass für jedes x mit Abstand kleiner δ zu $\hat{x}$ gilt

$$\left|\hat{x}^2 - x^2\right| < \varepsilon\,.$$

Um ein solches δ zu finden, benutzen wir die Abschätzungen $\hat{x} - \delta < x < \hat{x} + \delta$ und erhalten

$$|\hat{x}^2 - x^2| < |\hat{x}^2 - (\hat{x}^2 \pm 2\hat{x}\delta + \delta^2| \leqslant 2|\hat{x}|\delta + \delta^2\,.$$

Dies können wir nun wie gewünscht mit ε Abschätzen, wenn wir z. B.

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{4|\hat{x}|}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}$$

wählen, falls $\hat{x} \neq 0$ gilt und $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ falls $\hat{x} = 0$.

Bemerkung: Formal machen wir erst diese Nebenrechnung, um ein passendes δ in Abhängigkeit von ε und $\hat{x}$ zu bestimmen, und dann schreiben wir den Beweis mit dem so gewählten δ auf.

7. Differenzialrechnung

Änderungsraten bestimmen

Wenn die Position eines sich bewegenden Objekts durch eine Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit x gegeben ist, so ist es naheliegend zu fragen, welche Geschwindigkeit der Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt $\hat{x}$ hat oder welche Beschleunigung er zu einem bestimmten Zeitraum erfährt.

Allgemein kann man für Funktionen, die den Wert irgendeiner Größe in Abhängigkeit von der Zeit beschreiben, fragen, welche Änderungsrate bzw. das Differenzial diese Größe zu einem bestimmten Zeitpunkt $\hat{x}$ hat.

Rein geometrisch möchte man wissen, wie man für die reelle Funktion f die Tangente an den Graphen der Funktion in einem Punkt $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ findet, falls man überhaupt sinnvoll definieren kann, was diese Tangente ist.

Diese Fragen kann man mit Hilfe der Differentialrechnung beantworten, die auf Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zurückgeht.

Ableitung einer Funktion

Wir betrachten eine reelle Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei wir meist voraussetzen, dass D ein nicht-triviales Intervall ist. Die Stelle $\hat{x} \in D$ sei fest gewählt.

Zu jedem $x \in D$ betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}}\,.$$

Der Differenzenquotient gibt die Steigung der Geraden durch die Punkte $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ und $(x, f(x))$ an oder auch das Verhältnis der Änderung von f zur Änderung von x.

Die Sekanten durch die Punkte $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ und $(x, f(x))$ nähern sich der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ an, wenn man x näher an $\hat{x}$ wählt.

Die Steigung der Sekante nähert sich dabei dem Wert

$$\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}}$$

an, falls dieser Grenzwert existiert.

Dieser Grenzwert ist die Ableitung von f an der Stelle $\hat{x}$ und wird mit $f'(\hat{x})$ bezeichnet. Bei der dieser Grenzwertbildung betrachten wir nur Folgen $x_n \longrightarrow \hat{x}$ mit $x_n \neq \hat{x}$ und deswegen muss $\hat{x}$ ein Häufungspunkt in D sein.

Differenzierbarkeit

Definition

Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $\hat{x} \in D$ ein Häufungspunkt. Dann heißt f an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}}$$

existiert. In diesem Falle bezeichnen wir diesen Grenzwert mit $f'(\hat{x})$ und nennen ihn die Ableitung von f an der Stelle $\hat{x}$.

- f heißt differenzierbar auf einer Menge $X \subseteq D$, wenn f an jeder Stelle $\hat{x} \in X$ differenzierbar ist
- zu f definieren wir die reelle Funktion $f'\colon D' \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

  $$D' = \{\hat{x} \in D\colon f \text{ ist an der Stelle } \hat{x} \text{ differenzierbar}\},$$

  die jedem $x \in D'$ die Ableitung $f'(x)$ von f an der Stelle x zuordnet
- f' heißt Ableitung von f und anstelle von f' schreibt man auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

Beispiel: Lineare Funktionen

Konstante Funktionen $f(x) = c$

- offensichtlich ist die Änderungsrate 0

Tatsächlich gilt für jedes $\hat{x} \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} = \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{c - c}{x - \hat{x}} = \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} 0 = 0\,.$$

Damit ist f' die konstante Nullfunktion $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Allgemeine lineare Funktionen $g(x) = ax + b$ für feste $a, b \in \mathbb{R}$

- offensichtlich ist die Änderungsrate a

Tatsächlich gilt für jedes $\hat{x} \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{g(x) - g(\hat{x})}{x - \hat{x}} = \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{ax + b - (a\hat{x} + b)}{x - \hat{x}} = \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{a(x - \hat{x})}{x - \hat{x}} = \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} a = a\,.$$

Damit ist g' die konstante Funktion $g'(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel: Monome

$f(x) = x^2$

- offensichtlich hängt die Änderungsrate von x ab

Für jedes $\hat{x} \in \mathbb{R}$ verwenden wir die dritte binomische Formel

$$\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} = \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{x^2 - \hat{x}^2}{x - \hat{x}} = \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{(x + \hat{x})(x - \hat{x})}{x - \hat{x}} = \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} x + \hat{x} = 2\hat{x}\,.$$

Damit ist f' die konstante Nullfunktion $f'(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Allgemeine Monome $g(x) = x^n$ für festes $n \in \mathbb{N}$

Allgemein zeigt man mit Teleskopsumme: $(x^n - \hat{x}^n) = (x - \hat{x}) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} \hat{x}^k$ und somit folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte für jedes $\hat{x} \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{x^n - \hat{x}^n}{x - \hat{x}} = \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} \hat{x}^k = \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} x^{n-1-k} \hat{x}^k = n \cdot \hat{x}^{n-1}\,.$$

Damit gilt für die Ableitung $g'(x) = n \cdot x^{n-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel: Betragsfunktion $f(x) = |x|$

- offensichtlich gibt es für $\hat{x} = 0$ keine eindeutige Tangente

Tatsächlich gilt für $x_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{|x_n| - 0}{x_n - 0} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{|1/n|}{1/n} = 1$$

wohingegen für $x_n = -\frac{1}{n}$ gilt

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{|x_n| - 0}{x_n - 0} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{|-1/n|}{-1/n} = -1\,.$$

Der Funktionsgrenzwert existiert also nicht und somit ist $f(x) = |x|$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ nicht differenzierbar.

Bemerkung: Es gibt also stetige Funktionen die nicht differenzierbar sind.

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Satz

Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\hat{x} \in D$ ein Häufungspunkt. Ist f an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar, so ist f an der Stelle $\hat{x}$ auch stetig.

Beweis: Da f bei $\hat{x}$ differenzierbar ist, existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit

$$a = \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}}.$$

Es gilt nach den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\begin{aligned}\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \big(f(x) - f(\hat{x})\big) &= \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \left(\frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} \cdot (x - \hat{x})\right) \\ &= \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} \cdot \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} (x - \hat{x}) = a \cdot 0 = 0\,.\end{aligned}$$

Damit folgt $\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} f(x) = f(\hat{x})$ und das zeigt die Stetigkeit von f an der Stelle $\hat{x}$. $\square$

Bemerkungen

Seit $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $\hat{x} \in D$.

- die lineare Abbildung
$$y = f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + f(\hat{x})$$
beschreibt die Tangente an den Graphen von d im Punkt $(\hat{x}, f(\hat{x}))$

- wir definieren höhere Ableitungen (falls sie existieren) rekursiv durch:
    - die 0-te Ableitung von f an der Stelle $\hat{x}$ ist $f(\hat{x})$
    - die $(n+1)$-te Ableitung von f an der Stelle $\hat{x}$ ist
$$f^{(n+1)}(\hat{x}) = \left(f^{(n)}\right)'(\hat{x})$$

    wir schreiben denn f', f'', f''' bzw. $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, ...

- an Stelle von Folgen $x_n \longrightarrow \hat{x}$ können wir in der Definition des Differenzenquotienten $\hat{x} + h_n$ für Nullfolgen $h_n \longrightarrow 0$ betrachten und erhalten
$$f'(\hat{x}) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + h) - f(\hat{x})}{(\hat{x} + h) - \hat{x}} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + h) - f(\hat{x})}{h}$$

Ableitungsregeln: Addition und Multiplikation

Satz

Für $a < b$ seien f und g reelle Funktionen, die auf dem Interval $[a, b]$ definiert sind und an der Stelle $\hat{x} \in [a, b]$ differenzierbar sind. Dann sind die punktweise definierten Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar und es gilt

$$(f + g)'(\hat{x}) = f'(\hat{x}) + g'(\hat{x}) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)'(\hat{x}) = f'(\hat{x}) \cdot g(\hat{x}) + f(\hat{x}) \cdot g'(\hat{x})\,.$$

Beweis: Für die Additionsregel betrachten wir eine Folge (x_n) in $[a, b]$ mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die gegen $\hat{x}$ konvergiert. Aus der Definition von $f + g$ folgt

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{(f+g)(x_n) - (f+g)(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x_n) + g(x_n) - \big(f(\hat{x}) + g(\hat{x})\big)}{x_n - \hat{x}}$$

und mit den Rechenregeln für Grenzwerte ergibt sich

$$(f + g)'(\hat{x}) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} + \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} = f'(\hat{x}) + g'(\hat{x})\,. \quad \checkmark$$

Beweis der Multiplikationsregel

Für die Produktregel erinnern wir uns daran, dass g an der Stelle $\hat{x}$ auch stetig ist, da Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert. Damit gilt also

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} g(x_n) = g(\hat{x}) \,.$$

Aus der Definition von $f \cdot g$ folgt

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{(f \cdot g)(x_n) - (f \cdot g)(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x_n) \cdot g(x_n) - f(\hat{x}) \cdot g(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} \,,$$

welches wir erweitern

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x_n) \cdot g(x_n) - f(\hat{x}) \cdot g(x_n) + f(\hat{x}) \cdot g(x_n) - f(\hat{x}) \cdot g(\hat{x})}{x_n - \hat{x}}$$

und ausklammern

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{f(x_n) - f(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} \cdot g(x_n) + f(\hat{x}) \cdot \frac{g(x_n) - g(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} \right) .$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte ergibt sich somit

$$(f \cdot g)'(\hat{x}) = f'(\hat{x}) \cdot g(\hat{x}) + f(\hat{x}) \cdot g'(\hat{x}) \,. \qquad \square$$

Einfache Quotientenregel

Satz

Für $a < b$ sei g eine reelle Funktion, die auf dem Interval $[a, b]$ definiert ist, an der Stelle $\hat{x} \in [a, b]$ differenzierbar ist und es gelte $g(\hat{x}) \neq 0$. Dann ist $1/g$ an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{1}{g(\hat{x})}\right)' = -\frac{g'(\hat{x})}{\big(g(\hat{x})\big)^2}\,.$$

Beweis: Für den Beweis formen wir wieder den Differenzquotienten geeignet um

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(\hat{x}+h)} - \frac{1}{g(\hat{x})}}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{g(\hat{x}) - g(\hat{x}+h)}{h \cdot g(\hat{x}+h) \cdot g(\hat{x})}\,.$$

Mit der Stetigkeit von g an der Stelle x und den Rechenregeln konvergenter Folgen ergibt sich somit

$$\left(\frac{1}{g(\hat{x})}\right)' = -g'(\hat{x}) \cdot \frac{1}{g(\hat{x})} \cdot \frac{1}{g(\hat{x})} = -\frac{g'(\hat{x})}{\big(g(\hat{x})\big)^2}$$

$\square$

Weitere Rechenregeln

Korollar

Für $a < b$ und differenzierbare Funktionen $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt für $x \in [a,b]$

$$(c \cdot g)'(x) = c \cdot g'(x) \qquad \text{und} \qquad (f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)\,.$$

Für alle $x \in [a,b]$ mit $g(x) \neq 0$ gilt weiterhin die allgemeine Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}\,.$$

Beweis: Da konstante Funktionen differenzierbar sind und als Ableitung die konstante Nullfunktion haben, folgt die Formel für $(c \cdot g)'$ direkt aus der Produktregel.

Die Formel für $(f-g)'$ ergibt sich dann durch Anwendung der Additionsregel für f und $(-1) \cdot g$.

Die Formel für die allgemeine Quotientenregel ist eine Konsequenz der Produktregel im Zusammenspiel mit der einfachen Quotientenregel. $\square$

Ableitung von Polynomen und rationalen Funktionen

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \neq 0$ gilt

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}\,.$$

Beweis: Die Formel ergibt sich direkt aus der Quotientenregel und der bereits ermittelten Ableitung von x^n, da

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n\frac{1}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}\,. \qquad \square$$

Als weitere Konsequenz der Rechenregeln erhalten wir, dass alle Polynome und alle rationalen Funktionen differenzierbar sind.

Korollar

Sei $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Polynomfunktion $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann ist p auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1\,.$$

Für zwei Polynomfunktionen $p, q\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die rationale Funktion p/q auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}\colon q(x) \neq 0\}$ differenzierbar. $\square$

Kettenregel

Satz

Seien $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $f(X) \subseteq Y$. Die Funktion f sei an der Stelle $\hat{x} \in X$ differenzierbar und die Funktion g sei an der Stelle $f(\hat{x})$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(\hat{x}) = \big(g(f(\hat{x}))\big)' = g'\big(f(\hat{x})\big) \cdot f'(\hat{x})\,.$$

Beweis: Wir setzen den Differenzenquotienten der äußeren Funktion g für $\hat{y} = f(\hat{x})$ stetig fort, d. h. für $y \in Y$ definieren wir

$$g_{\hat{y}}(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(\hat{y})}{y-\hat{y}}\,, & \text{falls } y \neq \hat{y}\,,\\ g'(\hat{y})\,, & \text{falls } y = \hat{y}\,. \end{cases}$$

Da g an der Stelle $\hat{y}$ differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{y \longrightarrow \hat{y}} g_{\hat{y}}(y) = g'(\hat{y}) \quad \text{und es gilt} \quad g(f(x)) - g(f(\hat{x})) = g_{\hat{y}}(f(x)) \cdot (f(x) - f(\hat{x}))\,.$$

Somit erhalten wir

$$\lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{g(f(x)) - g(f(\hat{x}))}{x - \hat{x}} = \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} g_{\hat{y}}(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}}$$

und die Aussage folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte. $\square$

Beispiele Kettenregel

$h(x) = (3x^3 - 5x + 2)^7$

Die Funktion ist die Verkettung $h = g \circ f$ für $g(y) = y^7$ und $f(x) = 3x^3 - 5x + 2$. Für die einzelnen Ableitungen gilt $g'(y) = 7y^6$ und $f'(x) = 9x^2 - 5$. Mit der Kettenregel folgt somit

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 7 \cdot (3x^3 - 5x + 2)^6 \cdot (9x^2 - 5)\,.$$

$h(x) = \left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)^{13}$

Die Funktion ist die Verkettung $h = g \circ f$ für $g(y) = y^{13}$ und $f(x) = \frac{4x^3+1}{x+1}$. Mit der Kettenregel und der Quotientenregel folgt somit

$$h'(x) = 13 \cdot \left(\frac{4x^3 + 1}{x + 1}\right)^{12} \cdot \left(\frac{4x^3 + 1}{x + 1}\right)' = 13 \cdot \left(\frac{4x^3 + 1}{x + 1}\right)^{12} \cdot \frac{12x^2(x + 1) - (4x^3 + 1)}{(x + 1)^2}\,.$$

Monotone Funktionen

Definition

Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und sei $X \subseteq D$.

(*i*) Die Funktion f heißt monoton wachsend auf X, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ gilt

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)\,.$$

(*ii*) Die Funktion f heißt streng monoton wachsend auf X, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ gilt

$$f(x_1) < f(x_2)\,.$$

(*iii*) Analog definiert man monoton fallend und streng monoton fallend.

(*iv*) Die Funktion f heißt (streng) monoton, falls f (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Bemerkung: Jede streng monotone Funktion f ist injektiv und somit gibt es für diese die Umkerhrfunktion f^{-1}.

Umkehrregel

Satz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf I. Dann gilt

(*i*) Das Bild $f(I)$ von I unter f ist ein Intervall.

(*ii*) Ist f streng monoton wachsend (fallend), so ist auch f^{-1} streng monoton wachsend (fallend).

(*iii*) f^{-1} ist auf der Menge $f(I)$ stetig.

(*iv*) Ist f an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar und gilt $f'(\hat{x}) \neq 0$, so ist f^{-1} an der Stelle $\hat{y} = f(\hat{x})$ differenzierbar und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(\hat{y}) = \frac{1}{f'(\hat{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\hat{y}))}\,.$$

Bemerkungen: Die erste Aussage ist eine direkte Folge des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen und die zweite Aussage folgt direkt aus der strengen Monotonie. Die dritte Aussage werden wir für den Beweis der Umkehrregel (vierte Aussage) benötigen und deswegen im Folgenden zuerst beweisen.

Interpretation der Umkehrregel $(f^{-1})'(f(\hat{x})) = \frac{1}{f'(\hat{x})}$

Sei $x \in I \setminus \{\hat{x}\}$. Die Steigung der Sekante durch die Punkte $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ und $(x, f(x))$ ist

$$\frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}}\,.$$

Man erhält den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} indem man den Graphen von f an der Geraden mit der Gleichung $y = x$ spiegelt.

Bei der Spiegelung geht der Punkt $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ in den Punkt

$$(f(\hat{x}), \hat{x}) = (\hat{y}, f^{-1}(\hat{y}))$$

für $\hat{y} = f(\hat{x})$ über und der Punkt $(x, f(x))$ geht in den Punkt $(f(x), x)$ über.

Die Steigung der Sekante von f^{-1} durch die Punkte $(f(x), x)$ und $(f(\hat{x}), \hat{x})$ ist

$$\frac{x - \hat{x}}{f(x) - f(\hat{x})}\,.$$

Da f in $\hat{x}$ stetig ist, gilt $f(x) \longrightarrow f(\hat{x})$ für $x \longrightarrow \hat{x}$. Damit ist $(f^{-1})'(\hat{y})$ genau der Grenzwert von

$$\frac{x - \hat{x}}{f(x) - f(\hat{x})}\,,$$

wenn man x gegen $\hat{x}$ laufen lässt. Dieser Grenzwert ist aber genau $\frac{1}{f'(\hat{x})}$.

Beweis der Stetigkeit der Umkehrfunktion (dritte Aussage)

Wir können annehmen, dass f streng monoton wachsend ist, da der Beweis für fallende Funktionen genauso funktioniert.

Sei $y \in f(I)$ beliebig. Wir zeigen mit dem ε-δ-Kriterium, dass f^{-1} in y stetig ist.

Sei $x = f^{-1}(y)$ das Urbild von y unter f und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir betrachten die ε-Umgebung von $x \in I$, d. h.

$$J := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap I\,.$$

Da f Intervalle auf Intervalle abbildet, ist $f(J)$ ein Teilintervall von $f(I)$, das y enthält. Insbesondere existiert ein $\delta > 0$, sodass $(y - \delta, y + \delta) \subseteq f(J)$. Somit ist $f^{-1}(y_0) \in J$ für jedes $y_0 \in (y - \delta, y + \delta)$, womit

$$\left|f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)\right| \leqslant \varepsilon$$

gezeigt und Teil (iii) bewiesen ist. ✓

Beweis der Umkehrregel $(f^{-1})'(\hat{y}) = \frac{1}{f'(\hat{x})}$ für $\hat{y} = f(\hat{x})$

Für den Beweis der Umkehrregel sei $\hat{y} = f(\hat{x})$ gegeben und sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $f(I) \smallsetminus \{\hat{y}\}$, die gegen $\hat{y}$ konvergiert.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x_n = f^{-1}(y_n)$. Wegen der bereits bewiesenen Stetigkeit von f^{-1} gilt

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \hat{x}$$

und somit erhalten wir

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\hat{y})}{y_n - \hat{y}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{x_n - \hat{x}}{f(x_n) - f(\hat{x})} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(\hat{x})}{x_n-\hat{x}}} = \frac{1}{f'(\hat{x})}$$

und die gewünschte Aussage

$$(f^{-1})'(\hat{y}) = \frac{1}{f'(\hat{x})}$$

folgt. $\square$

Beispiel Umkehrregel für $f(x) = x^2$

- Sei $I = (0, \infty)$ und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$.
- Dann ist f auf I differenzierbar und streng monoton wachsend.
- Es gilt $f'(x) = 2x$ und damit ist $f'(x)$ auf dem Interval I niemals 0.
- Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ von f ist bekanntlich die Wurzelfunktion
$$y \longmapsto \sqrt{y}\,.$$

- Es seien $x, y \in (0, \infty)$ mit $x^2 = y$ beziehungsweise $\sqrt{y} = x$.
- Nach der Umkehrregel gilt für die Ableitung von f^{-1} an der Stelle $y \in (0, \infty)$
$$(\sqrt{y})' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,.$$

- Schreiben wir die Wurzelfunktion nun als $(0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ definiert durch $x \longmapsto \sqrt{x}$, so erhalten wir $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{R}$ ist a^n als das Produkt von n Faktoren von a definiert

$$a^n := \prod_{i=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} .$$

Insbesondere ist $a^0 = 1$ und aus der Definition ergeben sich die folgenden Rechenregeln für alle a, $b \in \mathbb{R}$ und n, $m \in \mathbb{N}_0$:

(*i*) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$,

(*ii*) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ und

(*iii*) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definieren wir

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} = \underbrace{\frac{1}{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n \text{ Faktoren}} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

und damit übertragen sich die Rechenregeln auf alle Exponenten aus $\mathbb{Z}$.

Potenzen mit rationalen Exponenten – Wurzelfunktion

Idee: Damit sich die Rechenregeln erhalten bleiben, wollen wir

$$a = a^1 = a^{\frac{n}{n}} = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = (a^n)^{\frac{1}{n}}$$

sicher stellen. D. h. mit „$1/n$ zu potenzieren“ soll die Umkehrfunktion zum „potenzieren mit n“ sein und dies führt zu den Wurzelfunktionen auf $[0, \infty)$.

Satz (Existenz reeller Wurzeln)

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geqslant 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau eine reelle Zahl $b \geqslant 0$, die die Gleichung $b^n = a$ löst.

Beweis: Auf $I = [0, \infty)$ ist die Funktion $f(b) = b^n$ stetig und streng monoton wachsend. Insbesondere ist f injektiv $f(I)$ ist wieder ein Intervall. Da

$$f(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{b \longrightarrow \infty} f(b) = \infty$$

gilt, ist das Bild von f also ebenfalls $[0, \infty)$. Also gibt es mindestens ein $b \in I$ mit $f(b) = a$ und wegen der Injektivität von f gibt es auch nur ein solches b. $\square$

Wurzelfunktion: Die eindeutig bestimmte Zahl $b \geqslant 0$ aus dem Satz heißt die *n-te Wurzel* von $a \geqslant 0$ und wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet und für $n \in \mathbb{N}$ definiert dies die Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$.

Rechenregeln für Wurzeln

Für alle a, $b > 0$ und ℓ, m, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(*i*) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Beweis: Sei $\alpha^n = a$ und $\beta^n = b$ für α, $\beta > 0$, dann gilt

$$a \cdot b = \alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha\beta)^n \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{ab} = \alpha\beta = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \square$$

(*ii*) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Beweis: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a} \overset{(i)}{=} \sqrt[n]{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a} = \sqrt[n]{a^m}$. $\square$

(*iii*) $\sqrt[\ell n]{a} = \sqrt[\ell]{\sqrt[n]{a}}$.

Beweis: Sei $\alpha = \sqrt[\ell n]{a}$. Dann gilt $a = \alpha^{\ell n} = \left(\alpha^\ell\right)^n$ und somit $\alpha^\ell = \sqrt[n]{a}$ und $\alpha = \sqrt[\ell]{\sqrt[n]{a}}$ $\square$

Aus der Rechenregel (*iii*) ergibt sich folgende Kürzungsregel

$$\left(\sqrt[\ell n]{a}\right)^{\ell m} = \left(\left(\sqrt[\ell n]{a}\right)^\ell\right)^m \overset{(iii)}{=} \left(\left(\sqrt[\ell]{\sqrt[n]{a}}\right)^\ell\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m .$$

Potenzen mit rationalen und reellen Exponenten

Für $a > 0$ und eine rationale Zahl $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a^q := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m .$$

Diese Definition ist wegen der Kürzungsregel unabhängig von der gewählten Bruchdarstellung von q und somit wohldefiniert.

Mit dieser Definition und Rechenregeln für Wurzeln, lassen sich die Rechenregeln von ganzzahligen Exponenten auf rationale Exponenten erweitern. D. h. für alle a, $b > 0$ und q, $\tilde{q} \in \mathbb{Q}$ gilt:

(i) $a^q \cdot b^q = (ab)^q$,

(ii) $a^q \cdot a^{\tilde{q}} = a^{q+\tilde{q}}$ und

(iii) $(a^q)^{\tilde{q}} = a^{q\cdot\tilde{q}}$. □

Potenzen a^r für reelle Zahlen $\mathbb{R}$ würden wir gerne als Grenzwert

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a^{q_n}$$

für rationale Folgen mit $q_n \longrightarrow r$ definieren. Um zu zeigen, dass das wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl der rationalen Folge, müssen wir zeigen, dass die Exponentialfunktion a^x stetig ist, was aber die Definition von a^r voraussetzt. Deswegen definieren wir im Folgenden die Exponentialfunktionen mit einem anderen Ansatz. Wir halten an dieser Stelle aber bereits fest, dass sich die oben genannten Rechenregeln dann auch auf allgemeine reelle Exponenten übertragen.

Exponentialfunktion

- Wir hatten gezeigt, dass die Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ monoton wachsend und beschränkt ist und deswegen konvergiert und den Grenzwert zur Definition der Euler'schen Zahl $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ verwendet.
- Allgemeiner kann man zeigen, dass $(1+\frac{r}{n})^n$ für jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ konvergiert (siehe Skript) und dies nutzen wir für die Definition der Exponentialfunktion.

Definition

Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren wir für alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\exp(x) := \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

- Mit Hilfe des binomischen Lehrsatz kann man zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

gegen $\exp(x)$ konvergiert und diese Reihendarstellung wird auch oftmals für die Definition der Exponentialfunktion herangezogen.

Funktionalgleichung

Satz

Für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)\,.$$

Bemerkungen:

- Der Beweis findet sich im Skript.
- Ausgehend von $\exp(1) = \mathrm{e}$ folgt mit Induktion und den Potenzgesetzen für $n \in \mathbb{N}$
$$\exp(n) = \exp(n-1) \cdot \exp(1) = \mathrm{e}^{n-1} \cdot \mathrm{e} = \mathrm{e}^{n}\,.$$
- Wegen $\exp(0) = \lim(1 + \frac{0}{n})^n = 1$ ergibt sich auch für $n \in \mathbb{N}$
$$1 = \exp(n-n) = \exp(n) \cdot \exp(-n) = \mathrm{e}^{n} \cdot \exp(-n) \quad \Longrightarrow \quad \exp(-n) = \frac{1}{\mathrm{e}^{n}}\,.$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion

Satz

Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfüllt folgende Eigenschaften

(*i*) $\exp(x) > 1$ für alle $x > 0$ und $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
(*ii*) $1 + x \leqslant \exp(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$ für alle $x \in (-1, 1)$,
(*iii*) $\exp(x)$ ist streng monoton wachsend,
(*iv*) $\exp(x)$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$,
(*v*) $\exp(x)$ hat Bildbereich $(0, \infty)$ und
(*vi*) $\exp(x)$ ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ und hat die Ableitung $\exp'(x) = \exp(x)$.

Beweis:

(*i*) Für $x \geqslant 0$ ist wegen der Bernoulli-Ungleichung $(1 + \frac{x}{n})^n \geqslant 1 + x$ und somit folgt $\exp(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty}(1 + \frac{x}{n})^n \geqslant 1 + x > 1$ für $x > 0$.
Mit der Funktionalgleichung folgt dann $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ positiv für alle $x \in \mathbb{R}$. ✓

(*ii*) Die untere Schranke hatten wir schon in (*i*) gezeigt. Für die obere Schranke verwenden wir erst $(1 + z) \leqslant \frac{1}{1-z}$, gefolgt von einer weiteren Anwendung der Bernoulli-Ungleichung

$$\exp(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \leqslant \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} .$$ ✓

(*iii*) Die strenge Monotonie ergibt sich aus $\exp(y) = \exp(x) \cdot \exp(y - x)$ und (*i*). ✓

(*v*) Folgt aus (*iii*) und (*iv*) mit $\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathrm{e}^n = \infty$ und $\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$. ✓

Stetigkeit der Exponentialfunktion

Die Stetigkeit prüfen wir zuerst im Punkt $x = 0$.

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $z_n \longrightarrow 0$. Für hinreichend großes n_0 liegen also alle Folgenglieder x_n in $(-1,1)$ für $n \geqslant n_0$. Somit erhalten wir aus Teil (ii) über

$$1 = \lim_{n\longrightarrow\infty} 1 + z_n \leqslant \lim_{n\longrightarrow\infty} \exp(z_n) \leqslant \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{1-z_n} = 1$$

auch $\lim_{n\longrightarrow\infty} \exp(z_n) = 1 = \exp(0)$, was die Stetigkeit an der Stelle 0 zeigt.

Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ folgt die Stetigkeit dann mit der Funktionalgleichung, da für alle Folgen $x_n \longrightarrow x$ gilt $x_n - x \longrightarrow 0$ und somit ergibt sich

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \exp(x_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \exp(x + x_n - x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \exp(x)\cdot\exp(x_n - x)$$

und die Rechenregeln für Grenzwerte zeigen uns schließlich

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \exp(x_n) = \exp(x)\cdot \lim_{n\longrightarrow\infty} \exp(x_n - x) = \exp(x)\cdot\exp(0) = \exp(x)\,. \qquad \checkmark$$

Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion

Wieder überprüfen wir zuerst die Stelle $x = 0$ und mithilfe der Abschätzungen aus Teil (ii) erhalten wir

$$1 = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(1+h) - 1}{h} \leqslant \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \leqslant \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{1-h} = 1\,.$$

Die Exponentialfunktion ist also an der Stelle 0 differenzierbar und

$$\exp'(0) = 1 = \exp(0)\,.$$

Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ folgt die entsprechende Aussage mithilfe der Funktionalgleichung. Es gilt

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h}$$

und wir erhalten

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x) \cdot \exp'(0) = \exp(x)$$

und somit gilt $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Natürlicher Logarithmus

Die Exponentialfunktion ist streng monoton und somit umkehrbar ist und dies führt zur Definition des natürlichen Logarithmus und die Eigenschaften übersetzen sich analog.

Definition

Der natürliche Logarithmus $\ln\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion $\exp^{-1}$ der Exponentialfunktion.

Korollar

Der natürliche Logarithmus $\ln\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ erfüllt folgende Eigenschaften

(*i*) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$, (Funktionalgleichung)
(*ii*) $\ln(x)$ ist streng monoton wachsend,
(*iii*) $\ln(x) < 0$ für $x \in (0,1)$, $\ln(1) = 0$ und $\ln(x) > 0$ für $x > 1$,
(*iv*) $\ln(x)$ ist stetig auf ganz $(0,\infty)$,
(*v*) $\ln(x)$ hat Bildbereich $\mathbb{R}$ und
(*vi*) $\ln(x)$ ist differenzierbar und $\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$. □

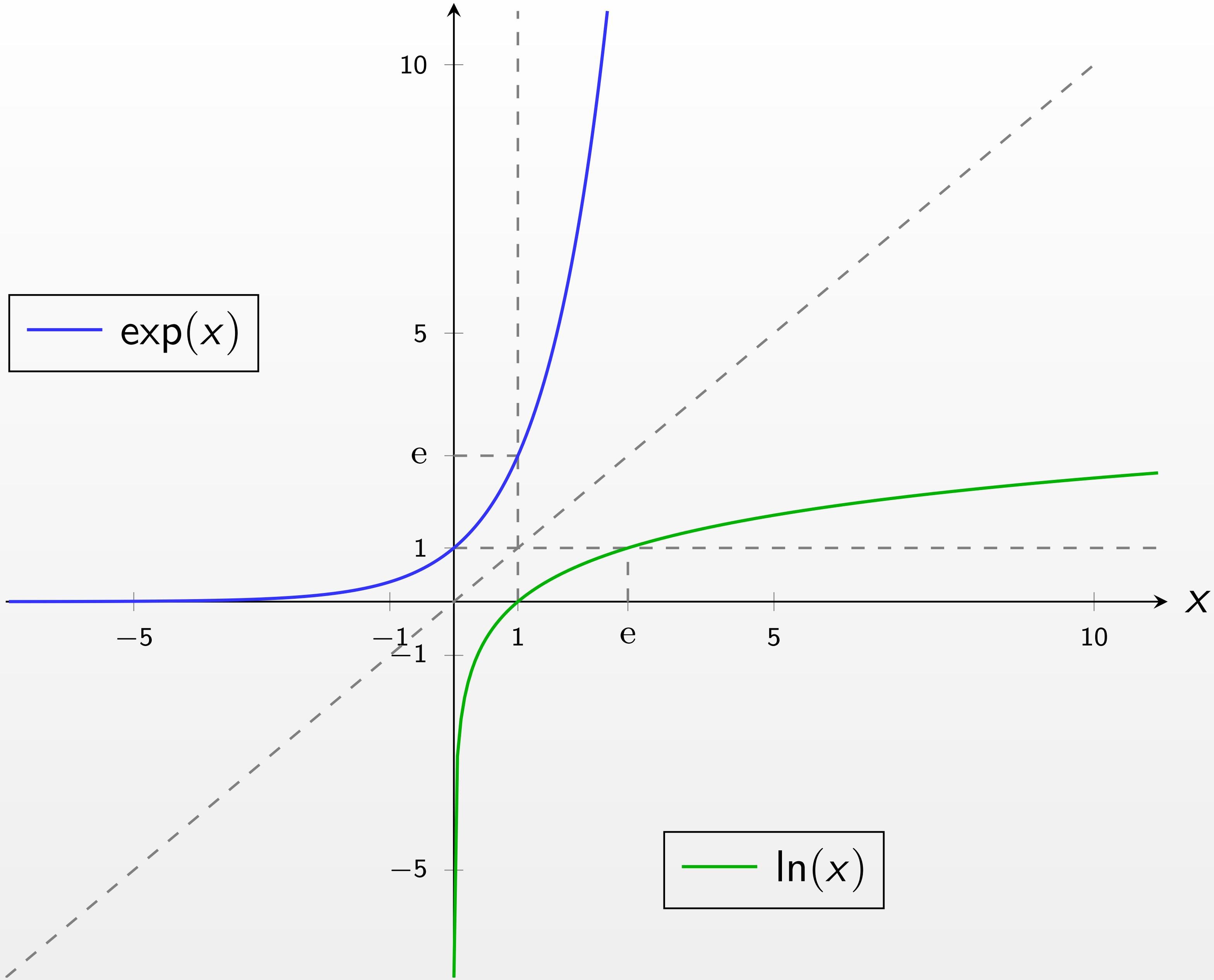


Abbildung: Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus

$\exp(x) = \mathrm{e}^x$

- für $n \in \mathbb{N}$ hatten wir bereits gezeigt

$$\exp(n) = \mathrm{e}^n \qquad \text{und} \qquad \exp(-n) = \mathrm{e}^{-n} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$$

- für $q = \frac{1}{n}$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der Funktionalgleichung

$$\mathrm{e} = \exp(1) = \exp\left(\frac{n}{n}\right) = \exp\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ Mal}}\Big) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \Rightarrow \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{\mathrm{e}}\,.$$

- für $q = \frac{m}{n}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ folgt dann wieder mit der Funktionalgleichung

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m \text{ Mal}}\Big) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left(\sqrt[n]{\mathrm{e}}\right)^m$$

- genauso erhalten wir für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ auch $\exp(m/n) = \left(\sqrt[n]{\mathrm{e}}\right)^m$
- schließlich zeigt die Stetigkeit von $\exp(\,\cdot\,)$ die Wohldefiniertheit von

$$\mathrm{e}^r = \exp(r) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \exp(q_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mathrm{e}^{q_n}$$

  für alle $r \in \mathbb{R}$ and $q_n \longrightarrow r$
- genauso zeigt man $\exp(r \cdot \tilde{r}) = \exp(r)^{\tilde{r}} = (\mathrm{e}^r)^{\tilde{r}}$ für alle $r, \tilde{r} \in \mathbb{R}$

Allgemeine Exponentialfunktion — a^x

- mit der e-Funktion und dem natürlichen Logarithmus kann man nun Exponentialfunktionen zu beliebigen Basen mithilfe $\exp(\ln(a)) = a$ definieren und die Eigenschaften übertragen

Definition

Die Funktion a^x für $a > 0$ wird auf ganz $\mathbb{R}$ durch

$$x \longmapsto \exp(x \cdot \ln(a)) = \big(\exp(\ln(a))\big)^x = a^x$$

definiert.

Korollar

Für jede reelle Zahl $a > 0$ hat die Exponentialfunktion $a^x = \exp(x \ln(a))$ zur Basis a folgende Eigenschaften

(*i*) $a^{x+y} = a^x a^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, (Funktionalgleichung)
(*ii*) a^x ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$,
(*iii*) falls $a > 1$, dann ist a^x streng monoton wachsend,
(*iv*) falls $a \in (0, 1)$, dann ist a^x streng monoton fallend
(*v*) für $a > 0$ und $a \neq 1$ ist $(0, \infty)$ das Bild von a^x und
(*vi*) a^x ist differenzierbar und $(a^x)' = (\exp(x \ln(a)))' = \exp'(x \ln(a)) \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$. $\square$

Allgemeine Logarithmusfunktion — $\log_a(x)$

- für $a > 0$ und $a \neq 1$ ist die Exponentialfunktionen a^x streng monoton und damit umkehrbar
- die Umkehrfunktion von a^x definiert die Logarithmusfunktion $\log_a(x)$

Korollar

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$. Der Logarithmus $\log_a \colon (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zur Basis a hat folgende Eigenschaften

(*i*) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ für alle $x,\ y > 0$, (Funktionalgleichung)

(*ii*) $\log_a(1) = 0$,

(*iii*) $\log_a(x)$ ist stetig auf ganz $(0, \infty)$,

(*iv*) falls $a > 1$, dann ist $\log_a(x)$ streng monoton wachsend,

(*v*) falls $a \in (0, 1)$, dann ist $\log_a(x)$ streng monoton fallend und

(*vi*) $\log_a(x)$ ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar und $\log_a'(x) = \frac{1}{a^{\log_a(x)} \cdot \ln(a)} = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$.

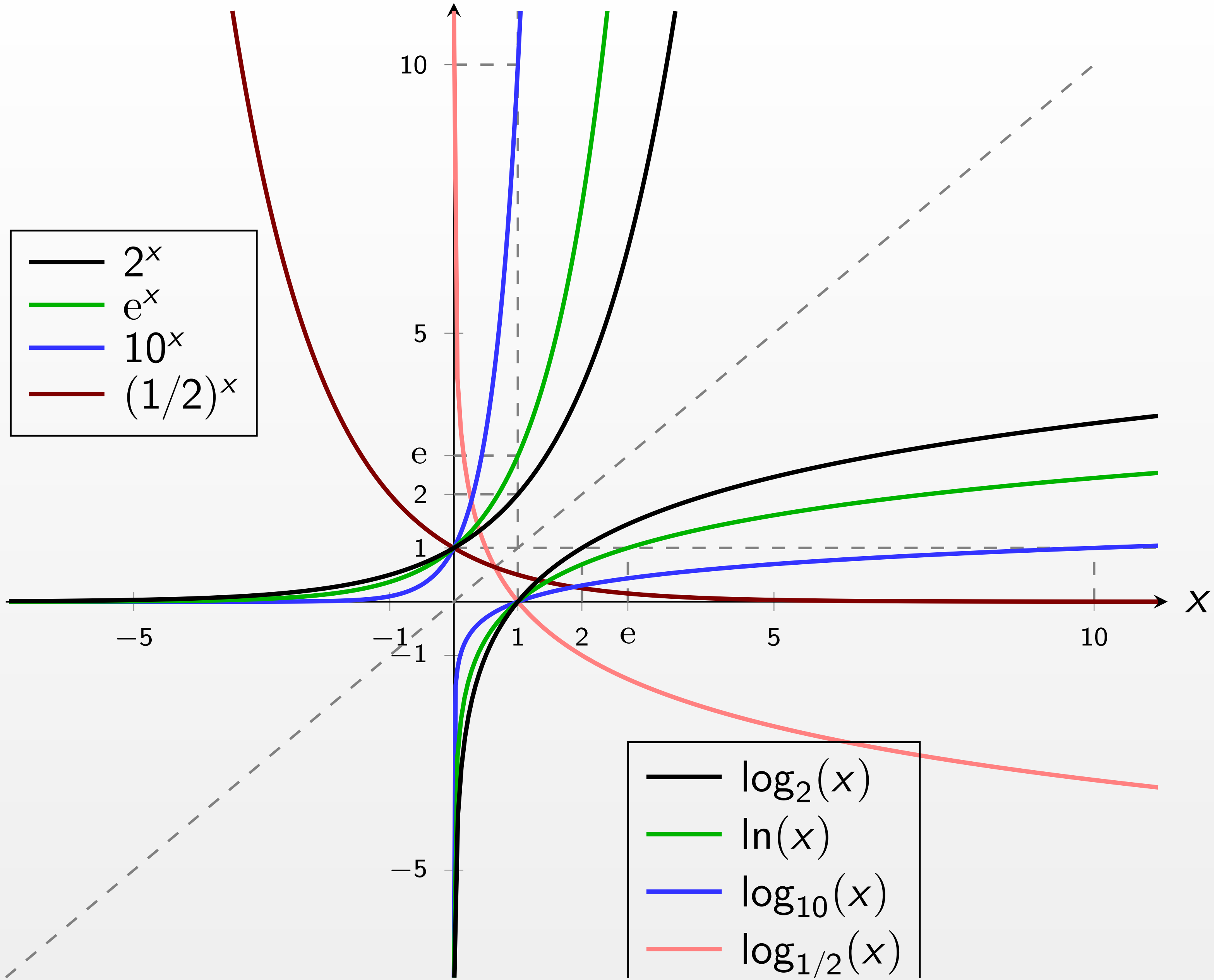


Abbildung: Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktionen

Potenzgesetze

Satz

Für reelle Zahlen a, $b > 0$ und x, $y \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Rechenregeln

(i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,

(ii) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$,

(iii) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ und

(iv) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

Beweis: Die erste Identität entspricht der Funktionalgleichung. Mithilfe der Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus, erhalten wir ganz ähnlich die zweite Rechenregel durch

$$(ab)^x = \exp(x\ln(ab)) = \exp(x(\ln(a)+\ln(b))) = \exp(x\ln(a)+x\ln(b)) = \exp(x\ln(a))\exp(x\ln(b)) = a^x b^x.$$

Für die dritte Identität beobachten wir zuerst, dass aus $a^x = \exp(x\ln(a))$ folgt

$$\ln(a^x) = \ln(\exp(x\ln(a))) = x\ln(a)\,.$$

Die gesuchte Identität ergibt sich dann durch

$$a^{x\cdot y} = \exp((x\cdot y)\ln(a)) = \exp(y\cdot x\ln(a)) = \exp(y\ln(a^x)) = \exp\big(\ln\big((a^x)^y\big)\big) = (a^x)^y\,.$$

Die letzte Rechenregel folgt aus der ersten und der Identität $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$, die wir durch

$$1 = \exp(0) = \exp(y\ln(a) - y\ln(a)) = \exp(y\ln(a))\cdot\exp(-y\ln(a)) = a^y \cdot a^{-y}$$

durch Umstellen erhalten. $\square$

Logarithmengesetze

Satz

Seien $a, x, y, r \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, $x > 0$, $y > 0$ und $a \neq 1$. Dann gilt

(i) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,
(ii) $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$,
(iii) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$,
(iv) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Beweis: Die erste Identität ist wieder die Funktionalgleichung. Die zweite Gleichung folgt aus

$$\ln(x) = \ln(a^{\log_a(x)}) = \ln(\exp(\log_a(x) \cdot \ln(a))) = \log_a(x) \cdot \ln(a)\,.$$

Die dritte Gleichung beweist man nun zuerst für den natürlichen Logarithmus

$$\ln(x^r) = \ln(\exp(r \ln(x))) = r \cdot \ln(x)$$

und mit (ii) erhalten wir

$$\log_a(x^r) = \frac{\ln(x^r)}{\ln(a)} = \frac{r \cdot \ln(x)}{\ln(a)} = r \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = r \cdot \log_a(x)\,.$$

Schließlich folgern wir (iv) aus (i)

$$\log_a(x \cdot \tfrac{1}{y}) = \log_a(x) + \log_a(1/y)$$

kombiniert mit der Beobachtung $\log_a(1/y) = -\log_a(y)$, die sich wie folgt ergibt

$$0 = \log_a(1) = \log_a(y \cdot \tfrac{1}{y}) = \log_a(y) + \log_a(1/y)\,. \qquad \square$$

Logarithmisches Differenzieren

- mithilfe der Potenzgesetze, der Kettenregel und $\exp'(\,\cdot\,) = \exp(\,\cdot\,)$ können wir verschiedene Ableitungen einfach berechnen

$f(x) = x^r$ für $r \in \mathbb{R}$ definiert auf $(0, \infty)$

$$f'(x) = \exp(\ln(x^r))' = \exp(r\cdot\ln(x))' = \exp'(r\cdot\ln(x))\cdot(r\cdot\ln(x))' = x^r\cdot\frac{r}{x} = r\cdot x^{r-1}\,.$$

$g(x) = x^x$ definiert auf $(0, \infty)$

$$g'(x) = \exp(\ln(x^x))' = \exp(x\cdot\ln(x))' = \exp'(x\cdot\ln(x))\cdot(x\cdot\ln(x))' = x^x\cdot(x\cdot\ln(x))'$$

und mit der Produktregel folgt

$$g'(x) = x^x\cdot\left(\ln(x) + \frac{x}{x}\right) = x^x + x^x\ln(x)\,.$$

Geometrische Definition der Winkelfunktionen

Eine weitere wichtige Funktionenklasse sind die trigonometrischen Funktionen, die wir hier geometrisch einführen. Diese Einführung appelliert an die geometrische Intuition und wir werden daher nicht alle hier getroffenen Aussagen beweisen können.

Für die geometrische Einführung betrachten wir den Einheitskreis, d. h. die Menge der Punkte (a, b) in der Ebene $\mathbb{R}^2$, die die Gleichung

$$a^2 + b^2 = 1$$

erfüllen. Der Einheitskreis besteht aus den Punkten der Ebene, deren Abstand zum Nullpunkt genau 1 ist. Es handelt sich also um den Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1.

Die Kreiszahl π ist die Hälfte des Umfangs des Einheitskreises. Der Einheitskreis hat also den Umfang 2π. Man kann zeigen, dass π irrational ist, dass also $\pi \notin \mathbb{Q}$ gilt. Die ersten Dezimalstellen von π lauten wie folgt

$$\pi = 3.1415926535\ldots$$

Trigonometrische Funktionen

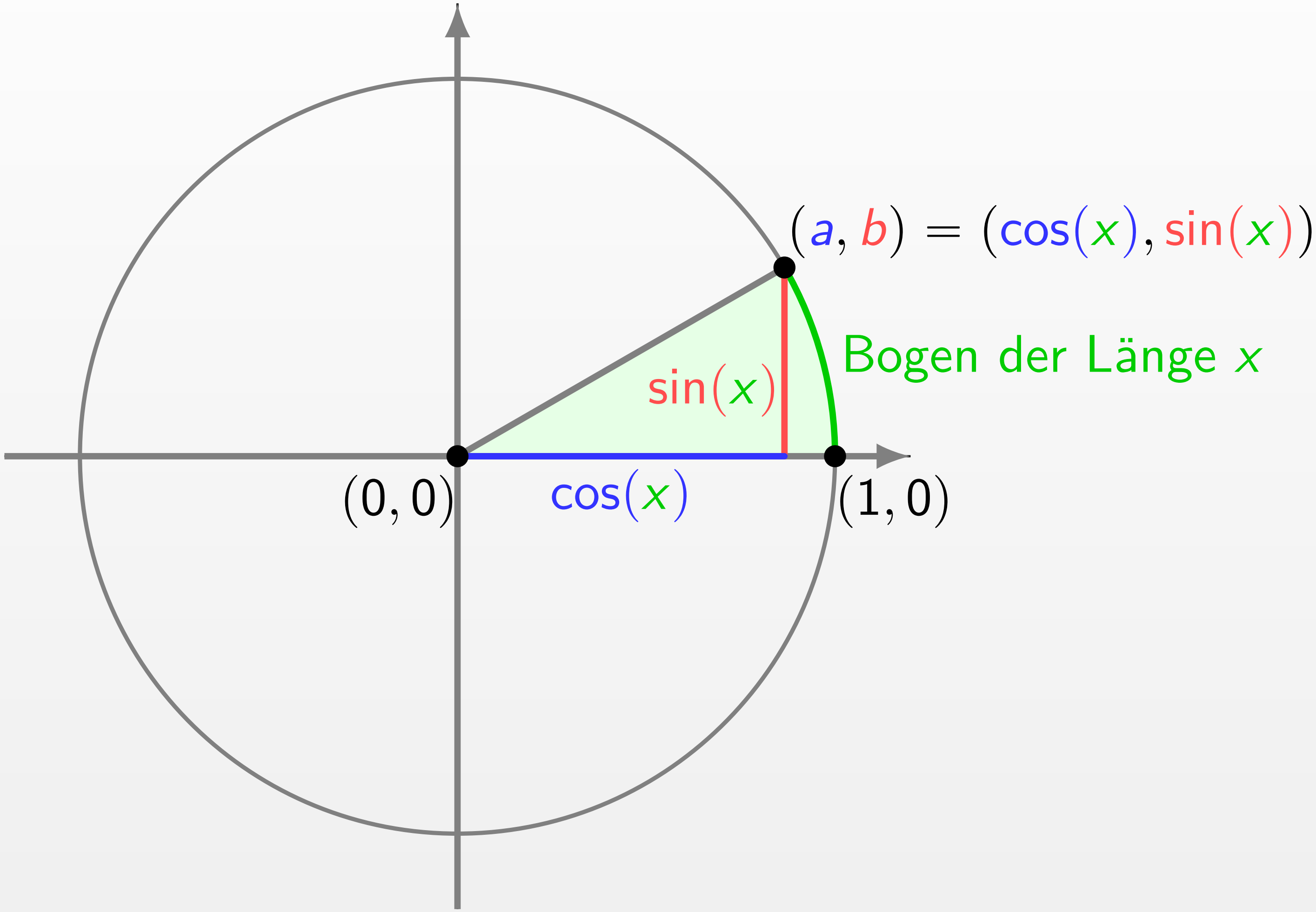


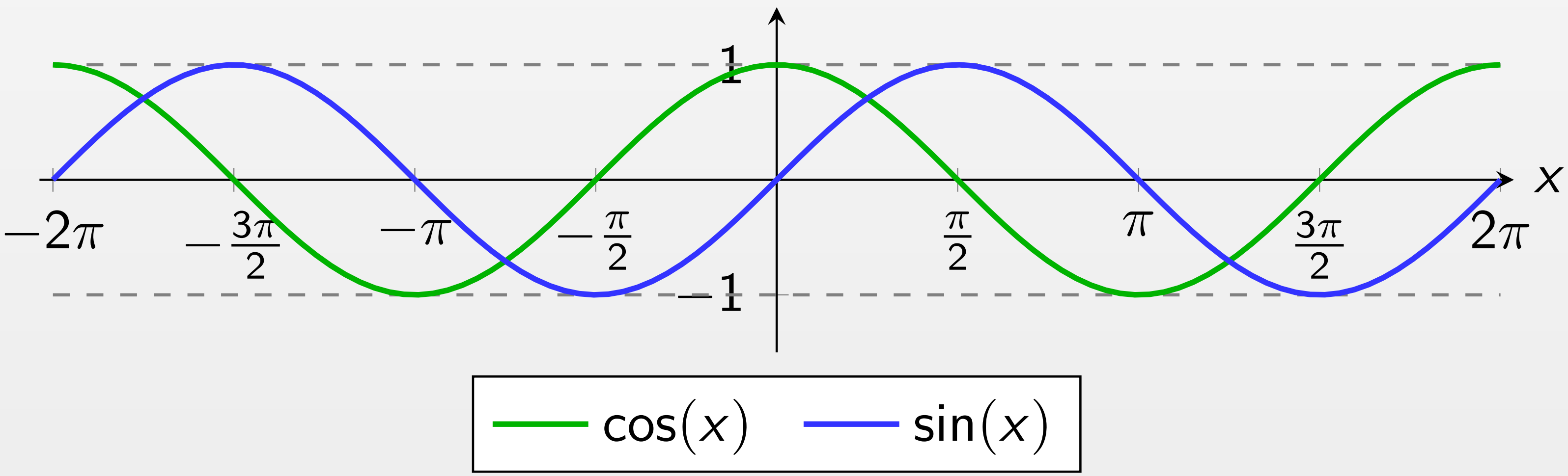
Abbildung: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Sinus und Kosinus

Sei nun $x \in [0, \infty)$. Wir durchlaufen den Einheitskreis ausgehend von dem Punkt $(1, 0)$ entgegen dem Uhrzeigersinn bis die Länge des durchlaufenen Bogens genau x ist. Sei (a, b) der Punkt, an dem wir zum stehen kommen. Wir definieren nun

$$\cos(x) := a \qquad \text{und} \qquad \sin(x) := b\,.$$

Dadurch haben wir die Funktionen $\cos, \sin \colon [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert. Wir können diese Funktionen auf negative Zahlen fortsetzen, indem wir im Falle $x < 0$ den Kreis im Uhrzeigersinn durchlaufen. Die beiden Funktionen sin (gelesen Sinus) und cos (gelesen Kosinus) sind also auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.



Analytische Definitionen der Winkelfunktionen

Für eine mathematisch präzise Einführung benutzt man in der Analysis die Fortsetzung der Exponentialfunktion auf die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, z. B. durch $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für $z \in \mathbb{C}$. Für $x \in \mathbb{R}$ zeigt sich dann

$$|\exp(\mathbf{i}x)|^2 = \exp(\mathbf{i}x)\overline{\exp(\mathbf{i}x)} = \exp(\mathbf{i}x)\exp(-\mathbf{i}x) = \exp(0) = 1\,,$$

d. h. die Punkte $\exp(\mathbf{i}x)$ liegen auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene und man definiert Kosinus und Sinus über die Euler'sche Formel

$$\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} = \cos(x) + \mathbf{i}\sin(x)\,.$$

Trennt man in der Reihendarstellung $\exp(\mathbf{i}x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{i}^n x^n}{n!}$ Real- und Imaginärteil, so erhält man die reellen Reihendarstellungen

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

$$\sin(0) = 0, \quad \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin(\tfrac{3\pi}{2}) = -1, \quad \sin(2\pi) = 0,$$
$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos(\tfrac{3\pi}{2}) = 0, \quad \cos(2\pi) = 1.$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichungen

$$\cos(2\pi n + x) = \cos(x) \qquad \text{und} \qquad \sin(2\pi n + x) = \sin(x)$$

und somit sind die Funktionen Sinus und Kosinus also periodisch mit einer Periode der Länge 2π. Weiterhin gilt

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1\,.$$

Offensichtlich gelten folgende Symmetrien

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \text{und} \qquad \cos(-x) = \cos(x)\,.$$

Funktionen mit der Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ nennt man ungerade Funktionen, da Polynome, in denen nur ungerade Exponenten auftreten, diese Eigenschaft haben und analog heißen Funktionen mit der Eigenschaft $f(x) = f(-x)$ gerade.

Konsequenzen der Euler-Formel $\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} = \cos(x) + \mathbf{i}\sin(x)$

Satz

(*a*) Die Funktionen cos und sin sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

(*b*) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Additionstheoreme

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\,,$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,.$$

(*c*) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten die Identitäten

$$\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\,, \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x)\,,$$
$$\cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)\,, \qquad \cos(x+\pi) = -\cos(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin(x^2)\,.$$

Beweis: Teil (*a*) ergibt sich daraus, dass die komplexe Fortsetzung der Exponentialfunktion stetig ist.

Die Additionstheoreme ergeben sich aus der Funktionalgleichung $\mathrm{e}^{\mathbf{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}x}\mathrm{e}^{\mathbf{i}y}$

$$\cos(x+y)+\mathbf{i}\sin(x+y) = \cos(x)\cos(y)+\cos(x)\cdot\mathbf{i}\sin(y)+\mathbf{i}\sin(x)\cos(y)+\mathbf{i}^2\sin(x)\sin(y)\,.$$

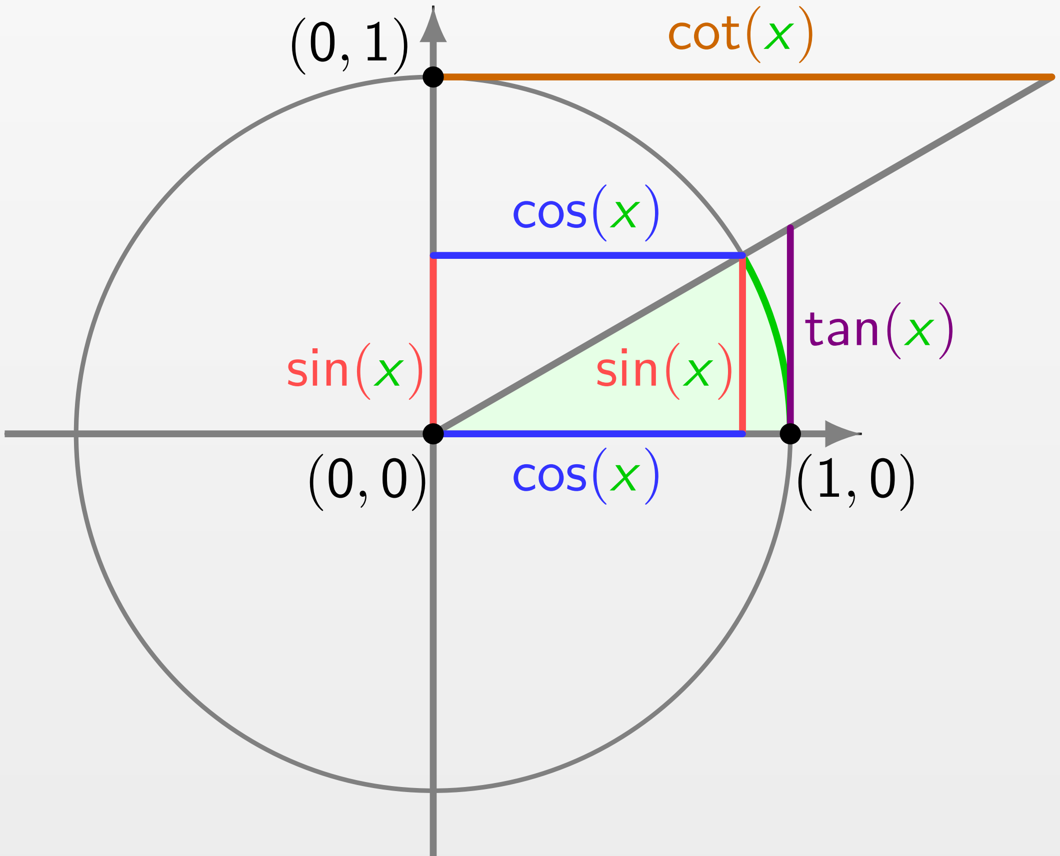
Schließlich rechnet man die Identitäten mit den Additionstheoremen nach. □

Tangens und Kotangens

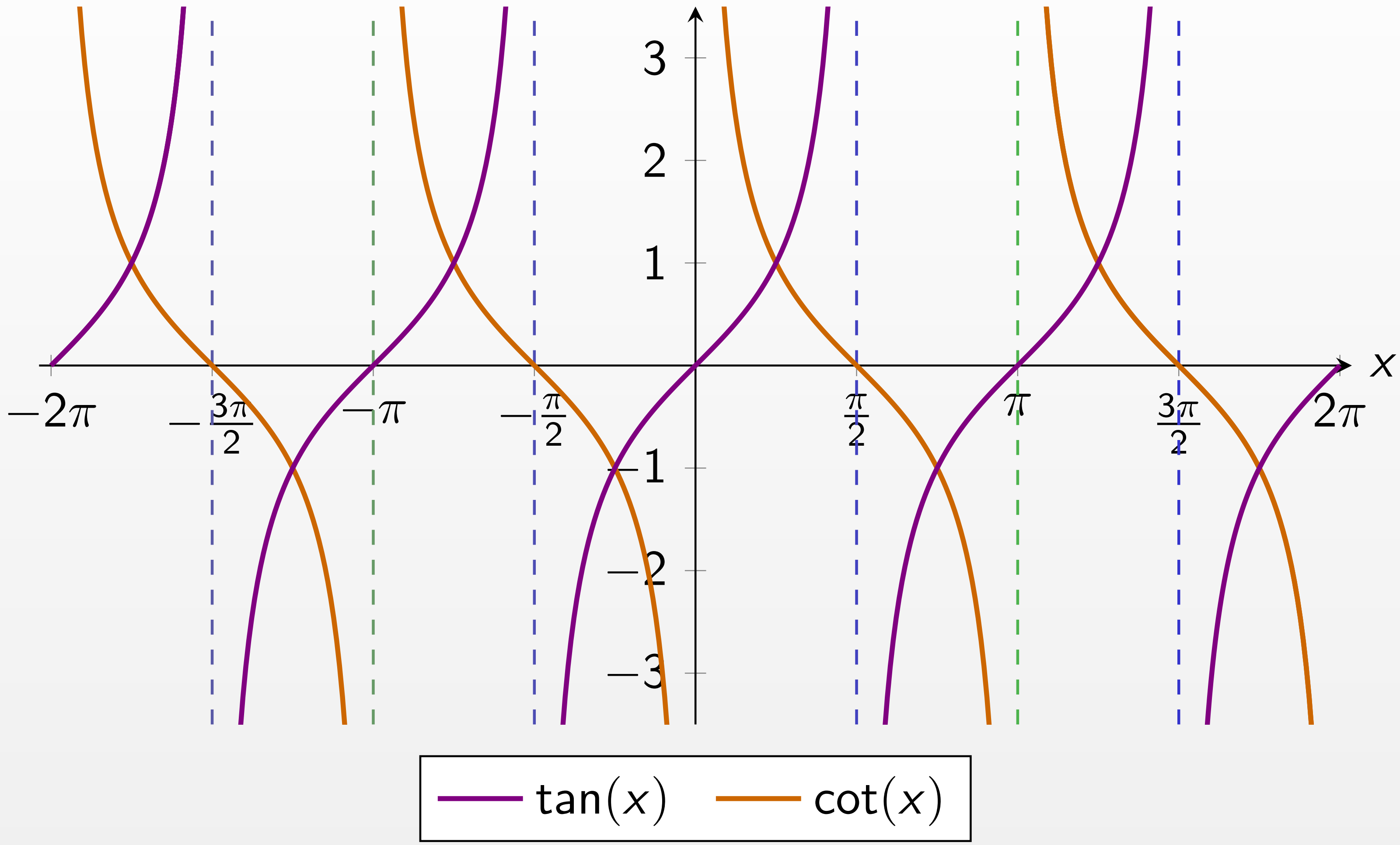
Die Verhältnisse von sin und cos definieren den Tangens und Kotangens

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \cos(x) \neq 0,$$

$$\text{und } \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \sin(x) \neq 0.$$

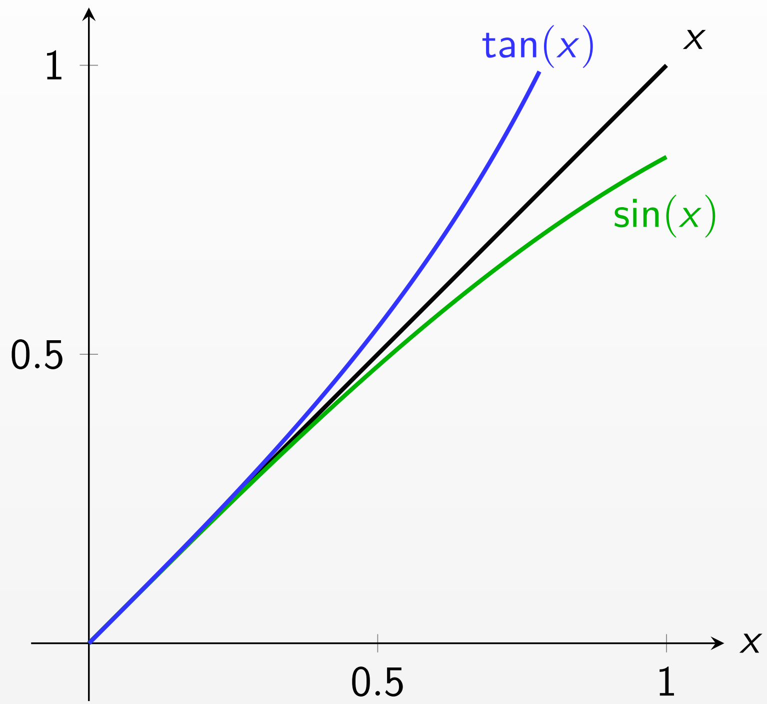


Stetigkeit von Tangens and Kotangens



- tan und cot sind Quotienten stetiger Funktionen und somit stetig auf ihrem Definitionsbereich
- beide Funktionen lassen sich nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen

Nützliche Abschätzungen



- Für alle x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\sin(x) < x < \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{und} \quad 1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)\,.$$

- Mithilfe der Symmetrien folgt für alle x mit $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ gilt:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < x < \sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(x) > \frac{\sin(x)}{x} > 1\,.$$

$\Rightarrow$ Stetigkeit des Kosinus impliziert somit $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1.$

Differnzierbarkeit trigonometrischer Funktionen

Satz

Die Funktionen sin, cos, tan und cot sind an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar und es gilt

$$\sin'(x) = \cos(x)\,, \qquad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\,,$$
$$\cos'(x) = -\sin(x)\,, \qquad \cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)\,.$$

Beweis: Wir zeigen nur $\sin'(x) = \cos(x)$ und die anderen Ableitungen folgen aus den Identitäten $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ und $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$ und der Quotientenregel. Mit dem Additionstheorem erhalten wir

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h)}{h}\,.$$

Wir wissen bereits $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ und $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x)$ folgt mit

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{\cos^2(h)-1}{h(\cos(h)+1)} = \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h)+1)} = -\frac{\sin(h)}{h}\cdot\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1} \xrightarrow{h\longrightarrow 0} -1\cdot 0\,. \qquad \square$$

Trigonometrische Umkehrfunktionen

- $\sin(x)$ ist auf $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ stetig, streng monoton und bildet I auf $[-1, 1]$ ab

$\Rightarrow$ sin ist eingeschränkt auf I umkehrbar und dies definiert den Arkussinus
$\arcsin\colon [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

- analog definieren wir:

$$\arccos\colon [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \qquad \text{(Arkuskosinus)}$$
$$\arctan\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \qquad \text{(Arkustangens)}$$
$$\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi) \qquad \text{(Arkuskotangens)}$$

- die Umkehrfunktionen sind stetig, streng monoton und mit der Umkehrregel erhalten wir:

Satz

Arkussinus und Arkuskosinus sind auf $(-1, 1)$ differenzierbar und Arkustangens und Arkuskotangens sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad \operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}\,. \qquad \square$$

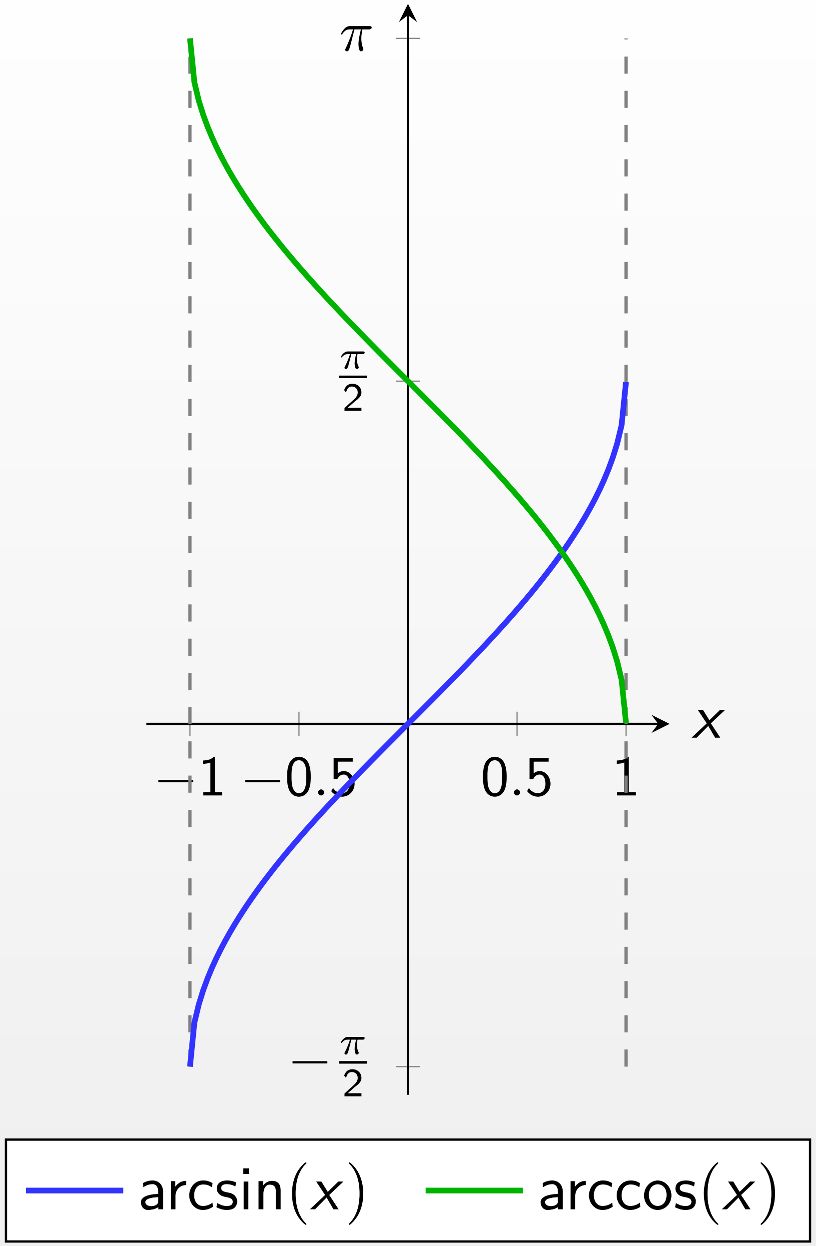


Abbildung: Umkehrfunktionen vom Sinus und Kosinus

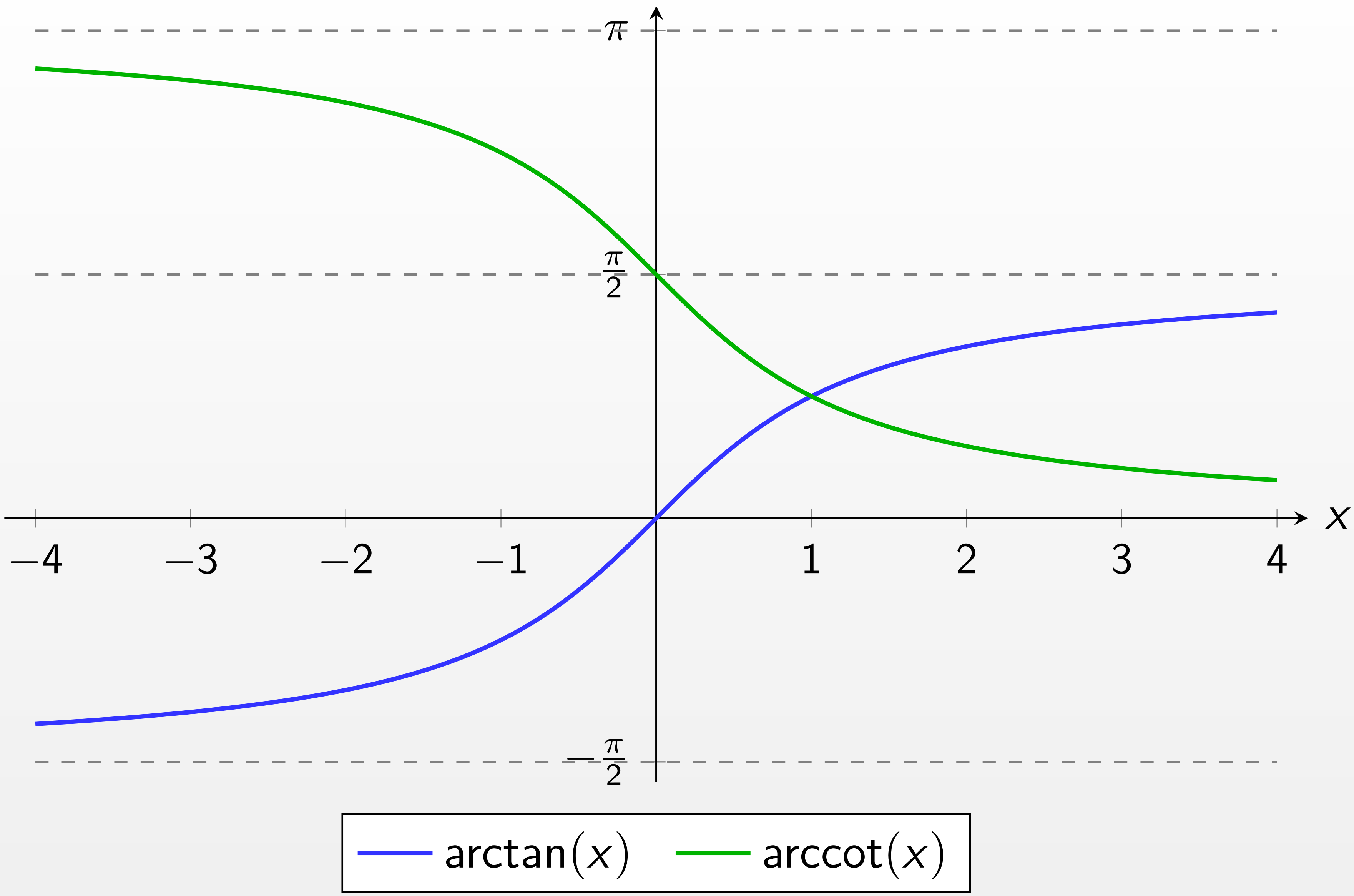


Abbildung: Umkehrfunktionen vom Tangens und Kotangens

Polarkoordinaten komplexer Zahlen

- wir identifizieren die komplexe Zahl $a + \mathbf{i}b$ mit dem Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- der Punkt (a, b) ist auch eindeutig durch den Winkel φ des Vektors (a, b) mit der x-Achse und seine Länge $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ bestimmte
- mit den trigonometrischen Funktionen erhalten wir also

$$a + \mathbf{i}b = r \cdot \big(\cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi)\big) = r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi}$$

und wir können φ über die Umkehrfunktion in den entsprechenden Definitionsbereichen berechnen solange $r \neq 0$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{a}{r}\right), & \text{falls } b \geqslant 0 \quad (\Leftrightarrow 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi) \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{a}{r}\right), & \text{falls } b < 0 \quad (\Leftrightarrow -\pi < \varphi < 0). \end{cases}$$

$\Rightarrow$ in Polarkoordinaten vereinfacht sich die komplexe Multiplikation durch die Funktionalgleichung (bzw. die Additionstheoreme)

$$r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi} \cdot s\mathrm{e}^{\mathbf{i}\psi} = (r \cdot s)\mathrm{e}^{\mathbf{i}(\varphi+\psi)} = (r \cdot s)\big(\cos(\varphi + \psi) + \mathbf{i}\sin(\varphi + \psi)\big)$$

zur reellen Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel

Fundamentalsatz der Algebra

„Wurzeln komplexer Zahlen“

Für alle $z \in \mathbb{C}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine komplexe Zahl ζ mit $\zeta^n = z$.
Beweis: Sei nämlich z in Polarkoordinaten durch den Winkel φ und den Betrag r gegeben. Dann erfüllt

$$\zeta := \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\varphi}{n}\right) .$$

die Gleichung $\zeta^n = z$. $\square$

Tatsächlich lassen sich in den komplexen Zahlen alle Polynomgleichungen lösen. Dies besagt der Fundamentalsatz der Algebra, den wir hier ohne Beweis nur angeben.

Fundamentalsatz der Algebra)

Für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad $\geqslant 1$ existiert eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = 0$. Insbesondere zerfällt jedes nicht-konstante Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. $\square$

Globale und lokale Extrema von Funktionen

Definition

Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Wir sagen, f hat ein globales (oder auch absolutes) Maximum an der Stelle $\hat{x} \in [a,b]$, falls $f(\hat{x})$ das größte Element der Menge

$$f\big([a,b]\big) = \{f(x) \colon x \in [a,b]\}$$

  ist, d. h. $f(\hat{x}) = \sup\{f(x) \colon x \in (a,b)\}$.
- Wir sagen, f hat ein lokales Maximum an der Stelle $\hat{x} \in (a,b)$, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$ gilt

$$f(\hat{x}) \geqslant f(x)\,.$$

- Analog definiert man absolute und lokale Minima.
- Ein globales/lokales Maximum oder Minimum nennt man auch Extremum oder Extremwert von f.

Stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen haben Extrema

Satz

Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existieren $x_{\max}, x_{\min} \in [a,b]$, so dass f bei $x_{\max}$ ein absolutes Maximum hat und bei $x_{\min}$ ein absolutes Minimum.

Beweis: Sei $M := \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$. Hierbei erlauben wir zuerst einmal auch $M = \infty$ für den Fall, dass f nicht nach oben beschränkt ist. In jedem Fall gibt es ein Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in [a,b]$, für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = M$. Da das Intervall $[a,b]$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uns sei $\lim_{k\longrightarrow\infty} x_{n_k} = x_{\max}$.
Wir können leicht einsehen, dass $x_{\max}$ in dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ liegt. Wäre nämlich $x_{\max} < a$, dann würde für $\delta = (a - x_{\max})/2$ kein Folgenglied von $x_{n_k} \in [a,b]$ einen Abstand kleiner δ zu $x_{\max}$ haben, was $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} x_{n_k} = x_{\max}$ widerspricht. Genauso zeigt man $x_{\max} \leqslant b$ uns somit gilt $x_{\max} \in [a,b]$.
Schließlich folgt aus der Stetigkeit von f

$$f(x_{\max}) = \lim_{k\longrightarrow\infty} f(x_{n_k}) = M\,.$$

Insbesondere gilt also $M \in \mathbb{R}$ und f hat an der Stelle $x_{\max} \in [a,b]$ ein globales Maximum. Der Beweis für die Existenz des globalen Minimums ist analog. $\square$

Notwendiges Kriterium lokaler Extrema

Satz

Sei $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $\hat{x} \in (a,b)$ differenzierbar. Hat f an der Stelle $\hat{x}$ ein (lokales) Extremum, so ist $f'(\hat{x}) = 0$.

Beweis: Wir betrachten den Fall, dass f bei $\hat{x}$ ein lokales Maximum hat. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n = \hat{x} - \frac{1}{n}$. Da f bei $\hat{x}$ ein lokales Maximum hat, gilt für genügend große n die Ungleichung

$$\frac{f(x_n) - f(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} \geqslant 0\,.$$

Definieren wir $y_n = \hat{x} + \frac{1}{n}$, so gilt für genügend große n die Ungleichung

$$\frac{f(y_n) - f(\hat{x})}{y_n - \hat{x}} \leqslant 0\,.$$

Da f bei $\hat{x}$ differenzierbar ist, gilt

$$0 \leqslant \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{f(x_n) - f(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} = f'(\hat{x}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{f(y_n) - f(\hat{x})}{y_n - \hat{x}} \leqslant 0\,.$$

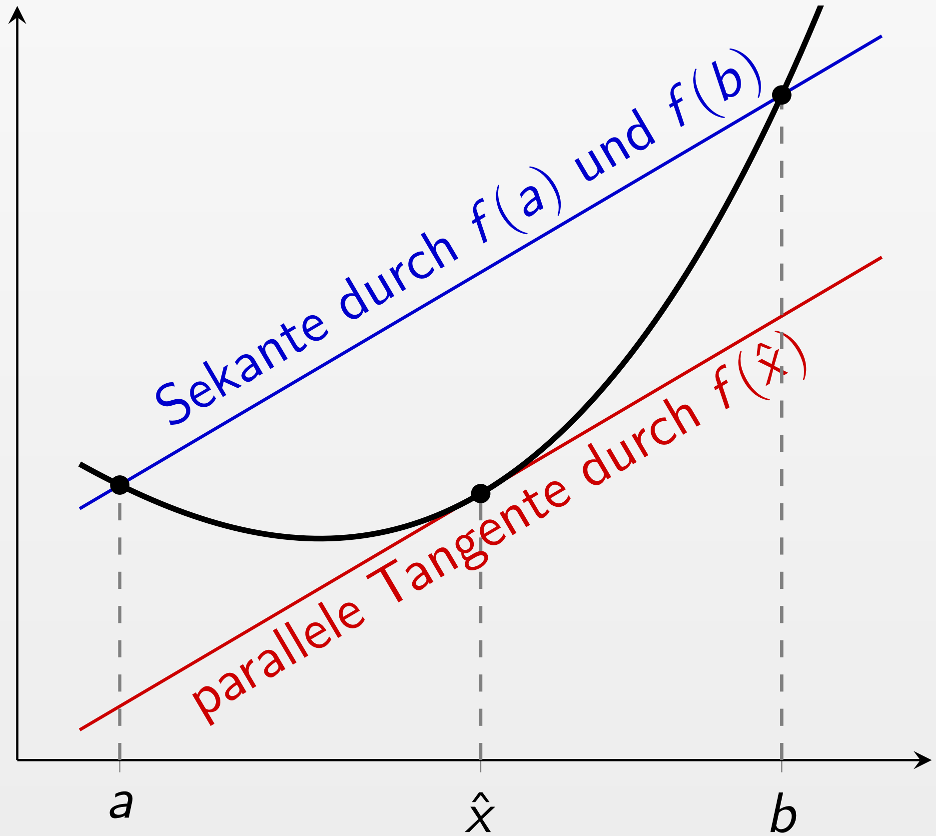
Damit ist $f'(\hat{x}) = 0$. □

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig und auf dem offen Intervall (a,b) differenzierbar. Dann gibt es mindestens ein $\hat{x} \in (a,b)$ mit

$$f'(\hat{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$



Beweis des MWS der Differentialrechung

Beweis: Zuerst beweisen wir den Spezialfall $f(a) = f(b)$, der auch als *Satz von Rolle* bekannt ist. Sei also $f(a) = f(b)$. Falls f konstant ist, dann ist $f'(x) = 0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ für alle $x \in (a, b)$ und somit können wir annehmen, dass f nicht konstant ist. Dann gibt es aber ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) \neq f(a)$. O. B. d. A. sei $f(x_0) < f(a)$. Somit wird das existierende globale Minimum von f irgendwo in dem offenen Intervall (a, b) angenommen und sei $x_{\min} \in (a, b)$ so gewählt. Mit dem notwendigen Krierium folgt $f'(x_{\min}) = 0$, was den Beweis des Satzes von Rolle abschließt.
Den allgemeinen Fall des Mittelwertsatzes führen wir auf den Spezialfall zurück. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Diese Funktion ist stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Da $g(a) = g(b) = 0$, gibt es nach dem Satz von Rolle ein $\hat{x} \in (a, b)$ mit $g'(\hat{x}) = 0$ und es folgt

$$0 = g'(\hat{x}) = f'(\hat{x}) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Longrightarrow \quad f'(\hat{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \qquad \square$$

Konsequenzen des MWS

Korollar

Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig und auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar. Falls $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf dem Intervall $[a,b]$ konstant.

Beweis: $f(x_1) \neq f(x_2) \Longrightarrow \hat{x}$ mit $f'(\hat{x}) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0.$ ↯ □

Korollar

Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig und auf dem offen Intervall (a,b) differenzierbar. Dann gilt:

(*i*) falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf $[a,b]$ streng monoton wachsend.

(*ii*) falls $f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend.

(*iii*) falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf $[a,b]$ streng monoton fallend.

(*iv*) falls $f'(x) \leqslant 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf $[a,b]$ monoton fallend.

Beweis: Ebenso. □

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

Korollar

Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf (a,b) differenzierbar und für $\hat{x} \in (a,b)$ sei $f'(\hat{x}) = 0$.

(*a*) Falls für ein $\delta > 0$ gilt $f'(x) \geqslant 0$ auf dem Intervall $(\hat{x}-\delta, \hat{x})$ und $f'(x) \leqslant 0$ auf dem Intervall $(\hat{x}, \hat{x}+\delta)$. Dann hat f bei $\hat{x}$ ein lokales Maximum.

(*b*) Falls für ein $\delta > 0$ gilt $f'(x) \leqslant 0$ auf dem Intervall $(\hat{x}-\delta, \hat{x})$ und $f'(x) \geqslant 0$ auf dem Intervall $(\hat{x}, \hat{x}+\delta)$. Dann hat f bei $\hat{x}$ ein lokales Minimum.

Beweis: Wir zeigen nur (*a*). Sei $x \in (\hat{x}-\delta, \hat{x}+\delta)$. Falls $x \leqslant \hat{x}$ gilt, so ist f auf dem Intervall $[x, \hat{x}]$ monoton wachsend. Also ist $f(x) \leqslant f(\hat{x})$.

Falls $x \geqslant \hat{x}$ gilt, so ist f auf dem Intervall $[\hat{x}, x]$ monoton fallend. Es folgt wieder $f(x) \leqslant f(\hat{x})$. Das zeigt, dass f bei $\hat{x}$ ein lokales Maximum hat. $\square$

Korollar

Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf (a,b) zweimal differenzierbar und für $\hat{x} \in (a,b)$ sei $f'(\hat{x}) = 0$.

(*a*) Ist $f''(\hat{x}) < 0$, so hat f an der Stelle $\hat{x}$ ein lokales Maximum.

(*b*) Ist $f''(\hat{x}) > 0$, so hat f an der Stelle $\hat{x}$ ein lokales Minimum.

Beweis: Es gilt $0 > f''(\hat{x}) = \lim_{x \longrightarrow \hat{x}} \frac{f'(x)-f'(\hat{x})}{x-\hat{x}}$. Damit gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in (\hat{x}-\delta, \hat{x}+\delta)$ die Ungleichung $\frac{f'(x)-f'(\hat{x})}{x-\hat{x}} < 0$ gilt. Also gilt für alle $x \in (\hat{x}-\delta, \hat{x}]$ die Ungleichung $f'(x) > f'(\hat{x})$. Da $f'(\hat{x}) = 0$ gilt, folgt daraus $f'(x) > 0$ für alle $x \in (\hat{x}-\delta, \hat{x}]$. Analog sieht man, dass $f'(x) < 0$ für alle $x \in [\hat{x}, \hat{x}+\delta)$ gilt. Somit hat f also ein lokales Maximum bei $\hat{x}$. $\square$

Nullstellen berechnen

- Nullstellen von Polynomen zweiten Grades mit Hilfe der p-q-Formel bestimmen
- für Polynome dritten und vierten Grades existieren komplizierte Formeln
- für Polynome mit Grad $\geqslant 5$ und andere Funktionen f, gibt es im allgemeinen keine Formeln

- es gibt numerische Verfahren, wie das Newton–Verfahren, um Nullstellen differenzierbarer Funktionen zu approximieren:
  (*1*) wähle einen Aussgangspunkt x_0 „nahe" der Nullstelle
  (*2*) bestimme die Nullstelle x_1 der linearen Approximation, d. h. von der Tangentengleichung in $f(x_0)$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{und} \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

  (*3*) wenn f hinreichend gute Eigenschaften hat, dann liegt x_1 dichter an einer Nullstelle von f und wir können das Verfahren iterieren:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Newton-Verfahren

Satz

Die Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen:

(*i*) für alle $x \in [a,b]$ gilt $f''(x) \geqslant 0$, d. h. die Funktion f ist konvex,

(*ii*) für alle $x \in [a,b]$ gilt $f'(x) \neq 0$,

(*iii*) und $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$.

Dann existiert eine eindeutige Nullstelle c von f im Intervall (a,b) und für jeden Startwert $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \geqslant 0$ konvergiert die Folge (x_n) definiert durch die Vorschrift

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

gegen c.

Bemerkungen:

- Satz gilt auch für konkave Funktionen, d. h. wenn $f''(x) \leqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$
- außerdem kann auch die Bedingung (*iii*) umgekehrt werden
- Weiterhin kann man zeigen, dass das Newton-Verfahren quadratisch konvergiert. Grob gesprochen bedeutet dies, dass wenn x_i die Nullstelle bereits auf einen Fehler $\xi < 1$ approximiert, dann approximiert x_{i+1} die Nullstelle bereits auf $c\xi^2$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis des Newton-Verfahren

Aus der Existenz von f'' folgt, dass f und f' stetig sind und Bedingung (iii) mit dem Zwischenwertsatz zeigt, dass f in (a, b) eine Nullstelle hat. Aufgrund von Bedingung (ii) ist f auf $[a, b]$ streng monoton und wegen Bedingung (iii) ist f streng monoton steigend und die Eindeutigkeit der Nullstelle c folgt.

Aus der Stetigkeit von f und f' folgt, dass nur c als möglicher Grenzwert von (x_n) in Frage kommt, da für den potenziellen Grenzwert $\hat{x} = \hat{x} - f(\hat{x})/f'(\hat{x}) \Leftrightarrow f(\hat{x}) = 0$ gelten muss.

Wegen der Bedingung (i) ist die Funktion f' monoton wachsend auf $[a, b]$ und wegen Bedingungen (ii) und (iii) ist der Quotient $f(x)/f'(x)$ nicht negativ für alle $x \in [c, b]$ und x_0 liegt nach Annahme des Satzes auch in $[c, b]$.

Induktiv zeigen wir

$$c \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \,.$$

Die Ungleichung $x_{n+1} \leqslant x_n$ folgt direkt mit Induktion, da $f(x_n)/f'(x_n) \geqslant 0$ gilt.

Für die Ungleichung $c \leqslant x_{n+1}$ ist es hinreichend, $f(x_{n+1}) \geqslant 0$ zu überprüfen. Dafür betrachten wir die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) \,.$$

Wegen der Monotonie von f' gilt $g'(x) = f'(x) - f'(x_n) \leqslant 0$ und da $g(x_n) = 0$ gilt, ist $g(x) \geqslant 0$ für $x \leqslant x_n$. Insbesondere gilt

$$0 \leqslant g(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)\Big(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n\Big) = f(x_{n+1}) \,.$$

Die Folge (x_n) ist also fallend und durch c beschränkt. Da sie sogar streng fällt solange c nicht erreicht ist und nur c als Grenzwert haben kann, konvergiert die Folge gegen c. $\square$

Wurzeln mit dem Newton-Verfahren berechnen

Wir wollen das Newton-Verfahren benutzen, um $\sqrt{2}$ zu berechnen, welches die eindeutig bestimmte Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ in dem Intervall $[1, 3]$ ist. Es gilt $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$. Damit erfüllt f auf dem Intervall $[1, 3]$ die Bedingungen des Newton-Verfahrens.

Die Rekursionsvorschrift, die die Folge (x_n) definiert, lautet

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Wir starten mit $x_0 = 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= 1,5 \\
x_2 &= 1,416666666\ldots \\
x_3 &= 1,414215686\ldots \\
x_4 &= 1,414213562\ldots
\end{aligned}$$

Die Zahl x_4 entspricht bereits auf neun Nachkommastellen dem Wert von

$$\sqrt{2} = 1,414213562\,37\ldots.$$

Regeln von L'Hospital

Die Bestimmung eines Grenzwertes der Form

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ist problematisch, wenn Zähler und Nenner für $x \longrightarrow x_0$ beide gegen 0 oder beide gegen ∞ streben. Die Regeln von L'Hospital helfen in dieser Situation.

Satz (Regel von L'Hospital für 0)

Sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktionen f und g seien für alle $x \in I$ mit $x \neq x_0$ differenzierbar. Für alle $x \in I$ mit $x \neq x_0$ gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$. Ferner sei

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = 0\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

falls der rechte Grenzwert existiert oder gleich ∞ oder $-\infty$ ist.

Ein entsprechender Satz gilt für $x \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty$ anstelle von $x \longrightarrow x_0$.

Regel von L'Hospital für ∞

Satz (Regel von L'Hospital für ∞)

Sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktionen f und g seien für alle $x \in I$ mit $x \neq x_0$ differenzierbar. Für alle $x \in I$ mit $x \neq x_0$ gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$. Ferner sei

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \longrightarrow x_0} |g(x)| = \infty\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

falls der rechte Grenzwert existiert oder gleich ∞ oder $-\infty$ ist.

Entsprechender Satz gilt für $x \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty$ anstelle von $x \longrightarrow x_0$.

Beispiele für L'Hospital

$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{e^x-1}{3x}\right)$ für $x \longrightarrow 0$

Für $x \longrightarrow 0$ streben Zähler und Nenner des Bruches gegen 0. Für $x \neq 0$ gilt $3x \neq 0$. Außerdem sind $e^x - 1$ und $3x$ differenzierbar. Damit gilt

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

$\frac{3x+1}{2x-1}$ für $x \longrightarrow \infty$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x-1} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

Beispiele für L'Hospital mit Mehrfachanwendung

$\frac{e^x}{x^2-x+1}$ für $x \longrightarrow \infty$

Zweifache Anwendung von L'Hospital liefert:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^x}{x^2 - x + 1} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^x}{2x-1} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Dieses Argument funktioniert für jedes Polynom $p(x)$, wobei man so oft differenzieren muss, bis $p^{(n)}(x)$ konstant ist. Der Grenzwert ist in diesem Fall ∞ oder $-\infty$ und wir sagen, dass e^x schneller als jedes Polynom wächst.

Stetige Fortsetzung von $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^x$ für $x = 0$

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt

$$\lim_{x\longrightarrow 0} x^x = \lim_{x\longrightarrow 0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\longrightarrow 0} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\longrightarrow 0} x \ln x},$$

falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\ln x$ existiert. Um L'Hospital anzuwenden, betrachten wir $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x}$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} x\ln x = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\longrightarrow 0} -x = 0\,.$$

Somit ist $\lim_{x\longrightarrow 0} x^x = e^0 = 1$ und f mit $f(0) = 1$ stetig fortsetzbar.

8. Integralrechnung

Leitfragen der Integralrechnung

Flächeninhaltsproblem

Wie bestimmt man den Flächeninhalt von Flächen die nicht durch gerade Linien/lineare Funktionen berandet sind?

Stammfunktionsproblem

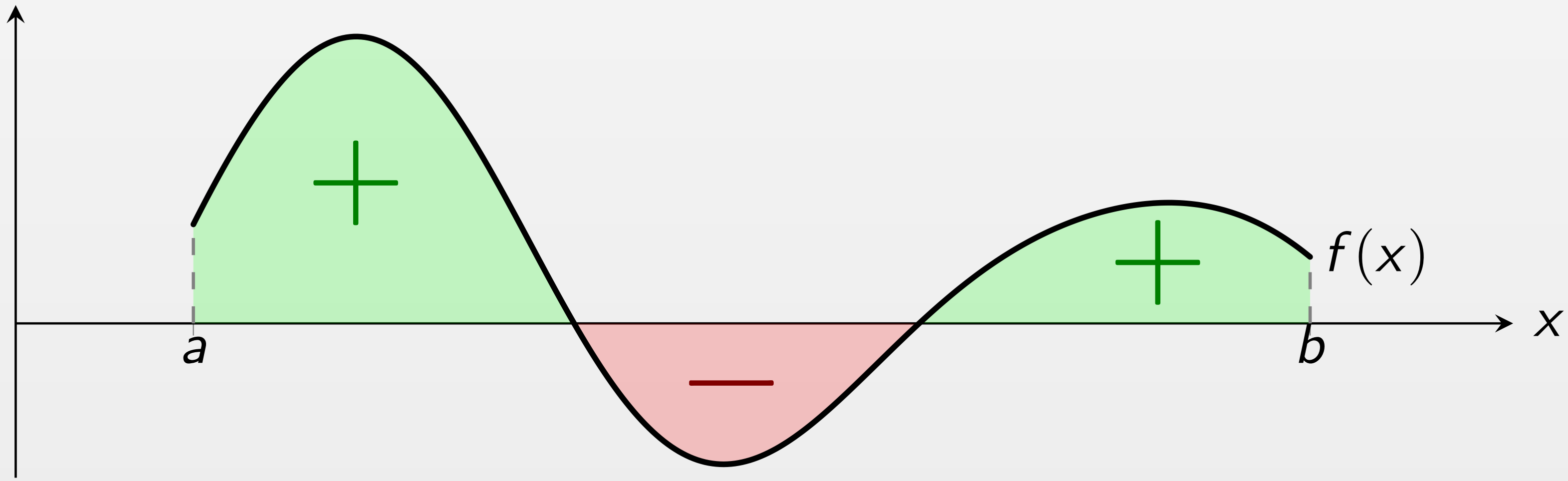
Wie bestimmt man für eine gegebene Funktion f eine Stammfunktion, d. h. eine Funktion F mit $F' = f$?

Bemerkung:

- Es wird sich herausstellen, dass es sich bei beiden Fragestellungen im wesentlichen um dasselbe Problem handelt.

Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse

- im Folgenden werden wir meistens $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ als stetig voraussetzen
- die Theorie lässt sich auch für beschränkte Funktionen mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen entwickeln
- eir wollen nun die Fläche unter der Kurve berechnen, d. h. die Fläche die durch die x-Achse, die senkrechten Geraden $x = a$ und $x = b$ und durch den Graphen der Funktion f eingeschlossen ist
- Flächenstücke unterhalb der x-Achse werden mit einem negativen Vorzeichen berücksichtigt und Flächenstücke oberhalb der x-Achse mit positivem Vorzeichen



Riemann-Summen

Idee: approximiere die Fläche durch disjunkte Rechtecke

- betrachte äquidistante Zerlegungen von $[a, b]$, d. h. unterteile $[a, b]$ in n gleichgroße Intervalle mit Endpunkten

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}, \quad \dots \quad , \quad x_n = b\,.$$

- für $i \in [n]$ seien

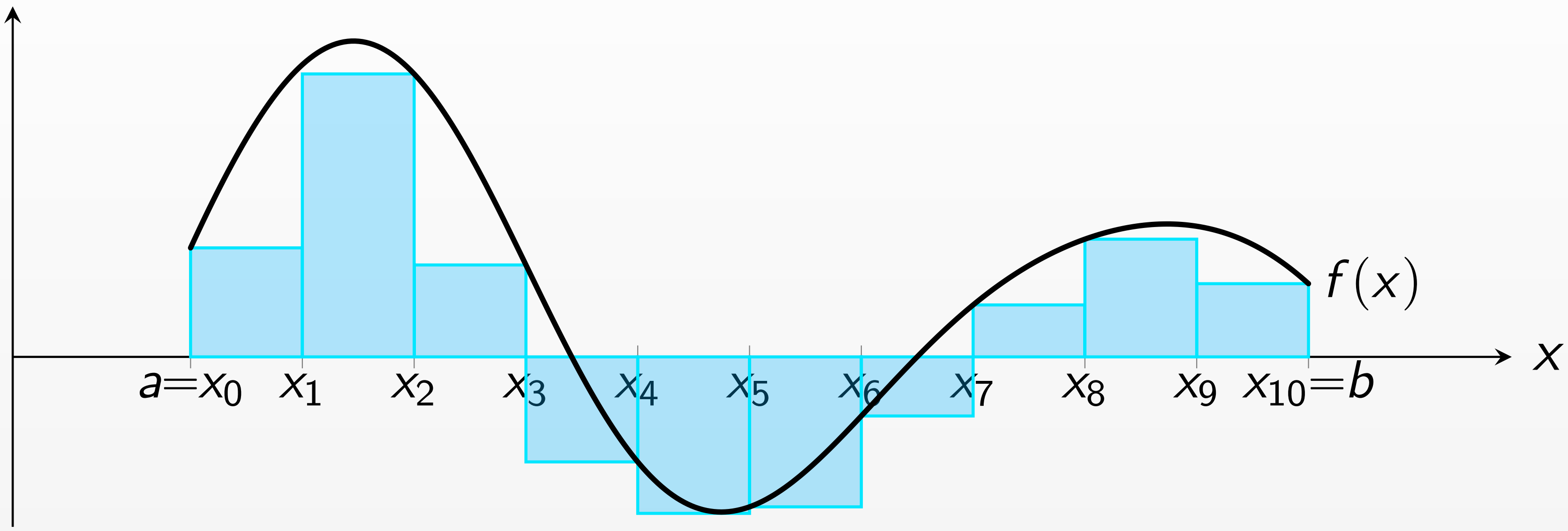
$$M_i := \max\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{und} \quad m_i := \min\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

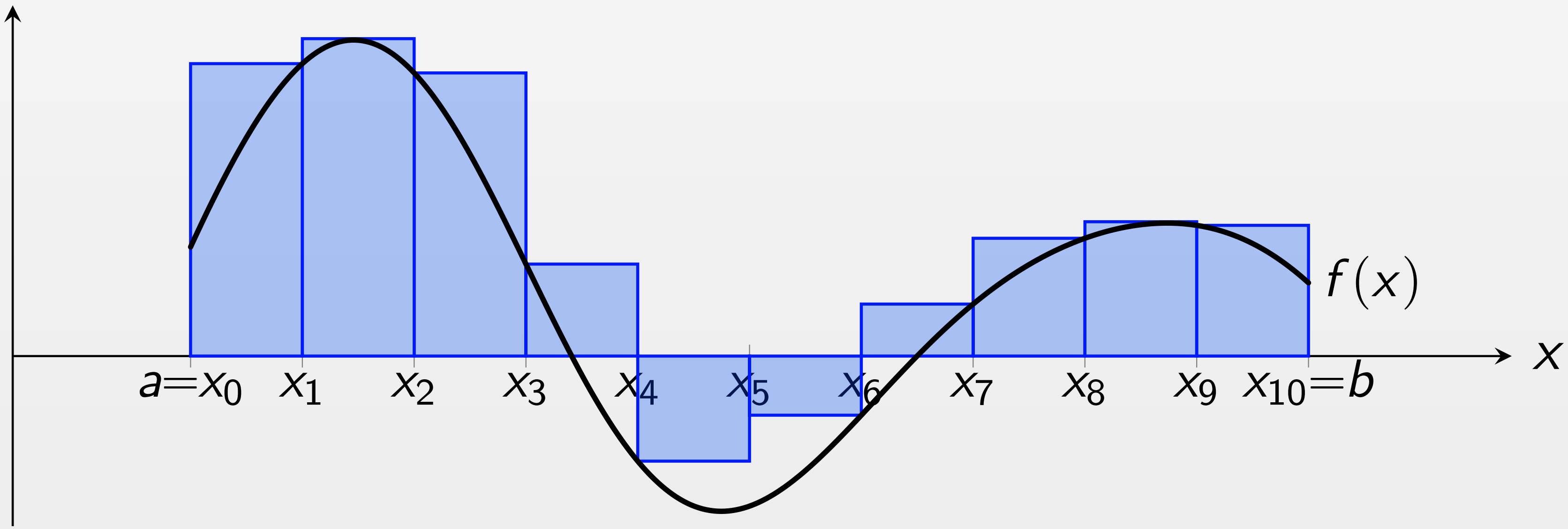
  die Extrema, welche für stetige (bzw. beschränkte Funktionen mit endlichen vielen Unstetigkeitsstellen) existieren
- die n-te Unter- und Obersumme ist dann gegeben durch

$$U_n := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{b-a}{n} \qquad \text{und} \qquad O_n := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \frac{b-a}{n}$$

- offensichtlich ist U_n eine untere Schranke für den gesuchten Flächeninhalt und O_n ist eine obere Schranke

10-te Unter- und Obersumme U_{10} und O_{10} von f





Riemann'sches Integral

Definition

Eine Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls die Folgen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren und wir schreiben dafür

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\longrightarrow\infty} O_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} U_n\,.$$

Wir nennen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ das bestimmte Integral von f über $[a,b]$. Die Funktion f ist in diesem Zusammenhang der Integrand, x ist die Integrationsvariable, die durch $\mathrm{d}x$ angezeigt wird und a und b sind die Integrationsgrenzen.

Bemerkungen:

- das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist der Flächeninhalt der Fläche unter f
- wir halten folgende Konventionen fest

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- oftmals werden in der Literatur nicht nur äquidistante Zerlegungen von $[a,b]$, sondern Zerlegungen, bei denen die Teilintervalle unterschiedliche Längen haben, betrachtet und dies führt zum gleichen Integralbegriff

Existenz des RIEMANN'schen Integrals

Satz

Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt. Dann konvergieren die beiden Folgen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert.

- wir beweisen den Satz nur für stetige Funktionen, aber der allgemeine Fall kann ganz ähnlich bewiesen werden
- in dem Beweis werden wir verwenden, dass sich der Begriff der Stetigkeit auf beschränkten Intervallen wie folgt verschärfen lässt

Definition (gleichmäßig stetig)

Eine Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

- gleichmäßige Stetigkeit unterscheidet sich vom ε-δ-Kriterium der Stetigkeit, dadurch dass das δ nur von ε abhängt und dann für alle $x \in D$ gilt
  ε-δ-Kriterium: $\forall \varepsilon > 0$ und $\forall x \in D$ $\exists \delta > 0\colon |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$
  gleichmäßige Stetigkeit: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ so dass $\forall x \in D\colon \ldots$
- z. B. $1/x$ ist stetig auf $(0,\infty)$ aber nicht gleichmäßig stetig, allerdings ist $1/x$ eingeschränkt auf ein abgeschlossenes beschränktes Intervall in $\mathbb{R}_{>0}$ auch gleichmäßig stetig

Gleichmäßige Stetigkeit

Proposition

Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auf dem beschränkten Intervall $[a,b]$ auch gleichmäßig stetig.

Beweis: Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig auf $[a,b]$. Dann gibt es für ein $\varepsilon > 0$ für jedes $\delta = 1/n$ zwei Stellen x_n, $x'_n \in [a,b]$ mit

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad |f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon\,.$$

Da $[a,b]$ abgeschlossen und beschränkt ist, existiert nach zwei Anwendungen des Satzes von Bolzano und Weierstraß eine Teilfolge von Indizes n_i, so dass die Teilfolgen (x_{n_i}) und (x'_{n_i}) konvergieren.

Aus $|x_{n_i} - x'_{n_i}| < \frac{1}{n_i}$ egibt sich, dass beide Teilfolgen den gleichen Grenzwert x haben und mit der Stetigkeit folgt

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} |f(x_{n_i}) - f(x'_{n_i})| = |f(x) - f(x)| = 0\,.$$

Allerdings widerspricht dies der Abschätzung $|f(x_{n_i}) - f(x'_{n_i})| \geqslant \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{N}$. $\square$

Existenz des RIEMANN'schen Integrals — Beweis

Beweis: Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und aufgrund der Proposition somit auch gleichmäßig stetig. Wir zeigen zuerst, dass die Differenz $O_n - U_n$ eine Nullfolge ist und danach die Konvergenz von U_n.

Für die Nullfolgeneigenschaft wenden wir die gleichmäßige Stetigkeit mit $\varepsilon = \frac{\zeta}{b-a}$ an und erhalten ein $\delta > 0$. Für $n > n_0 := \lceil (b-a)/\delta \rceil$ haben zwei Punkte einer äquidistanten Zerlegung mit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ einen Abstand $\frac{b-a}{n} < \delta$ und folglich gilt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit

$$0 \leqslant M_i - m_i < \varepsilon = \tfrac{\zeta}{b-a}$$

und es ergibt sich

$$0 \leqslant O_n - U_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) < \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\zeta}{b-a} = \zeta\,.$$

Für die Konvergenz zeigen wir, dass (U_n) eine Cauchy–Folge ist. Sei dafür $\xi > 0$ beliebig. Wir wählen n_0 groß genug, sodass $O_n - U_n < \xi$ gilt für alle $n \geqslant n_0$ und betrachten n, $n' > n_0$ und o. B. d. A. sei $U_{n'} \geqslant U_n$. Es folgt aus der Definition der Riemann-Summen

$$U_{n'} \leqslant \text{Fläche unter } f \leqslant O_n$$

und somit gilt

$$0 \leqslant U_{n'} - U_n \leqslant O_n - U_n < \xi\,.$$

Also ist $|U_n - U_{n'}| < \xi$ und (U_n) ist eine Cauchy-Folge, die konvergiert. $\square$

Fläche unter $f(x) = x^2$ zwischen 0 und 1

- f ist stetig und somit integrierbar und f ist streng monoton wachsend und somit wird das maximum an den größeren Intervallgrenze angenommen

Es gilt

$$O_n = \sum_{k=1}^{n} f\Big(0 + \frac{k}{n}\Big)\frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{k}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Wir erinnern uns an die Summenformel der ersten Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

und erhalten

$$O_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2}{6} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1/2}{n} = \frac{1}{3} \cdot \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \cdot \Big(1 + \frac{1}{2n}\Big).$$

Nach den Rechenregeln für Grenzwerte ergibt sich $\lim_{n \longrightarrow \infty} O_n = 1/3$ und somit

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Beispiel einer nicht-integrierbaren Funktion

Ein bekanntes Beispiel einer beschränkten, nicht-integrierbaren Funktion mit unendlich vielen Unstetigkeitsstellen ist die Indikatorfunktion

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

der rationalen Zahlen in $[0,1]$ definiert durch

$$x \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Da jedes Intervall positiver Länge sowohl ein rationale als auch eine irrationale Zahl enthält, ist $U_n = 0$ und $O_n = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Die Folgen konvergieren also, aber die Grenzwerte

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} U_n = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n \longrightarrow \infty} O_n = 1$$

sind unterschiedlich und somit ist $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ nicht integrierbar.

Rechenregeln für bestimmte Integrale

Satz

Seien $f, g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(*i*) $f + g$ ist integrierbar und $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(*ii*) $c \cdot f$ ist integrierbar und $\int_a^b (c \cdot f)(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(*iii*) falls $f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(*iv*) falls $m \leqslant f(x) \leqslant M$ für alle $x \in [a,b]$ gibt, dann gilt
$m \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \cdot (b-a)$

(*v*) $|f(x)|$ ist integrierbar und $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

(*vi*) es gilt $\left|\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x$

(*vii*) Für jedes $\gamma \in [a,b]$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\gamma} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis: Die Rechenregeln ergeben sich aus den Rechenregln für Grenzwerte und wir weisen auf eine ausführlichere Diskussion im Skript. □

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Für eine integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $a < b$ ergibt sich der Mittelwert des Integrals durch

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

und der Mittelwertsatz besagt, dass dieser Wert von f auf $[a,b]$ angenommen wird.

Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\hat{x} \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\hat{x}) \cdot (b-a)\,.$$

Beweis: Da f stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ ist, gibt es globale Extrema m^* und M^* und mit dem Zwischenwertsatz folgt $f([a,b]) = [m^*, M^*]$. Offensichtlich folgt mit den Rechenregeln $m^* \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M^* \cdot (b-a)$. Folglich existiert ein $\mu \in [m^*, M^*]$ mit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu \cdot (b-a)$ und mit obiger Beobachtung existiert auch ein $\hat{x} \in [a,b]$ mit $f(\hat{x}) = \mu$. $\square$

Stammfunktionen

- sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar
- nach den Rechenregeln ist f dann auch auf den Intervallen $[a,x]$ für jedes $x \in [a,b]$ integrierbar
- dies rechtfertigt die Definition der Funktion $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

d. h. wir bilden also x auf die Fläche unter f über dem Intervall $[a,x]$ ab
- der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt dann, dass F eine Stammfunktion von f ist, d. h. $F' = f$

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

differenzierbar und für alle $x \in [a,b]$ gilt $F'(x) = f(x)$.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung — Beweis

Beweis: Seien $x \in [a, b]$ beliebig und $h > 0$. Der entsprechende Differenzenquotient von F lautet

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $\hat{x}_h \in [x, x+h]$ mit $\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\hat{x}_h) \cdot h$. Also ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\big(f(\hat{x}_h) \cdot h\big) = f(\hat{x}_h)\,.$$

Das gleiche Argument garantiert auch für $h < 0$ ein $\hat{x}_h \in [x - h, x]$, sodass $\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = f(\hat{x}_h)$. Somit folgt mit der Stetigkeit von f

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} f(\hat{x}_h) = f\Big(\lim_{h \longrightarrow 0} \hat{x}_h\Big)\,.$$

Da $\hat{x}_h \in [x, x+h]$ (bzw. $\hat{x}_h \in [x-h, x]$) muss gelten $\lim_{h\longrightarrow 0} \hat{x}_h = x$ und folglich

$$F'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)\,. \qquad \square$$

Konsequenzen des Hauptsatzes

Korollar

Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, so unterscheiden sie sich nur um eine additive Konstante.

Beweis: Da F_1 und F_2 differenzierbar sind, ist auch $F_1 - F_2$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in [a, b]$

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Die Ableitung der Funktion $F_1 - F_2$ ist also auf dem gesamten Intervall $[a, b]$ konstant 0 und damit gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ für das gilt

$$F_1(x) - F_2(x) = (F_1 - F_2)(x) = c$$

□

Korollar

Sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $F\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Beweis: Nach dem Fundamentalsatz ist $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von f. Nach dem Korollar existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + c$. Es folgt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + c - \left(\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + c\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

□

Notation

- ist F eine Stammfunktion von f, so bezeichnet F das unbestimmte Integral von f
- wir schreiben manchmal auch

$$F = \int f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

  obwohl die Stammfunktion nicht eindeutig ist
- ist F eine Stammfunktion der stetigen Funktion f, so schreiben wir

$$F(x)\Big|_a^b \quad \text{oder auch} \quad \big[F(x)\big]_a^b \quad \text{für} \quad F(b) - F(a)\,,$$

  d. h.

$$F(x)\Big|_a^b := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b$$

Stammfunktionen

- einige Stammfunktionen lassen sich durch das Umkehren der Ableitung finden

  wir wissen $\sin'(x) = \cos(x)$, also ist sin eine Stammfunktion des cos
  wir wissen $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, also ist $\frac{x^3}{3}$ eine Stammfunktion von x^2

Funktion f	Stammfunktion F
x^r $(r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$

Flächenberechnung

$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$

Wir hatten bereits mit dem Riemann'schen Integral über Grenzwerte $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = 1/3$ ausgerechnet. Mithilfe von Stammfunktionen kommen wir

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

selbstverständlich auf das gleiche Ergebnis.

$\int_0^\pi \sin(x)$

Wir wissen $-\cos(x)$ ist eine Stammfunktion von $\sin(x)$ und erhalten

$$\int_0^\pi \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_0^\pi = -\cos(\pi) - \big(-\cos(0)\big) = 1 + 1 = 2\,.$$

Rechenregeln für Stammfunktionen

Satz

Seien $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen mit Stammfunktionen F, $G\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(*i*) $(F+G)(x)$ ist eine Stammfunktion von $(f+g)(x)$ bzw.

$$\int (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(*ii*) $(c \cdot F)(x)$ ist eine Stammfunktion von $(c \cdot f)(x)$ bzw.

$$\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Seien darüber hinaus f und g differenzierbar mit stetigen Ableitungen f' und g' auf $[a,b]$, dann gilt die Regel der partiellen Integration

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis: Die ersten beiden Regeln ergeben sich aus den einfachen Rechenregeln für Ableitungen und die letzte Regel ergibt sich aus der Ableitungsregel $(F \cdot G)' = f \cdot G + F \cdot g$ nach Umstellen. □

Beispiel für partielle Integration — Stammfunktion von $x \cdot \cos(x)$ auf $\mathbb{R}$

Wir müssen uns überlegen, wie wir die Regel

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

am besten zum Einsatz bringen. Die trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus bleiben beim differenzieren und integrieren „unter sich“. Wenn wir die Identität x ableiten erhalten wir eine „einfachere“ Funktion. Deswegen bietet sich die Zuordnung $g(x) = x$ und $f'(x) = \cos(x)$ an. Damit gilt

$$g'(x) = 1 \qquad \text{und} \qquad f(x) = \sin(x)$$

und wir erhalten

$$\int_a^b \cos(x) \cdot x\,\mathrm{d}x = \big[\sin(x) \cdot x\big]_a^b - \int_a^b \sin(x) \cdot 1\,\mathrm{d}x = \big[\sin(x) \cdot x\big]_a^b - \big[-\cos(x)\big]_a^b .$$

Also ist $x\sin(x) + \cos(x)$ eine Stammfunktion von $x \cdot \cos(x)$ und wir schreiben

$$\int x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \sin(x) + \cos(x)\,.$$

Beispiel für partielle Integration — Stammfunktion von $\ln(x)$ auf $(0,\infty)$

In diesem klassischen Beispiel ist es günstig

$$\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$$

zu setzen. Bei der partiellen Integration erhalten wir für den Ansatz

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

den ersten Term

$$\big[f(x) \cdot g(x)\big] = \big[x \cdot \ln(x)\big]$$

und den Subtrahend

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = \big[x\big]\,.$$

Somit erhalten wir

$$\int_a^b \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \big[x \cdot \ln(x)\big]_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[x \cdot \ln(x) - x\big]_a^b\,.$$

Also ist $x\ln(x) - x$ eine Stammfunktion von $\ln(x)$ auf $(0,\infty)$.

Substitutionsregel — Umkehrung der Kettenregel

Kettenregel: $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \implies \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = (f \circ g)(x)$

$$\exp(x^2) \cdot 2x = \exp'(x^2)\,,$$

d. h. $\exp(x^2)$ ist eine Stammfunktion von $2x\exp(x^2)$.

$\int \cos(3x+1)\,\mathrm{d}x$

Mit $g(x) = 3x + 1$ und $g'(x) = 3$ erhalten wir

$$\int \cos(3x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \cos(3x+1)\cdot 3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(3x+1)\,.$$

Satz (Substitutionsregel)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit einer stetigen Ableitung und $g([a,b]) \subseteq I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u\,. \qquad \square$$

Substitution in $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$

- im Integral auf der rechten Seite integrieren wir nach u in den Grenzen $g(a)$ und $g(b)$, während wir im Integral auf der linken Seite nach x integrieren
- wir substituieren

$$g(x) =: u$$

- für die „Umrechnung" von $\mathrm{d}x$ nach $\mathrm{d}u$ appellieren wir an das Leibniz'sche Kalkül

$$g'(x) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad \Longrightarrow \quad g'(x) \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

- falls $g'(x)$ für alle relevanten x von 0 verschieden ist, erhalten wir so auch

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$

Beispiel für die Substitutionsregel — $\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x$

Wir substituieren $u = 2x + 1$ und erhalten $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (2x+1)' = 2$ bzw. $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$ und somit gilt

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = \int \sin(u)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(-\cos u)\,.$$

Da wir eine Stammfunktion von $\sin(2x+1)$ ausrechnen wollen, müssen wir am Schluss an Stelle von u wieder $2x+1$ zurück einsetzen, d. h.

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)\,.$$

Tatsächlich liefert die Probe

$$\Big(-\frac{1}{2}\cos(2x+1)\Big)' = \frac{1}{2}\sin(2x+1)\cdot 2 = \sin(2x+1)\,.$$

Beispiel für die Substitutionsregel — $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

Wir berechnen das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Dazu substituieren wir

$$u = g(x) = 1 + x^2\,.$$

Es ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x, \quad \text{also} \quad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x\,.$$

Einsetzen in das Integral liefert

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{g(0)}^{g(1)} \frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{-1}{2\cdot u}\Big|_1^2 = \frac{-1}{4} - \frac{-1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

Flächeninhalt vom Einheitskreis

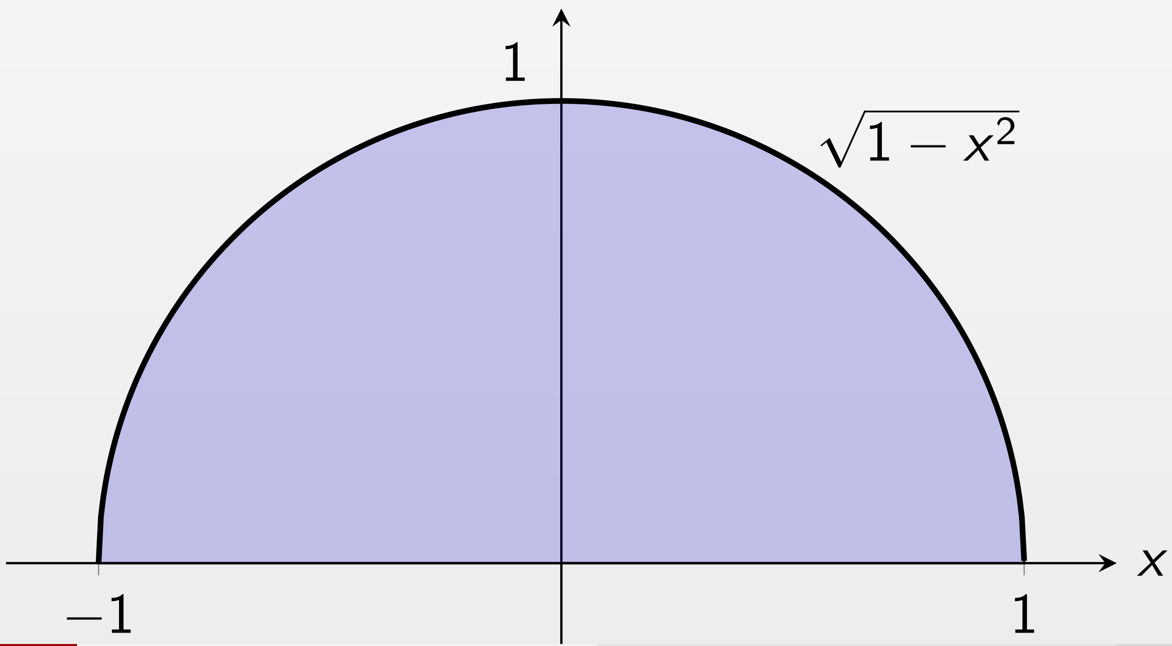
Bekanntlich besteht der Einheitskreis genau aus den Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x^2 + y^2 = 1\,.$$

Löst man diese Gleichung nach y auf, so erhält man

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}\,.$$

Die obere Hälfte des Einheitskreises ist also genau der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, die auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert ist. Damit ist die Fläche des Kreises, also eigentlich die vom Einheitskreis eingeschlossene Fläche, genau das doppelte der Fläche unter der Kurve f auf dem Intervall $[-1, 1]$.



Flächeninhalt vom Einheitskreis $= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

Für die Berechnung des bestimmten Integrals

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

erinnern wir uns an die Identität $\sin^2(u)+\cos^2(u)=1$ und vereinfachen den Ausdruck $\sqrt{1-x^2}$ zu $\cos(u)$ durch die Substitution

$$x=\sin(u)\quad\text{bzw.}\quad u=\arcsin(x)\,.$$

Allerdings erhalten wir auch

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

was zu

$$\mathrm{d}x=\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{1-\sin^2(u)}\,\mathrm{d}u=\cos(u)\,\mathrm{d}u$$

führt. Wir erhalten also mit $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$ und $\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)}\cos(u)\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Flächeninhalt vom Einheitskreis $= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u$

Mit partieller Integration erhalten wir die Identität

$$\int \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \sin(u)\cos(u) - \int (-\sin^2(u))\,\mathrm{d}u = \sin(u)\cos(u) + \int \sin^2(u)\,\mathrm{d}u$$

und somit gilt

$$\int \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \sin(u)\cos(u) + \int (1-\cos^2(u))\,\mathrm{d}u = \sin(u)\cos(u) + u - \int \cos^2(u)\,\mathrm{d}u$$

und durch umstellen ergibt sich die Formel für eine Stammfunktion

$$2\int \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \sin(u)\cos(u) + u\,.$$

Für die Fläche des Einheitskreises ergibt sich also

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \Big[\sin(u)\cos(u) + u\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \Big(0 + \frac{\pi}{2}\Big) - \Big(0 - \frac{\pi}{2}\Big) = \pi\,.$$

Bemerkung: Mit derselben Technik lässt sich zeigen, dass die Fläche eines Kreises mit Radius r genau πr^2 beträgt.

Integration gebrochen rationaler Funktionen — $\frac{p(x)}{q(x)}$

Gegeben seien zwei Polynomfunktionen $p(x)$ und $q(x)$ und wir interessieren uns für das Integral

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Mithilfe der Polynomdivision reduziert sich diese Problem auf Integrale der Form

$$\int p_1(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{p_2(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

mit $\deg(p_2) < \deg(q)$. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass $q(x)$ über $\mathbb{R}$ in lineare und quadratische Faktoren zerfällt, und mit Partialbruchzerlegungen kann man das Integral $\int \frac{p_2(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$ auf eine Summe von Integralen der Form

$$\int \frac{A}{(a_1x+a_0)^k}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int \frac{Bx+C}{(b_2x^2+b_1x+b_0)^\ell}\,\mathrm{d}x$$

weiter vereinfachen. Im Folgenden wollen wir Integrale dieser Art für $k=1$ und $\ell=1$ lösen.

Beispiel Partialbruchzerlegung

Wir berechnen
$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x\,.$$
Die p-q-Formel liefert die Nullstellen des Nenners 2 und 3. Es gilt
$$(x-2)(x-3) = x^2-5x+6\,.$$

Damit gibt es $A, B \in \mathbb{R}$ mit
$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}\,.$$
Wir multiplizieren die Gleichung mit x^2-5x+6. Das liefert
$$x+1 = A(x-3) + B(x-2) = (A+B)x - 3A - 2B\,.$$

Über den reellen Zahlen sind zwei Polynomfunktionen genau dann gleich, wenn die beiden Polynome gleich sind, wenn also die Koeffizienten vor den entsprechenden Potenzen von x übereinstimmen. Es ergibt sich also das Gleichungssystem
$$A+B=1\,, \qquad\qquad -3A-2B=1\,.$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhält man $A=-3$ und $B=4$ und somit
$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{-3}{x-2} + \frac{4}{x-3}\,.$$

$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-3}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4}{x-3}\,\mathrm{d}x$ für $x > 3$

Rationale Funktionen der Form $\frac{A}{x-a_0}$ für Konstanten A, $a_0 \in \mathbb{R}$ können in ihrem Definitionsbereich leicht mit Hilfe der Substitution

$$u = x - a_0$$

integriert werden und wir erhalten $\mathrm{d}u = 1 \cdot \mathrm{d}x$. Mit der Substitutionsregel ergibt sich

$$\int \frac{A}{x - a_0}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{u}\,\mathrm{d}u = A \cdot \ln(|u|) = A \cdot \ln(|x - a_0|)\,.$$

Für die ursprüngliche Integrationsaufgabe ergibt sich also in den Grenzen $x > 3$ das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x = 4\ln(x-3) - 3\ln(x-2) = \ln\left(\frac{(x-3)^4}{(x-2)^3}\right).$$

Integrale der Form $\int \frac{C}{x^2+b_1x+b_0}\,\mathrm{d}x$

Auch Integrale von Funktionen der Form

$$\frac{C}{x^2 + b_1 x + b_0}$$

in denen der Nenner keine reelle Nullstelle hat, können durch Substitution integriert werden. Mithilfe der quadratischen Ergänzung erhalten wir

$$x^2 + b_1 x + b_0 = \left(x + \frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(b_0 - \frac{b_1^2}{4}\right).$$

Mit der Substitution

$$u = \frac{x + \frac{b_1}{2}}{\sqrt{b_0 - \frac{b_1^2}{4}}} \quad\Longrightarrow\quad u^2 + 1 = \left(\frac{1}{b_0 - \frac{b_1^2}{4}}\right) \cdot \left(\left(x + \frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(b_0 - \frac{b_1^2}{4}\right)\right)$$

erhalten wir wegen $\mathrm{d}u = 1 \cdot \mathrm{d}x$ mit $C' = C/(b_0 - b_1^2/4)$ dann

$$\int \frac{C}{x^2 + b_1 x + b_0}\,\mathrm{d}x = C' \int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = C' \arctan(u).$$

Es gilt also

$$\int \frac{C}{x^2 + b_1 x + b_0}\,\mathrm{d}x = \frac{C}{b_0 - \frac{b_1^2}{4}} \cdot \arctan\left(\frac{x + \frac{b_1}{2}}{\sqrt{b_0 - \frac{b_1^2}{4}}}\right)$$

Integrale der Form $\int \frac{Bx+C}{x^2+b_1x+b_0}\,\mathrm{d}x$

Integrale von Funktionen der Form

$$\frac{Bx+C}{x^2+b_1x+b_0}$$

können wir umformen, so dass

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+b_1x+b_0}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\int \frac{2x+b_1}{x^2+b_1x+b_0}\,\mathrm{d}x + \int \frac{C-Bb_1/2}{x^2+b_1x+b_0}\,.$$

Integrale in der Form des zweiten Terms haben wir bereits diskutiert und den ersten Term können wir mit der Substittion

$$u = x^2+b_1x+b_0$$

und $\mathrm{d}u = (2x+b_1)\,\mathrm{d}x$ integrieren

$$\int \frac{2x+b_1}{x^2+b_1x+b_0}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(|u|) = \ln(|x^2+b_1x+b_0|)\,.$$

Beispiel: $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$

Wir sehen, dass 1 eine Nullstelle des Nenners ist und mit Polynomdivision ergibt sich

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)\,.$$

Insbesondere hat der Nenner keine weiteren Nullstellen. Es gibt also A, B, $C \in \mathbb{R}$ und eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad\Longleftrightarrow\qquad 3x+5 = A\cdot(x^2+1) + (Bx+C)\cdot(x-1)$$

wobei sich die rechte Seite durch Multiplikation der Gleichung mit $x^3 - x^2 + x - 1$ ergibt. Wir vergleichen die Koeffizienten vor den entsprechenden Potenzen von x. Dies ergibt das lineare Gleichungssystem

$$A + B = 0\,, \qquad -B + C = 3\,, \qquad A - C = 5\,.$$

Die eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems lautet $A = 4$, $B = -4$ und $C = -1$ und somit haben wir

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{4x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{x-1}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Mit den entwickelten Substitutionsregeln erhalten wir die Stammfunktion

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x = 4\ln(|x-1|) - 2\ln(|x^2+1|) - \arctan(x)\,.$$

Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir bestimmte Integrale auf endlichen, abgeschlossenen Intervallen $[a, b]$ berechnet und dabei vorausgesetzt, dass der Integrand auf ganz $[a, b]$ definiert und beschränkt ist.

Man kann unter bestimmten Voraussetzungen auch Integrale auf unendlichen Intervallen auf sinnvolle Weise einen Wert über Grenzwerte zuweisen.

Beispiel: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Für das unbestimmte Integral gilt

$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}$$

und somit haben wir

$$\lim_{b \longrightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b \longrightarrow \infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b \longrightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1\,.$$

Uneigentliche Integrale — Definition

Sei $f\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ für jedes $b > a$ auf $[a,b]$ integrierbar. Falls der Grenzwert

$$\lim_{b \longrightarrow \infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert, so nennen wir f auf dem Intervall $[a,\infty)$ uneigentlich integrierbar und

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b \longrightarrow \infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Wir sagen in diesem Fall auch, dass das Integral $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert und $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ ist ein uneigentliches Integral. Analog definiert man $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Falls f für ein $c \in \mathbb{R}$ sowohl auf $(-\infty, c]$ als auch auf $[c,\infty)$ uneigentlich integrierbar ist, so nennen wir f auf ganz $\mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar und definieren

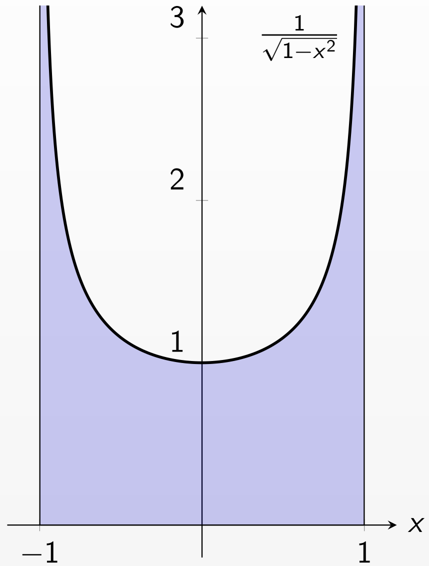
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Genauso definiert man für $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ das für alle $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ integrierbar ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \longrightarrow a} \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \longrightarrow b} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

falls die beiden Grenzwerte für ein $c \in (a,b)$ existieren.

Beispiel: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$



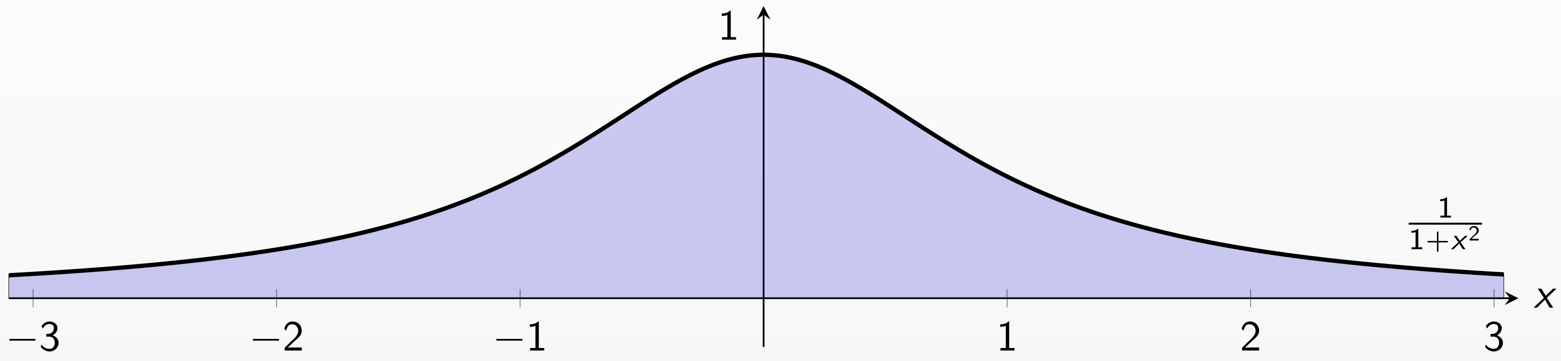
Wir betrachten

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \longrightarrow -1} \int_{\alpha}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \longrightarrow 1} \int_{0}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Da $\arcsin(x)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist, erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \longrightarrow -1} \big(0 - \arcsin(\alpha)\big) + \lim_{\beta \longrightarrow 1} \big(\arcsin(\beta) + 0\big) = \pi\,.$$

Beispiel: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$



Hierfür erinnern wir uns, dass $\arctan(x)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist und es folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\longrightarrow-\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\longrightarrow\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a\longrightarrow-\infty} \big(0 - \arctan(a)\big) + \lim_{b\longrightarrow\infty} \big(\arctan(b) + 0\big) \\ &= \pi\,.\end{aligned}$$

Konvergenzverhalten von Reihen

Mit uneigentlichen Integralen untersuchen wir das Konvergenzverhalten von Reihen.

Satz

Sei $f\colon [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ stetig und monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.

Beweis: Da f monoton fällt, nimmt es seine Extrema über abgeschlossenen Intervallen an deren Grenzen an und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(n+1) = f(n+1)\cdot 1 \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(n)\cdot 1 = f(n)\,.$$

Es folgt

$$\sum_{i=1}^{n} f(i+1) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(i)\,.$$

Ist also $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$, so gilt auch $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

Gilt umgekehrt $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, so ist $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) < \infty$. Die Folge der Partialsummen ist also beschränkt und monoton und so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ für beliebiges $f(1) \in \mathbb{R}$. $\square$

Korollar

Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ konvergiert für alle $r > 1$. $\square$