

# SCHRIJVERS BEWEIS VON MADERS SATZ

MATHIAS SCHACHT

ZUSAMMENFASSUNG. Wir reproduzieren Schrijvers Beweis [*A short proof of Mader's  $\mathcal{S}$ -paths theorem*, J. Combin. Theory Ser. B **82** (2001), no. 2, 319–321] von Maders Min-Max-Satz [*Über die Maximalzahl kreuzungsfreier  $H$ -Wege*, Arch. Math. (Basel) **31** (1978/79), no. 4, 387–402] über die Anzahl der  $H$ -Wege in einem Graphen.

## 1. MADERS MIN-MAX-SATZ ÜBER DIE ANZAHL VON $H$ -WEGEN

In der Arbeit von Schrijver [3] wird die folgende Formulierung von Maders Satz aus [2] bewiesen (siehe Satz 1). Wir werden skizzieren wie man aus diesem Satz die Formulierung von Maders Satz über kreuzungsfreie  $H$ -Wege (siehe Korollar 2) herleiten kann.

Eine Menge  $\mathcal{P}$  von Wegen in einem Graphen  $G = (V, E)$  ist *kreuzungsfrei*, wenn die Schnittmenge der Eckenmengen zweier unterschiedlicher Wege aus  $\mathcal{P}$  eine Teilmenge der gemeinsamen Endecken beider Wege ist. Einfacher ausgedrückt zwei Wege sind kreuzungsfrei wenn sie sich höchstens in ihren Endecken schneiden. Darüber hinaus ist  $\mathcal{P}$  (*ecken*)*disjunkt*, wenn keine zwei Wege eine gemeinsame Ecke haben. Sei  $\mathcal{S}$  eine Menge von paarweise disjunkten Teilmengen von  $V$ . Ein  $\mathcal{S}$ -Weg ist ein Weg in  $G$ , deren Endecken in unterschiedlichen Mengen aus  $\mathcal{S}$  liegen. Insbesondere enthält jeder  $\mathcal{S}$ -Weg mindestens eine Kante. Für einen Graphen  $G = (V, E)$  und eine solche Menge  $\mathcal{S}$  sei  $\pi_{G, \mathcal{S}}$  die Kardinalität einer größten Menge von disjunkten  $\mathcal{S}$ -Wegen in  $G$ . Satz 1 gibt eine Darstellung von  $\pi_{G, \mathcal{S}}$  als Minimum eines Parameters von speziellen Partitionen von  $G$ . In den Partitionen hier ist die leere Menge als Partitionsklasse zugelassen.

Eine Partition  $\mathcal{Z} = \{X, Y_1, \dots, Y_k\}$  von  $V$ , d. h.  $X \dot{\cup} Y_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} Y_k = V$ , *überdeckt alle  $\mathcal{S}$ -Wege* (kurz  $\mathcal{Z}$  ist  *$\mathcal{S}$ -überdeckend*) falls jeder  $\mathcal{S}$ -Weg in  $G$  der  $X$  vermeidet, d. h. keine Ecke aus  $X$  enthält, eine Kante enthält, dessen beide Endecken in einer der Mengen  $Y_i$  enthalten sind. Für  $Y_i$  sei  $\partial_{\mathcal{Z}, \mathcal{S}} Y_i$  die Menge der Ecken aus  $Y_i$  die entweder in  $S = \bigcup \mathcal{S}$  liegen oder einen Nachbarn in einer anderen Menge  $Y_j$  mit  $j \neq i$  haben

$$\partial_{\mathcal{Z}, \mathcal{S}} Y_i = \{y \in Y_i : y \in S \text{ oder } N_G(y) \setminus (X \dot{\cup} Y_i) \neq \emptyset\}.$$

Da jeder  $\mathcal{S}$ -Weg der  $X$  meidet für ein  $i = 1, \dots, k$  mindestens eine Kante aus  $G[Y_i]$  enthält, muss so ein  $\mathcal{S}$ -Weg dann auch mindestens zwei Ecken aus  $\partial_{\mathcal{Z}, \mathcal{S}} Y_i$  enthalten. Somit gilt

$$\pi_{G, \mathcal{S}} \leq |X| + \sum_{i=1}^k \lfloor |\partial_{\mathcal{Z}, \mathcal{S}} Y_i| / 2 \rfloor =: \mu_{G, \mathcal{S}}(\mathcal{Z}).$$

für alle  $\mathcal{S}$ -überdeckenden Partitionen  $\mathcal{Z} = \{X, Y_1, \dots, Y_k\}$ . Der Satz von Mader besagt, dass diese obere Schranke für eine Partitionen  $\mathcal{Z}$  tatsächlich angenommen wird.

**Satz 1** (Mader 1978). *Für jeden Graphen  $G = (V, E)$  und jede Menge  $\mathcal{S}$  von disjunkten Teilmengen aus  $V$  gilt*

$$\pi_{G, \mathcal{S}} = \min_{\mathcal{Z}} \mu_{G, \mathcal{S}}(\mathcal{Z}), \quad (1)$$

wobei das Minimum über alle  $\mathcal{S}$ -überdeckenden Partitionen genommen wird.

Der folgende Beweis ist mit minimalen Änderungen direkt aus der Arbeit [3] von Schrijver entnommen.

*Beweis.* Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil beweisen wir den Spezialfall, wenn alle Mengen  $T \in \mathcal{S}$  aus genau einer Ecke bestehen. Dieser Fall wurde bereits von Gallai [1] behandelt und kann auf die Matchingformel von Tutte zurückgeführt werden.

**1. Fall:**  $|T| = 1$  für alle  $T \in \mathcal{S}$ . Seien  $G = (V, E)$  und  $\mathcal{S}$  gegeben und sei

$$\mu_{G, \mathcal{S}} = \min_{\mathcal{Z}} \mu_{G, \mathcal{S}}(\mathcal{Z})$$

die rechte Seite aus (1). Wir setzen  $S = \bigcup \mathcal{S}$  und betrachten den folgenden Hilfsgraphen  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ : Seien  $(V_1, E_1)$  und  $(V_2, E_2)$  zwei Kopien von  $G$ , wobei für eine Ecke  $v \in V$  die Ecken  $v_1 \in V_1$  und  $v_2 \in V_2$  die entsprechenden Kopien bezeichnen und  $\mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{S}_2$  entsprechen den Kopien von  $\mathcal{S}$ . Der Graph  $\tilde{G}$  entsteht aus den beiden Kopien, in dem wir zuerst jeweils die beiden Kopien von jeder Ecke  $v \in S$  identifizieren, die entstehende Kopie von  $S$  bezeichnen wir dann mit  $\tilde{S} = \bigcup \mathcal{S}_1 = \bigcup \mathcal{S}_2$ , und für jede Ecke  $v \in V \setminus S$  fügen wir die Kanten  $v_1 u_2$  und  $v_2 u_1$  für alle  $u \in N_G(v) \setminus S$  und die Kante  $v_1 v_2$  hinzu.

Wir werden zeigen, dass  $\tilde{G}$  eine Paarung der Größe  $\mu_{G, \mathcal{S}} + |V \setminus S|$  enthält. Auf Grund der Matchingformel von Tutte ist es hinreichend, die folgende Ungleichung für jede Menge  $\tilde{X} \subseteq \tilde{V}$

$$|\tilde{X}| + \sum_{\tilde{C} \in \mathcal{C}_{\tilde{G} - \tilde{X}}} [|\tilde{V}(\tilde{C})|/2] \geq \mu_{G, \mathcal{S}} + |V \setminus S| \quad (2)$$

zu überprüfen, wobei  $\mathcal{C}_{\tilde{G} - \tilde{X}}$  die Menge der Komponenten in  $\tilde{G} - \tilde{X}$  ist.

Sei  $\tilde{X} \subseteq \tilde{V}$ . O. B. d. A. können wir annehmen, dass für jede Ecke  $v \in V \setminus S$  gilt

$$v_1 \in \tilde{X} \Leftrightarrow v_2 \in \tilde{X}. \quad (3)$$

Falls nur eine der Ecken, sagen wir  $v_1$ , in  $\tilde{X}$  enthalten wäre, dann könnten wir sie aus  $\tilde{X}$  entfernen und der Komponente in  $\tilde{G} - \tilde{X}$  hinzufügen die auch  $v_2$  enthält. Da  $v_1$  und  $v_2$  in  $\tilde{V} \setminus \{v_1, v_2\}$  die gleiche Nachbarschaft haben, sind alle anderen Komponenten aus  $\tilde{G} - \tilde{X}$  auch Komponenten von  $\tilde{G} - (\tilde{X} \setminus \{v_1\})$ . Die linke Seite von (2) würde sich also durch das Entfernen von  $v_1$  aus  $\tilde{X}$  nicht erhöhen und deswegen können wir (3) voraussetzen.

Wegen (3) und da für jede Ecke  $v \in V \setminus S$  die Kante  $v_1 v_2$  in  $\tilde{G}$  liegt, muss auch

$$v_1 \in V(C) \Leftrightarrow v_2 \in V(C). \quad (4)$$

für alle Ecken  $v \in V \setminus S$  und alle Komponenten  $C \in \mathcal{C}_{\tilde{G}-\tilde{X}}$  gelten. Insbesondere haben  $|V(C)|$  und  $|V(C) \cap \tilde{S}|$  die gleiche Parität. Für  $X_1 = \tilde{X} \cap V_1$ , sei  $\mathcal{X}_1$  die Partition von  $V_1$  bestehend aus  $X_1$  und den Eckenmengen der Komponenten von  $G_1 - X_1$ . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} |\tilde{X}| + \sum_{\tilde{C} \in \mathcal{C}_{\tilde{G}-\tilde{X}}} \lfloor |V(\tilde{C})|/2 \rfloor &= |X_1| + \sum_{C_1 \in \mathcal{C}_{G_1-X_1}} \lfloor |V(C_1) \cap \tilde{S}|/2 \rfloor + |V \setminus S| \\ &\geq |X_1| + \sum_{C_1 \in \mathcal{C}_{G_1-X_1}} \lfloor |\partial_{\mathcal{X}_1, \mathcal{S}_1} V(C_1)|/2 \rfloor + |V \setminus S| \\ &\geq \mu_{G_1, \mathcal{S}_1} + |V \setminus S| = \mu_{G, \mathcal{S}} + |V \setminus S|. \end{aligned}$$

Die Matchingformel von Tutte besagt nun, dass  $\tilde{G}$  eine Paarung mit mindestens  $\mu_{G, \mathcal{S}} + |V \setminus S|$  Kanten enthält und wir halten eine solche Paarung  $M$  fest. Des weiteren sei  $N$  die Paarung in  $\tilde{G}$  die aus den  $|V \setminus S|$  Kanten der Form  $v_1 v_2$  mit  $v \in V \setminus S$  besteht. Die Paarung  $M$  hat also  $\mu_{G, \mathcal{S}}$  Kanten mehr als die Paarung  $N$  und deswegen gibt es mindestens  $\mu_{G, \mathcal{S}}$  Komponenten in dem Graphen  $(\tilde{V}, M \cup N)$  die genau eine Kante mehr aus  $M$  als aus  $N$  haben. Jede solche Komponente ist ein alternierender Weg dessen Endecken in  $\tilde{S}$  liegen. Durch Kontraktion aller Kanten aus  $N$  in  $\tilde{G}$  erhalten wir wieder eine Kopie von  $G$  und jeder der angesprochenen Wege entspricht einem  $\mathcal{S}$ -Weg in dieser Kopie. Um einzusehen, dass diese Wege tatsächlich  $\mathcal{S}$ -Wege sind, berufen wir uns auf die Annahme, dass  $\mathcal{S}$  nur aus elementaren Mengen besteht und somit ist jeder Weg mit Endecken in  $S$  auch ein  $\mathcal{S}$ -Weg. Wir haben also für diesen Fall gezeigt, dass  $G$  mindestens  $\mu_{G, \mathcal{S}}$  disjunkte  $\mathcal{S}$ -Wege enthält.

**2. Fall:**  $|T| \geq 2$  für ein  $T \in \mathcal{S}$ . Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Für eine gegebene Eckenmenge  $V$  wählen wir unter allen möglichen Gegenbeispielen einen Graphen  $G = (V, E)$  und eine Menge disjunkter Teilmengen  $\mathcal{S}$  aus, so dass

$$\sigma(G, \mathcal{S}) := |E| - \sum_{S_1 \neq S_2 \in \mathcal{S}} |S_1||S_2|$$

minimiert wird. Da jeder  $\mathcal{S}$ -Weg der eine innere Ecke in  $S = \bigcup \mathcal{S}$  hat einen Teilweg enthält der ebenfalls ein  $\mathcal{S}$ -Weg ist, können wir uns im Folgenden auf Wege beschränken, die keine inneren Ecken in  $S$  haben. Insbesondere folgt damit aus der Minimalität von  $\sigma(G, \mathcal{S})$ , dass die Mengen aus  $\mathcal{S}$  unabhängig in  $G$  sind.

Sei also  $T \in \mathcal{S}$  eine in  $G$  unabhängige Menge mit  $|T| \geq 2$  und sei  $t$  eine Ecke aus  $T$ . Wir betrachten nun die Menge disjunkter Teilmengen  $\mathcal{S}'$  die wir erhalten, wenn wir  $T$  aus  $\mathcal{S}$  entfernen und dafür die beiden Mengen  $T' = T \setminus \{t\}$  und  $\{t\}$  einfügen. Für  $\mathcal{S}'$  gilt

$$\sigma(G, \mathcal{S}') = \sigma(G, \mathcal{S}) - |T| + 1 < \sigma(G, \mathcal{S})$$

und wegen der Wahl von  $G$  und  $\mathcal{S}$  gibt es  $\mu_{G, \mathcal{S}'}$  disjunkte  $\mathcal{S}'$ -Wege in  $G$ . Da jeder  $\mathcal{S}$ -Weg in  $G$  auch ein  $\mathcal{S}'$ -Weg ist, ist jede  $\mathcal{S}'$ -überdeckende Partition  $\mathcal{Z}$  eine  $\mathcal{S}$ -überdeckende Partition. Darüber hinaus hängt die Definition von  $\partial_{\mathcal{Z}, \mathcal{S}'}(\cdot)$  nur von der Menge  $S = \bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}'$ , nicht aber von den einzelnen Mengen in  $\mathcal{S}'$  ab. Somit gilt  $\mu_{G, \mathcal{S}'} \geq \mu_{G, \mathcal{S}}$ .

Wir wählen eine Menge  $\mathcal{P}'$  von  $\mu_{G, \mathcal{S}}$  disjunkten  $\mathcal{S}'$ -Wegen so aus, dass kein Weg  $P' \in \mathcal{P}'$  eine innere Ecke in  $S$  hat. Da  $\mathcal{P}'$  keine Menge von  $\mathcal{S}$ -Wegen ist,

muss  $\mathcal{P}'$  einen  $t - T'$ -Weg  $P'_0$  enthalten und nach unserer Wahl von  $T$  und  $\mathcal{P}'$  muss dieser Weg eine innere Ecke  $u \in V \setminus S$  haben.

Als nächstes betrachten wir die Mengenfamilie  $\mathcal{S}''$ , die wir erhalten, wenn wir in  $\mathcal{S}$  die Menge  $T$  durch  $T \cup \{u\}$  ersetzen. Da der Satz für Mengen  $\mathcal{S}$  mit  $|\mathcal{S}| = 1$  leicht einzusehen ist (in diesem Fall ist  $\mu_{G, \mathcal{S}}(\mathcal{Z}) = 0$  für die triviale Partition  $\mathcal{Z} = \{\emptyset\} \cup \{\{v\} : v \in V\}$  mit  $X = \emptyset$ ), können wir  $\mathcal{S} \neq \{T\}$  annehmen. Folglich gilt

$$\sigma(G, \mathcal{S}'') = \sigma(G, \mathcal{S}) - |S \setminus T| < \sigma(G, \mathcal{S})$$

und wegen der Minimalität von  $G$  und  $\mathcal{S}$  gibt es  $\mu_{G, \mathcal{S}''}$  disjunkte  $\mathcal{S}''$ -Wege in  $G$ . Da wieder jeder  $\mathcal{S}$ -Weg auch ein  $\mathcal{S}''$ -Weg ist und  $S \subsetneq (S \cup \{u\}) = \bigcup \mathcal{S}''$  gilt  $\mu_{G, \mathcal{S}''} \geq \mu_{G, \mathcal{S}}$ .

Unter allen Mengen von  $\mu_{G, \mathcal{S}}$  disjunkten  $\mathcal{S}''$ -Wegen in  $G$  die keine inneren Ecken in  $S \cup \{u\}$  haben, sei  $\mathcal{P}''$  eine der Mengen die die wenigsten Kanten ausserhalb von mit Wegen aus  $\mathcal{P}'$  benutzt. D. h.  $\mathcal{P}''$  minimiert

$$\sum_{P'' \in \mathcal{P}''} \left| E(P'') \setminus \bigcup_{P' \in \mathcal{P}'} E(P') \right|. \quad (5)$$

Da  $\mathcal{P}''$  nicht ausschließlich aus  $\mathcal{S}$ -Wegen bestehen kann, muss es einen Weg  $P''_0$  mit Endecke  $u$  enthalten. Wegen  $u \notin S = \bigcup \mathcal{S}'$  und  $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}''|$  muss es eine Endecke  $v \in S$  eines  $\mathcal{S}'$ -Weges  $P' \in \mathcal{P}'$  geben, die in keinem Weg aus  $\mathcal{P}''$  enthalten ist.

Ausgehend von  $v$  sei  $w$  die erste Ecke auf dem Weg  $P'$  die auch auf einem Weg aus  $\mathcal{P}''$  liegt. So eine Ecke  $w$  muss es tatsächlich geben, da sonst  $P'$  disjunkt zu allen Wegen aus  $\mathcal{P}''$  ist, was auch  $P' \neq P'_0$  nach sich zieht (da  $V(P'_0) \cap V(P'_0) \supseteq \{u\}$ ), und deswegen  $(\mathcal{P}'' \setminus \{P''_0\}) \cup \{P'\}$  eine Menge von  $\mu_{G, \mathcal{S}}$  disjunkten  $\mathcal{S}$ -Wegen in  $G$  wäre. Sei  $x$  die andere Endecke von  $P'$ , sei  $P'' \in \mathcal{P}''$  der Weg der  $w$  enthält und seien  $y$  und  $z$  die Endecken von  $P''$ . Weiterhin sei  $T'' \in \mathcal{S}''$  die Menge die  $v$  enthält.

Wir werden zeigen, dass  $P' = P'_0$  und wegen der Wahl von  $w$  muss dann  $u$  eine Ecke des Teilweges  $wP'x$  sein. Dann werden wir aus dem Teilweg  $vP''w$  und einem Teilweg von  $P''$  einen  $\mathcal{S}$ -Weg bauen, den wir an Stelle von  $P'_0$  zu  $\mathcal{P}'$  hinzufügen können, um so  $\mu_{G, \mathcal{S}}$  disjunkte  $\mathcal{S}$ -Wege zu erhalten.

Wir beginnen mit folgender Beobachtung, falls der Teilweg  $yP''w$  nicht ganz in  $wP'x$  enthalten ist und  $z$  nicht in  $T''$  liegt, dann könnten wir das Teilstück  $yP''w$  durch  $vP''w$  in  $P''$  ersetzen und erhielten auf diese Weise  $\mu_{G, \mathcal{S}}$  disjunkte  $\mathcal{S}''$ -Wege die der minimalen Wahl von  $\mathcal{P}''$  in (5) widersprechen würden. Also muss gelten, dass entweder der Teilweg  $yP''w$  (bzw.  $wP''z$ ) in  $wP'x$  enthalten ist oder  $z$  (bzw.  $y$ ) liegt in  $T''$ . Da aber nicht sowohl  $y$ , als auch  $z$  in  $T''$  liegen können (dann wäre  $P''$  kein  $\mathcal{S}''$ -Weg), können wir o. B. d. A. annehmen, dass  $y \notin T''$  und dass dann  $wP''z$  in  $wP'x$  enthalten ist. Auf der anderen Seite werden wir zeigen, dass nun aber  $yP''w$  nicht mehr in  $wP'x$  enthalten sein kann, was  $z \in T''$  nach sich zieht.

Angenommen  $yP''w$  wäre auch in  $wP'x$  enthalten. Dann muss  $w = y$  gelten und da die Wege aus  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}'$  keine inneren Ecken in  $S$  haben, muss in diesem Fall  $y = w = u$  und  $x = z$  gelten (bzw.  $z = w = u$  und  $x = y$ ). Das bedeutet aber, dass  $u$  eine innere Ecke von  $P'$  ist und deswegen  $P' = P'_0$ . Somit liegen  $y$  und  $x = z$  in  $T \cup \{u\}$ , also wäre  $P''$  kein  $\mathcal{S}''$ -Weg. Also ist  $yP''w$  nicht in  $wP'x$  enthalten und  $z \in T''$

Falls  $z = x$  ist, dann wären die Endecken  $x$  und  $v$  von  $P'$  beide in  $T''$ . Somit muss  $T''$  zwei Mengen aus  $\mathcal{S}'$  schneiden und deswegen gilt  $T'' = T \cup \{u\}$  und

$P' = P'_0$ . Aber dann enthält  $P'$  die Ecke  $u$  und schneidet den Weg  $P''_0$ . Da  $u$  keine innere Ecke von  $vP'w$  sein kann (wegen der Wahl von  $w$ ) und  $u \neq x = z$  muss dann aber  $w = u$ ,  $P''_0 = wP'x$  und somit auch  $P'' = P_0$  und  $w = y$  gelten. Dann wären aber die Endecken  $y = u$  und  $x$  von  $P''$  beide in  $T'' = T \cup \{u\}$  enthalten und wir erhielten den Widerspruch, dass  $P''$  kein  $\mathcal{S}''$ -Weg ist.

Also ist  $z$  eine innere Ecke  $P'$ . Da aber keine innere Ecke von  $P'$  in  $S$  liegt muss dann  $z = u$  sein und somit gilt  $P' = P'_0$  und  $P'' = P''_0$  und  $y$  ist nicht in  $P'$  enthalten, also  $y \neq w$ . Nun können wir  $P''$  in  $\mathcal{P}''$  durch  $vP'wP''y$  ersetzen und erhalten auf diese Weise  $\mu_{G,\mathcal{S}}$  disjunkte  $\mathcal{S}''$ -Wege die alle  $u$  nicht als Endecke haben und deswegen alle auch  $\mathcal{S}$ -Wege sind.  $\square$

Die folgende Formulierung von Maders Satz findet sich bereits in Maders Arbeit [2]. Ein Weg  $P$  in  $G = (V, E)$  ist ein  $H$ -Weg für einen induzierten Teilgraphen  $H = G[U]$ , falls die Endecken von  $P$  in  $H$  liegen und alle inneren Ecken außerhalb von  $H$  liegen. Wir sagen  $(X, F)$  für  $X \subseteq V \setminus U$  und  $F \subseteq E(G - U - X)$  ist  $H$ -zulässig, falls jeder  $X$ -vermeidende  $H$ -Weg eine Kante aus  $F$  enthält. Für so ein Paar  $(X, F)$  sei  $G(H; X, F)$  der Teilgraph mit Eckenmenge  $(V \setminus U) \setminus X$  und Kantenmenge  $F$ . Für eine Komponente  $C \in \mathcal{C}_{G(H; X, F)}$  definieren wir

$$\partial_{G,H,X,F}(C) = \{v \in V(C) : N_G(v) \setminus (X \cup V(C)) \neq \emptyset\}$$

und setzen

$$\mu_{G,H}(X, F) = |X| \sum_{C \in \mathcal{C}_{G(H; X, F)}} \lfloor |\partial_{G,H,X,F}(C)| / 2 \rfloor.$$

Es ist leicht einzusehen, dass jeder  $X$ -vermeidende  $H$ -Weg mindestens zwei Ecken aus  $\partial_{G,H,X,F}(C)$  für ein  $C \in \mathcal{C}_{G(H; X, F)}$  enthalten muss, weswegen für jedes  $H$ -zulässige Paar  $(X, F)$  der Wert  $\mu_{G,H}(X, F)$  eine obere Schranke für die maximale Anzahl kreuzungsfreier  $H$ -Wege in  $G$  darstellt. Wie in Satz 1 ist diese Schranke bestmöglich.

**Korollar 2.** *Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $H = G[U]$  ein induzierter Teilgraph für eine Menge  $U \subseteq V$ . Die maximale Anzahl kreuzungsfreier  $H$ -Wege in  $G$  ist  $\min_{X,F} \mu_{G,H}(X, F)$ , wobei das Minimum über alle  $H$ -zulässigen Paare  $(X, F)$  genommen wird.*

*Beweis (Skizze).* Grob gesprochen würden wir gerne Satz 1 für den Graphen  $G' = G - U$  und die Mengen  $\mathcal{S} = \{N_G(u) \setminus U : u \in U\}$  anwenden, um disjunkte  $\mathcal{S}$ -Wege in  $G'$  mit kreuzungsfreien  $H$ -Wegen in  $G$  in Zusammenhang zu bringen. Hierbei ergeben sich zwei kleine technische Problem. Zum einen besteht  $\mathcal{S}$  im Allgemeinen nicht aus paarweise disjunkten Mengen und zum anderen kann es sein, dass ein  $H$ -Weg bestehend aus zwei Kanten in  $G$  zu einem trivialen Weg in  $G'$  degeneriert.

Die folgende Konstruktion adressiert diese beiden technischen Details.

- Setze  $W = V \setminus U$  und  $W_{\geq 2} = \{w \in W : |N_G(w) \cap U| \geq 2\}$ .
- Ausgehend von  $G' = G[W]$  füge für jede Ecke  $w \in W_{\geq 2}$  eine neue Ecke  $w'$  ein, die nur mit  $w$  verbunden wird und sei  $G''$  der resultierende Graph.
- Setze

$$\mathcal{S} = \{(N_G(u) \cap W) \setminus W_{\geq 2} : u \in U\} \cup \{\{w\} : w \in W_{\geq 2}\} \cup \{\{w'\} : w \in W_{\geq 2}\}$$

Mit Hilfe dieser Konstruktion kann man zeigen, dass die Kriterien in Satz 1 angewandt für  $G''$  und  $\mathcal{S}$  denen in Korollar 2 für  $G$  und  $H$  entsprechen und so kann man Korollar 2 aus Satz 1 herleiten.  $\square$

## LITERATUR

1. T. Gallai, *Maximum-minimum Sätze und verallgemeinerte Faktoren von Graphen*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **12** (1961), 131–173. [1](#)
2. W. Mader, *Über die Maximalzahl kreuzungsfreier  $H$ -Wege*, Arch. Math. (Basel) **31** (1978/79), no. 4, 387–402. [1](#), [1](#)
3. A. Schrijver, *A short proof of Mader's  $\mathcal{S}$ -paths theorem*, J. Combin. Theory Ser. B **82** (2001), no. 2, 319–321. [1](#), [1](#)