

Mathematik III für Studierende der Physik

Vorlesungsskript

Birgit Richter *

Fachbereich Mathematik

Universität Hamburg

<https://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/> †

Hamburg, Wintersemester 2025/26

Inhaltsverzeichnis

0	Wiederholungen aus der MfP 2	1
0.1	Riemann-Integral, Fourier-Reihen	1
0.2	Mannigfaltigkeiten	12
1	Mehrdimensionale Integrale	16
1.1	Zugänge zur Lebesgueschen Integrationstheorie	16
1.2	Das Lebesgue-Integral und zwei „kleine“ Sätze	23
1.3	Volumina und Nullmengen	34
1.4	Vollständigkeit von $L^1(\mathbb{R}^n)$, Konvergenzsätze	46
1.5	Parameterabhängige Integrale, der Satz von Fubini und der Transformationsatz	52

*mit herzlichem Dank an die Dozent*innen der Vorjahre

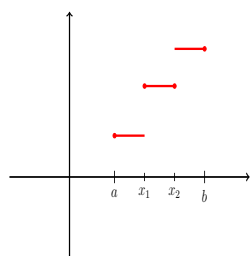
†Version vom 31. Oktober 2025

0 Wiederholungen aus der MfP 2

0.1 Riemann-Integral, Fourier-Reihen

Wir erinnern zunächst (ohne die Beweise aus MfP I zu wiederholen) an den Riemannschen Integralbegriff:

Definition 0.1.1 [Reellwertige Treppenfunktion] Eine Funktion $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung $Z: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass φ auf jedem der offenen Teilintervalle (x_{i-1}, x_i) konstant ist, $i = 1, 2, \dots, n$. (Man beachte, dass hier eingeht, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist.)



Definition 0.1.2 [Integral einer Treppenfunktion]

Sei $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$, so dass $\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Wir definieren das Integral der Treppenfunktion φ durch

$$\int_a^b \varphi(x) dx := \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}).$$

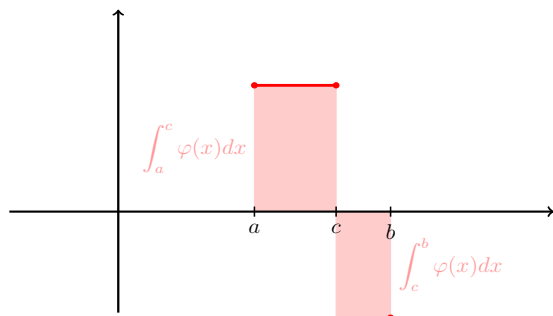
Beispiel 0.1.3 (Geometrische Interpretation). Sei F das zwischen der x -Achse und dem Graphen der Funktion φ liegende Gebiet.

F ist eine endliche Vereinigung von Rechtecken. Sei $A(F)$ der Flächeninhalt von F .

Wenn $\varphi \geq 0$, so ist $\int_a^b \varphi(x) dx = A(F) \geq 0$.

Wenn $\varphi \leq 0$, so ist $\int_a^b \varphi(x) dx = -A(F) \leq 0$.

D.h. die Fläche oberhalb der x -Achse trägt positiv, die unterhalb der x -Achse negativ zum Integral bei.



Definition 0.1.4 [Ober- und Unterintegral] Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Das Oberintegral von f ist die Zahl

$$\int_a^{*b} f(x) dx := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \text{ Treppenfunktion mit } \varphi \geq f \right\}.$$

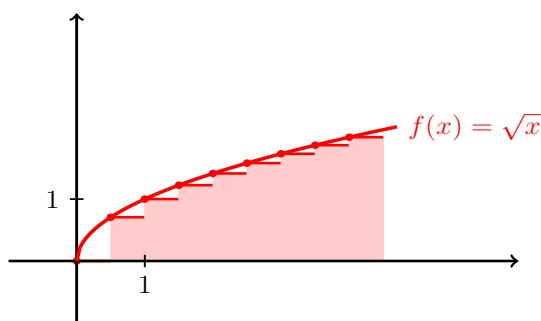
Das Unterintegral von f ist die Zahl

$$\int_{*a}^b f(x) dx := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \text{ Treppenfunktion mit } \varphi \leq f \right\}.$$

Bemerkungen (ÜA)

- $\int_{*a}^b f(x) dx \leq \int_a^{*b} f(x) dx$.
- $\int_{*a}^b \varphi(x) dx = \int_a^{*b} \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$ für jede Treppenfunktion

Untersumme:



Betrachtung 0.1.5.

1. Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_{*0}^1 f(x)dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{*1} f(x)dx = 1.$$

Ober- und Unterintegral stimmen also nicht notwendigerweise überein.

2. Für eine nach oben unbeschränkte Funktion wie z.B.

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

gibt es keine Treppenfunktion φ mit $\varphi \geq f$, und es wird $\int^* f dx = \infty$ gesetzt. Ist f nach unten unbeschränkt so wird $\int_* f dx = -\infty$ gesetzt.

Definition 0.1.6 [Riemann-integrierbare Funktion] Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn

$$\int_a^{*b} f(x)dx = \int_{*a}^b f(x)dx.$$

Man definiert dann das (Riemann-)Integral von f als die reelle Zahl

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^{*b} f(x)dx = \int_{*a}^b f(x)dx.$$

Satz 0.1.7. [Integrierbarkeit von Produkten] Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen und $p \in [1, \infty)$. Dann gilt:

- (i) Die Funktion $|f|^p$ ist Riemann-integrierbar.
- (ii) Die Funktion $f \cdot g$ ist Riemann-integrierbar.

In manchen Fällen reicht es als Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals, uneigentliche Riemann-Integrale zu betrachten.

Definition 0.1.8 [Integral über unbeschränkte Integrationsbereiche] Sei $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für jedes $x > a$ die Einschränkung $f|_{[a, x]}$ beschränkt und integrierbar ist. Wir nennen f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a, \infty)$, falls der Grenzwert

$$\int_a^\infty f(t) dt := \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$$

existiert. Analog verfährt man mit $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt uneigentlich Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}$, falls für $c \in \mathbb{R}$ die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^c f(t) dt \quad \text{und} \quad \int_c^{\infty} f(t) dt$$

existieren.

Definition 0.1.9 [Integrale unbeschränkter Funktionen] Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nicht unbedingt beschränkt, aber für jedes Teilintervall $[\alpha, \beta] \subseteq (a, b)$ integrierbar. Falls dann für $c \in (a, b)$ die Grenzwerte

$$\lim_{\alpha \searrow a} \int_{\alpha}^c f(t) dt \quad \text{und} \quad \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^{\beta} f(t) dt$$

existieren, so nennen wir f über das Intervall (a, b) (eventuell uneigentlich) Riemann-integrierbar, und setzen

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{\alpha \searrow a} \lim_{\beta \nearrow b} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt.$$

Betrachtung 0.1.10. 1. Als Beispiel betrachten wir für die unbeschränkte Funktion $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Dieses Integral kann als uneigentliches Integral sinnvoll definiert werden:

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \quad (\varepsilon > 0).$$

Wir können hier nicht direkt mit dem “ersten Teilintervall” der Zerteilung des Urbildbereichs umgehen und nehmen daher einen Grenzwert (in der um uneigentliche Integrale erweiterten Riemann-Integrationstheorie).

2. Wir betrachten auch ein Beispiel, in dem das uneigentliche Riemann-Integral nicht existiert: Zwar wäre

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x}.$$

aber beide Integrale existieren einzeln nicht, da $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon$ nicht existiert. Also existiert dieses Integral nicht als uneigentliches Integral.

3. (Übung:) Für $s > 0$ ist die Gamma-Funktion definiert durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Es gilt $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für alle $s > 0$; dabei ist $\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

4. Wir betrachten die stetige Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x > 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Man kann mit funktionentheoretischen Methoden zeigen, dass das uneigentliche Integral existiert:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Es existiert aber nicht das Integral des Absolutbetrags $|f|$:

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{c}{n} = \infty$$

für eine geeignete Konstante $c > 0$.

Definition 0.1.11 Eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte reell- oder komplexwertige Funktion f heißt periodisch mit Periode $L > 0$, wenn

$$f(x+L) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- Es ist dann auch $f(x+nL) = f(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
- Hat die Funktion f die Periode L , so hat

$$F(x) := f\left(\frac{L}{2\pi}x\right)$$

die Periode 2π .

Wir beschränken uns auf solche Funktionen. Sei V der Vektorraum der 2π -periodischen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, für die $f|_{[0,2\pi]}$ Riemann-integrierbar ist.

Wir betrachten auf dem Vektorraum V der 2π -periodischen auf $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbaren Funktionen (unter Beachtung von 0.1.7) die Hermitesche Form

$$(*) \quad \langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in V.$$

Die hermitesche Form $(*)$ ist positiv semi-definit, d.h. $\langle f, f \rangle \geq 0$ für alle $f \in V$. Auf dem Unterraum der stetigen Funktionen ist sie positiv definit und somit ein Skalarprodukt. Wir schreiben $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ (auch im semi-definiten Fall). Auf demselben Unterraum können wir auch die Norm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$ betrachten. Aus MfP I wissen wir:

Satz 0.1.12. Die Funktionen $e_k(x) := \exp(ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$, bilden ein orthonormales System bezüglich der Hermiteschen Form $(*)$.

Die $e_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$ bilden eine Hilbertbasis des *Hilbertraums* der L^2 -Funktionen auf $[0, 2\pi]$, den wir später noch einführen werden.

Definition 0.1.13

Ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$ ist eine Linearkombination

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad \gamma_k \in \mathbb{C}.$$

Es gilt $p \in V$ und $\gamma_k = \langle p, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) e^{-ikx} dx$.

Definition 0.1.14 Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische Funktion, so dass $f|_{[0, 2\pi]}$ integrierbar ist. Die komplexe Zahl

$$c_k := \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

heißt k -ter Fourier-Koeffizient und das trigonometrische Polynom $F_n(f) := \sum_{k=-n}^n c_k e_k$ heißt n -tes Fourier-Polynom von f .

Die Reihe $(F_n(f))_{n=0,1,\dots}$, also die Folge der Partialsummen, heißt Fourier-Reihe von f .

Bemerkungen 0.1.15. Es gilt

$$F_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

wobei

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \end{aligned}$$

Wenn f reellwertig ist, dann ist $c_{-k} = \bar{c}_k$ und auch die Fourierreihe $F_n(f)$ ist reellwertig.

Ähnlich wie bei einer Taylorreihe ist nicht garantiert, dass die Fourierreihe einer Funktion f konvergiert und dass sie im Fall der Konvergenz gegen f konvergiert.

Wenn aber $f \in V$ sich in der Form

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e_k$$

mit einer *gleichmäßig* konvergenten Reihe darstellen lässt, muss diese Reihe die Fourierreihe sein, denn man kann Integration und Limesbildung bei gleichmäßiger Konvergenz vertauschen und findet für den Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e_m \right) e_{-k} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m \int_0^{2\pi} e_{m-k} dx = \gamma_k \end{aligned}$$

Im Allgemeinen konvergiert aber die Fourierreihe von f weder gleichmäßig noch punktweise gegen f . Ein anderer Konvergenzbegriff auf V ist angemessen.

Lemma 0.1.16. Die Funktion $f \in V$ habe das n -te Fourier-Polynom $F_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k e_k$. Dann gilt: $\|f - F_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|F_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$.

Beweis. Wir finden

$$\langle f, F_n(f) \rangle = \sum_{k=-n}^n \bar{c}_k \langle f, e_k \rangle = \sum_{k=-n}^n \bar{c}_k c_k = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

und

$$\langle F_n(f), F_n(f) \rangle = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Somit

$$\begin{aligned} \|f - F_n(f)\|_2^2 &= \langle f, f \rangle - \langle f, F_n(f) \rangle - \langle F_n(f), f \rangle + \langle F_n(f), F_n(f) \rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \|F_n(f)\|_2^2 \end{aligned}$$

□

Satz 0.1.17 (Fourier-Polynome und Besselsche Ungleichung). (i) Das Fourierpolynom $F_n(f)$ ist die beste Approximation *im quadratischen Mittel* an $f \in V$ durch ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$, d.h. $\|f - F_n(f)\|_2 = \inf_{g \in V_n} \|f - g\|_2$, wobei $V_n := \text{span}\{e_k \mid -n \leq k \leq n\}$.

(ii) Für die Fourier-Koeffizienten c_k von $f \in V$ gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - F_n(f)\|_2 = 0.$$

Beweis. Seien c_k die Fourierkoeffizienten von f .

Um (i) zu zeigen, berechnen wir für beliebiges $g := \sum_{k=-n}^n d_k e_k \in V_n$:

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n (\bar{d}_k c_k + d_k \bar{c}_k) + \sum_{k=-n}^n |d_k|^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 + \|F_n(f) - g\|_2^2. \end{aligned}$$

Dies wird minimal für $g = F_n(f)$.

(ii) folgt nun aus dem vorangegangenen Hilfssatz: für alle f gilt

$$\sum_k |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

und Gleichheit gilt wegen $\|f - F_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$ genau wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - F_n(f)\|_2 = 0$. $\square$

Wir wollen nun zeigen, dass für $f \in V$ in der Besselschen Ungleichung Gleichheit gilt (Parsevalsche Gleichung).

Satz 0.1.18 (Konvergenz der Fourier-Reihe im quadratischen Mittel). Sei V der Vektorraum der 2π -periodische Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, für die $f|_{[0,2\pi]}$ integrierbar ist.

(i) Für alle $f \in V$ gilt

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

(ii) Die Fourier-Reihe von $f \in V$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f , d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - F_n(f)\|_2 = 0$.

Zum Beweis: Aus dem vorhergehenden Satz wissen wir, dass (i) und (ii) äquivalent sind. Es genügt also, (ii) zu zeigen.

Wir betrachten $\sigma \in V$ mit $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\sigma(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für } 0 < x < 2\pi, \quad \sigma(0) = 0.$$

Wir finden $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(x) dx = 0$ und für $k \neq 0$ ist $c_k = \frac{1}{2ik}$.

Die Fourierreihe lautet also:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{ikx}}{k} - \frac{e^{-ikx}}{k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} .$$

Aus der Konvergenz im quadratischen Mittel folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sigma(x)|^2 = \frac{\pi^2}{6} .$$

Lemma 0.1.19 (über Treppenfunktionen). Sei $f \in V$ so, dass $f|_{[0,2\pi]}$ eine *Treppenfunktion* ist.

Dann konvergiert die Fourier-Reihe $F_n(f)$ im quadratischen Mittel gegen f .

Weiter im Beweis des Satzes:

$f|_{[0,2\pi]}$ ist als Riemann-integrierbare Funktion beschränkt. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass f reellwertig ist und $|f| \leq 1$.

Dann existieren zu $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $-1 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$, so dass $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \frac{\varepsilon^2}{8}$. Für $0 \leq x \leq 2$ gilt $x^2 \leq 2x$.

Für $(\psi - \varphi)^2 \leq 2(\psi - \varphi)$ folgt daraus

$$\|f - \varphi\|_2^2 \leq \|\psi - \varphi\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(\psi - \varphi) \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

und somit $\|f - \varphi\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Wegen des Lemmas über Treppenfunktionen existiert für die Treppenfunktion φ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|\varphi - F_n(\varphi)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$.

Mit $g := f - \varphi$ gilt $\|g - F_n(g)\|_2 \leq \|g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und somit $\|f - F_n(f)\|_2 \leq \|g - F_n(g)\|_2 + \|\varphi - F_n(\varphi)\|_2 < \varepsilon$. $\square$

Beweis des Lemmas über Treppenfunktionen:

Wir können annehmen, dass wir es mit der Treppenfunktion f mit $f|_{(0,a)} = 1$ und $f|_{(a,2\pi)} = 0$ zu tun haben, denn jede Treppenfunktion lässt sich als Linearkombination solcher Funktionen darstellen.

Als Fourier-Koeffizienten erhalten wir $c_0 = \frac{a}{2\pi}$ und

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-ikx} dx = \frac{i}{2\pi k} e^{-ikx} \Big|_0^a, \quad k \in \mathbb{N}, k \neq 0.$$

Mit $|c_k|^2 = \frac{1 - \cos ka}{2\pi^2 k^2}$ ($k \neq 0$) erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ka}{k^2}.$$

Weiter im Beweis:

Mit Hilfe der für alle $x \in [0, 2\pi]$ gültigen Formel

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \left(\frac{x - \pi}{2} \right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

erhalten wir für $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ und somit}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \left(\left(\frac{a - \pi}{2} \right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \right) = \frac{a}{2\pi} = \|f\|_2^2.$$

Also konvergiert $F_n(f)$ im quadratischen Mittel gegen die Treppenfunktion f .

Es bleibt der Beweis der Identität $(*)$ nachzutragen.

Wir behaupten:

$$(**) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für alle } x \in (0, 2\pi).$$

Darf man $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{x - \pi}{2}$ gliedweise integrieren, so erhält man

$$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{(x - \pi)^2}{4} + c,$$

und durch weitere gliedweise Integration und weil F periodisch ist

$$0 = \int_0^{2\pi} F(x) dx = \frac{(x - \pi)^3}{12} \Big|_0^{2\pi} + 2\pi c = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c,$$

also $c = -\frac{\pi^2}{12}$, und damit gilt die Behauptung $(*)$.

Weiter im Beweis von $(*)$:

Um die gliedweise Integration zu rechtfertigen, stellen wir zuerst fest, dass die Reihe $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

Man muss außerdem die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ gegen $\frac{\pi - x}{2}$ auf jedem kompakten Teilintervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ von $(0, 2\pi)$ zeigen.

[Dazu schätzen wir zunächst $s_n(x) := \sum_{k=1}^n \sin kx = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right)$ ab:

$$|s_n(x)| \leq \left| \sum_{k=1}^n e^{ikx} \right| = \left| e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right| \leq \frac{2}{|e^{ix/2} - e^{-ix/2}|} \leq \frac{1}{\sin \delta/2}.$$

Weiter im Beweis: Aus $|s_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \delta/2} =: \sigma$ erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^m \frac{\sin kx}{k} \right| &= \left| \sum_{k=n}^m \frac{s_k(x) - s_{k-1}(x)}{k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=n}^m s_k(x) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{s_m(x)}{m+1} - \frac{s_{n-1}(x)}{n} \right| \\ &\leq \sigma \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n} \right) = \frac{2\sigma}{n}. \end{aligned}$$

Also $\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \frac{2\sigma}{n}$, woraus die gleichmäßige Konvergenz der Reihe folgt.]

Es bleibt noch die Identität $(**) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi-x}{2}$ zu zeigen.

Zum Beweis von ():**

Es gilt $\frac{\sin kx}{k} = \int_{\pi}^x \cos kt \, dt$ und

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos kt &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (e^{ikt} + e^{-ikt}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^{-int}(1 - e^{i(2n+1)t})}{2(1 - e^{it})} - \frac{1}{2} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Lemma 0.1.20. Für jede stetig differenzierbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt mit $r \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin rx \, dx = 0.$$

Beweis. partielle Integration. □

Weiter im Beweis:

Mit Hilfe des Lemmas erhalten wir schließlich:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi}^x \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt - \frac{x - \pi}{2} = \frac{\pi - x}{2}.$$

□

Bemerkungen 0.1.21. Aus der Besselschen Ungleichung folgt, dass die Folgen c_k, c_{-k} quadratisch summierbare komplexe Zahlenfolgen sind, d.h. Elemente von ℓ^2 .

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt die Vollständigkeit des Orthonormalsystems $e_k(x), k \in \mathbb{Z}$.

Anders als bei der Taylorreihe können auch periodische Funktionen dargestellt werden, die nur *stückweise stetig differenzierbar* sind.

Satz 0.1.22 (Fourierentwicklung). Sei $f \in V$ stetig und stückweise C^1 , d.h. es gibt eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 2\pi$, so dass $f_k := f|_{[t_{k-1}, t_k]}$ von der Klasse C^1 ist, $k = 1, \dots, r$.

Dann konvergiert die Fourierreihe $F_n(f)$ *gleichmäßig* gegen f .

Beweis.

Sei φ die periodische Funktion, die durch $\varphi|_{[t_{k-1}, t_k]} = f'_k$ definiert wird.

Die Fourier-Koeffizienten c_n von f ergeben sich durch partielle Integration aus den Fourier-Koeffizienten γ_n von φ :

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)e^{-inx} dx = \frac{i}{n} f(x)e^{-inx} \Big|_{t_{k-1}}^{t_k} - \frac{i}{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi(x)e^{-inx} dx.$$

Wegen der Periodizität von f erhält man daraus $c_n = -\frac{i}{n}\gamma_n$ ($n \neq 0$).

Weiter im Beweis:

Wegen der allgemeinen Ungleichung $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$ folgt nun

$$|c_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |\gamma_n|^2 \right).$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 < \infty$ (Besselsche Ungleichung) ist $\sum |c_n|$ (von x unabhängige) absolut konvergente Majorante der Fourier-Reihe, und daraus folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe $F_n(f)$ gegen eine stetige Grenzfunktion g .

Andererseits konvergiert $F_n(f)$ im quadratischen Mittel gegen f .

Das ist nur möglich, wenn $f = g$, denn beide Funktionen sind stetig. □

0.2 Mannigfaltigkeiten

Wir erinnern an einige Resultate des letzten Semesters:

Theorem 0.2.1 (MfP2: Allgemeine Abbildungen von konstantem Rang).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^k -Abbildung mit konstantem Rang $\text{rg}(f) = r$ auf U .

Dann existieren für jeden Punkt $p \in U$ offene Umgebungen $V \subseteq U$ des Urbilds p und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ des Bilds $f(p)$ und C^k -Diffeomorphismen

$$\varphi: V \rightarrow \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \text{ und } \psi: W \rightarrow \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

so dass

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$$

auf $\varphi(V)$.

Wir erinnern auch an zwei Spezialfälle:

- Gilt $r = n \leq m$, so liegt eine Submersion vor; das Differential von f ist surjektiv.
- Gilt $r = m \leq n$ so liegt eine Immersion vor; das Differential von f ist injektiv.

Definition 0.2.2 (MfP2)

1. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt m -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine C^k -Abbildung $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ (mit konstantem Rang m) gibt, die T homöomorph (also bijektiv, stetig, mit stetiger Umkehrabbildung) auf $U \cap M$ abbildet, $\varphi(T) = U \cap M$.
2. Wir sprechen bei $T \xrightarrow{\sim} U \cap M$ von einer lokalen Parametrisierung von M und bei $U \cap M \xrightarrow{\sim} T$ auch von einer Karte bei $p \in M$.
3. Zweidimensionale Untermannigfaltigkeit heißen Flächen. $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ heißen auch Hyperflächen.
Sprechen wir von einer Untermannigfaltigkeit ohne weiteren Zusatz, so meinen wir eine C^1 -Untermannigfaltigkeit.

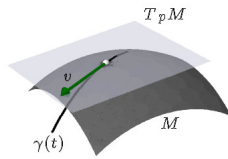
Bemerkungen 0.2.3 (MfP2).

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und seien $\varphi_1: T_1 \xrightarrow{\sim} \varphi_1(T_1)$ und $\varphi_2: T_2 \xrightarrow{\sim} \varphi_2(T_2)$ zwei lokale Parametrisierungen mit $V := \varphi_1(T_1) \cap \varphi_2(T_2) \neq \emptyset$.

Dann sind die Urbild-Mengen $W_j := \varphi_j^{-1}(V)$ offen im $\mathbb{R}^k$, und es gibt einen Diffeomorphismus $\tau: W_1 \rightarrow W_2$ mit $\varphi_2 \circ \tau = \varphi_1|_{W_1}$ (Kartenwechselabbildung).

Definition 0.2.4 (MfP2)

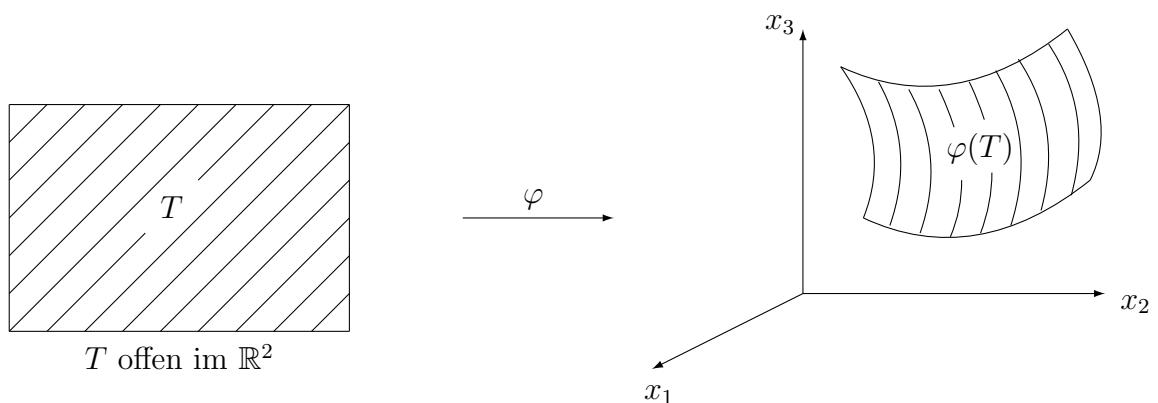
1. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in p , wenn es ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1 -Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $\gamma(0) = p$ und $v = \gamma'(0)$.



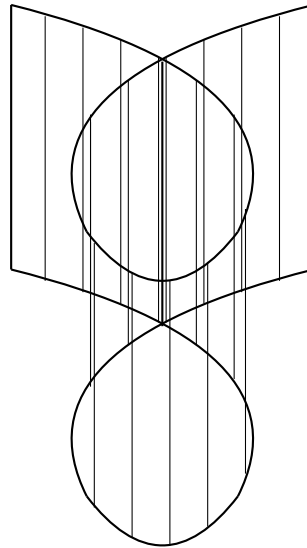
2. Die Menge aller Tangentialvektoren an M in $p \in M$ heißt Tangentialraum und wird mit $T_p M$ bezeichnet.
3. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Normalenvektor einer Untermannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^n$ im Punkt $p \in M$, wenn $v \in N_p M := T_p M^\perp$ gilt. Hierbei ist das orthogonale Komplement bezüglich des euklidischen Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^n$ zu nehmen.

Beispiel 0.2.5.

1. Eindimensionale Untermannigfaltigkeiten (Kurven):
Ist $m = 1$ und T ein Intervall, so ist eine Karte von M ein doppelpunktfreier, stetig differenzierbarer *parametrisierter Weg* im $\mathbb{R}^n$, bei dem auch noch für alle $t \in T$ die Ableitung $\varphi'(t) \neq 0$ ist.
2. Zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten (Flächen):
Für $m = 2$ erhalten wir eine *parametrisierte Fläche* (ohne Selbstschnitt) .



So etwas $\longrightarrow$
 ist dabei nicht zugelassen !



3. Man beachte aber, dass für die globale Beschreibung einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ i.A. nicht nur *eine* Karte genügt. Ein Beispiel dafür ist schon die 2-Sphäre im $\mathbb{R}^3$.

Auch die folgenden Sachverhalte sind uns schon bekannt:

Satz 0.2.6 (MfP2: Eigenschaften von Tangential- und Normalraum).

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $T_p M$ der Tangentialraum an M in $p \in M$. Dann gilt:

- a) $T_p M$ ist ein k -dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.
- b) Sei $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow V$ eine lokale Parametrisierung von M , $u \in U$ mit $p = \varphi(u)$. Dann bilden die k Vektoren $\partial_1 \varphi(u), \dots, \partial_k \varphi(u)$ in $\mathbb{R}^n$ eine Basis des Tangentialraums $T_p M$.
- c) Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von p und $f = (f_1, \dots, f_{n-k}): V \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ eine Submersion, so dass $M \cap V = f^{-1}(q)$, wobei $q = f(p)$. Dann ist $T_p M = \text{Kern}(df_p) = \bigcap_{j=1}^{n-k} (\text{grad} f_j(p))^\perp$.
- d) Unter den Voraussetzungen in c) wird eine Basis des Normalenraums $N_p M$ gegeben durch

$$\text{grad} f_1(p), \dots, \text{grad} f_{n-k}(p).$$

1 Mehrdimensionale Integrale

Integration über mehrdimensionale Bereiche benötigt man in der Vektoranalysis, für die Lösung von partiellen Differentialgleichungen und für viele andere Anwendungen in Physik und anderen Naturwissenschaften.

Im ersten Semester wurde die auf Riemann zurückgehende Definition von Integralen eingeführt. Wir werden die Definition der Integration in zweierlei Hinsicht verallgemeinern:

- Wir wollen Funktionen integrieren, die von mehr als einer Variablen abhängen. Das braucht man z.B. für die Elektrodynamik und die Lösung von partiellen Differentialgleichungen.
- Wir wollen die Klasse der integrierbaren Funktionen wesentlich erweitern. Das ist z.B. für die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik wichtig.

Im diesem Kapitel werden wir den auf Lebesgue zurückgehenden Integralbegriff so einführen, dass beide Ziele gleichzeitig erreicht werden.

1.1 Zugänge zur Lebesgueschen Integrationstheorie

Wir folgen [K2, §7.1-2.].

Das Riemann-Integral hat Eigenschaften, die seine Relevanz in vielen Bereichen erheblich einschränken:

Bemerkungen 1.1.1.

1. Betrachte die *Dirichlet-Funktion* mit einer dichten Menge an Sprungstellen

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ober- und Unterintegral berechnen sich zu

$$\int_0^{*1} f(x)dx = 1 \text{ und } \int_{*0}^1 f(x)dx = 0$$

Da sie verschieden sind, ist die Dirichlet-Funktion nicht Riemann-integrierbar.

Andererseits passt die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ in eine abzählbare Vereinigung $\bigcup_i [a_i, b_i]$ von Intervallen, die für jedes $\varepsilon > 0$ so gewählt werden kann, dass ihre Gesamtlänge kleiner als $\sum_i |b_i - a_i| < \varepsilon$ ist. Um das zu sehen, wähle eine Abzählung $q_1, q_2, \dots$ von $\mathbb{Q}$. Wähle ein α mit $0 < \alpha < 1$ und setze

$$[a_i, b_i] := \left[q_i - \frac{1}{2}\alpha^i, q_i + \frac{1}{2}\alpha^i \right],$$

Dann ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \alpha \frac{1}{1 - \alpha}$$

was für $\alpha \rightarrow 0$ beliebig klein wird.

Es ist daher sehr naheliegend, der Menge $\mathbb{Q}$ die „Länge“ null zuzuordnen. Das Integral einer Funktion, die nur die Werte 0 und 1 annimmt, sollte als Maß für die Länge der Menge $\{x; f(x) = 1\}$ interpretierbar sein. Im Falle der Dirichlet-Funktion f würde man daher erwarten, dass $\int_0^1 f(x)dx = 0$ gilt.

2. Gegeben sei eine Funktionenfolge $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbarer Funktionen. Konvergiert f_n in der Supremumsnorm gegen eine integrierbare Funktion f , so konvergieren die Riemann-Integrale:

$$\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f.$$

Dies folgt, weil $\|f_n - f\| < \epsilon$ impliziert

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \epsilon |b - a|.$$

Punktweise Konvergenz, also $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ reicht aber nicht aus, um auf Konvergenz der Integrale zu schließen.

3. Wir hatten schon in der Theorie der Fourier-Reihen gesehen, dass wir durch Riemann-quadratintegrale Funktionen keinen Hilbert-Raum erhalten.

Die Dirichlet-Funktion ist ein Beispiel einer charakteristischen Funktion:

Definition 1.1.2

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die charakteristische Funktion oder auch Indikatorfunktion der Teilmenge A ist die Funktion

$$1_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Insbesondere ist die Dirichlet-Funktion die charakteristische Funktion $f = 1_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$.

Bemerkungen 1.1.3.

Der in dieser Vorlesung verwendete Zugang zum Lebesgue-Integral verwendet eine Approximation von Funktionen auf Gebieten im $\mathbb{R}^n$ durch Treppenfunktionen. Die Qualität der Approximation wird durch die sogenannte L^1 -Halbnorm gemessen.

Ein weiterer Zugang verwendet die Maßtheorie. Wir zerlegen nicht, wie beim Riemann-Integral, den Urbildbereich, sondern den Bildbereich einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$-\infty < c_1 < c_2 < \dots < c_k < \infty$$

und approximieren das Integral durch die endliche Summe

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i \cdot \mu(f^{-1}([c_i, c_{i+1}])).$$

Damit vermeiden wir das Problem des Riemann-Integrals, dass die Funktion beschränkt sein muss. Wir brauchen aber dann ein *Maß*, also eine Funktion, die (zumindest gewissen) Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Volumen, also eine Zahl $\mu(A) \in \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ zuordnet. Solche Maße sind nicht ganz leicht zu konstruieren, sind aber für Anwendungen von unabhängiger Bedeutung.

Startpunkt für die Definition der L^1 -Halbnorm ist die Definition einer sehr einfachen Klasse von Funktionen, für die es eine offensichtliche Definition des Integrals gibt.

Treppenfunktionen sind Funktionen, die höchstens auf endlich vielen Quadern im $\mathbb{R}^n$ einen nichtverschwindenden konstanten Wert annehmen, und ausserhalb der Vereinigung der Quader verschwinden.

Definition 1.1.4

1. Ein Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist das direkte Produkt $I_1 \times \dots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ von n beschränkten, nicht-leeren Intervallen $I_\mu \subseteq \mathbb{R}$. Diese Intervalle dürfen offen, halboffen, abgeschlossen sein und auch aus einem einzigen Punkt bestehen. Quader in $\mathbb{R}^1$ sind also die Intervalle (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, wobei im letzten Fall auch $a = b$ sein darf.
2. Das (n -dimensionale) Volumen eines solchen Quaders ist die nicht-negative reelle Zahl

$$v(Q) := v_n(Q) := \prod_{\mu=1}^n |I_\mu| = \prod_{\mu=1}^n (b_\mu - a_\mu).$$

In einer Hyperebene enthaltene Quader Q haben das Volumen 0; man nennt sie ausgeartete Quader.

3. Eine Funktion $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$, wenn es endlich viele paarweise disjunkte Quader $Q_i \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass
 - (a) die Funktion φ auf jedem Quader Q_k konstant ist,
 - (b) $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus (\cup_k Q_k)$ gilt.

Bemerkungen 1.1.5.

1. Man beachte, dass man die Vereinigung endlich vieler Quader auch als die Vereinigung endlich vieler *disjunkter* Quader darstellen kann.
2. Man zeige, dass für Treppenfunktionen φ und ψ auch
 - (a) ihre Summe $\varphi + \psi$
 - (b) jedes skalare Vielfache $\lambda\varphi$ für $\lambda \in \mathbb{C}$
 - (c) der Absolutbetrag $|\varphi|$
 - (d) im Fall von reellwertigen Treppenfunktionen: Maximum $\max(\varphi, \psi)$ und Minimum $\min(\varphi, \psi)$

Treppenfunktionen sind. Insbesondere bilden Treppenfunktionen einen Vektorraum.

3. Treppenfunktionen lassen sich schreiben als endliche Linearkombination charakteristischer Funktionen *disjunkter* Quader $Q_i \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\varphi = \sum_{k \in E} c_k \mathbf{1}_{Q_k} \quad \text{mit} \quad c_k \in \mathbb{C} \text{ und } E \text{ endlich.} \quad (1)$$

Umgekehrt ist jede endliche Summe charakteristischer Funktionen von Quadern eine Treppenfunktion, auch wenn die Quader nicht disjunkt sind.

4. Wir könnten auch Funktionen mit Werten in einem reellen oder komplexen Banachraum betrachten.

Definition 1.1.6

Das Integral einer Treppenfunktion der Form (1) mit disjunkten Quadern ist die komplexe Zahl

$$\int \varphi \, dx := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx := \sum_{k \in E} c_k v(Q_k).$$

Lemma 1.1.7.

- (i) Dieses Integral ist wohldefiniert, hängt also nicht von der Darstellung der Treppenfunktion als Linearkombination charakteristischer Funktionen von disjunkten Quadern ab.
- (ii) Es gelten die folgenden Rechenregeln:
 1. $\int$ ist ein $\mathbb{C}$ -lineares Funktional auf dem Vektorraum der Treppenfunktionen.
 2. Sei φ eine Treppenfunktion. Dann gilt: $|\int \varphi \, dx| \leq \int |\varphi| \, dx$.

3. (Monotonie:) Sind φ, ψ reellwertige Treppenfunktionen und gilt $\varphi \leq \psi$, so folgt $\int \varphi dx \leq \int \psi dx$.

Beweis. Um zu zeigen, dass das Integral wohldefiniert ist, verwenden wir Induktion nach der Dimension n ; der Fall $n = 1$ wurde bereits im ersten Semester erledigt und ist elementar.

Für den Induktionsschritt zerlege $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ mit $0 < p < n$. Wir schreiben entsprechend $\mathbb{R}^n \ni z = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^p$ und $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ und Quader als Produkte von Quadern:

$$Q = Q^p \times Q^{n-p}.$$

Man beachte, dass für die charakteristische Funktion gilt

$$\mathbf{1}_Q(x, y) = \mathbf{1}_{Q^p}(x) \cdot \mathbf{1}_{Q^{n-p}}(y).$$

Sei φ Treppenfunktion wie in (1), dann gilt:

$$\varphi(x, y) = \sum_k c_k \mathbf{1}_{Q_k}(x, y) = \sum_k c_k \mathbf{1}_{Q_k^p}(x) \cdot \mathbf{1}_{Q_k^{n-p}}(y)$$

Für jedes festes $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ erhalten wir eine Treppenfunktion

$$\varphi_y = \sum_k c_k \mathbf{1}_{Q_k^{n-p}}(y) \cdot \mathbf{1}_{Q_k^p}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$$

Nach Induktionsannahme hat jede Treppenfunktion φ_y ein wohldefiniertes Integral; dies ergibt eine Funktion auf $\mathbb{R}^{n-p}$

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x) dx = \sum_k c_k v_p(Q_k^p) \mathbf{1}_{Q_k^{n-p}}(y),$$

die eine Treppenfunktion ist und die darum, wiederum nach Induktionsannahme, das wohldefinierte Integral

$$\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x, y) dx \right) dy = \sum_k c_k v_p(Q_k^p) \cdot v_{n-p}(Q_k^{n-p}) = \sum_k c_k v_n(Q_k)$$

besitzt. Die linke Seite ist nach den Induktionsannahmen unabhängig von der Darstellung der Treppenfunktion φ . Wir setzen daher

$$\int \varphi(z) dz := \sum_k c_k v_n(Q_k).$$

Mit Hilfe dieser Formel beweist man auch induktiv die Rechenregeln. □

Aus dem Beweis folgt sofort:

Korollar 1.1.8 (Satz von Fubini für Treppenfunktionen).

Mit obigen Bezeichnungen gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \varphi(x, y) dy \right) dx.$$

Bemerkungen 1.1.9.

Wir betrachten ab jetzt – und nur im Rahmen der Integrationstheorie! – Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dabei gelten die folgenden Konventionen:

$$\infty \pm c = c \pm \infty := \infty \text{ für alle } c \in \mathbb{C}.$$

$$\infty \cdot c = c \cdot \infty := \infty \text{ für alle } c \in \mathbb{C}^* \cup \{\infty\},$$

$$\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty := 0.$$

Für *positiv reellwertige* Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ soll das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f$ ein Maß für das $n + 1$ -dimensionale Volumen unter dem Graphen von f liefern. Wir wollen jetzt zulassen, dass f unbeschränkt sein darf und dass f auf unendlich vielen Quadern nicht verschwindet. Eine Approximation an f erhält man, indem man den Definitionsbereich von f in abzählbar viele disjunkte Quader Q_k , $k = 1, \dots, \infty$ zerlegt, und positive reelle Zahlen Φ_k wählt, so dass $f(x)$ nah an Φ_k ist für alle $x \in Q_k$. Die Funktion

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \mathbf{1}_{Q_k}$$

approximiert die Funktion f .

Definition 1.1.10

1. Gegeben sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Eine Hüllreihe zu f ist eine Reihe

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{1}_{Q_k} \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

wobei

(a) Q_k offene Quader im $\mathbb{R}^n$ sind.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|f(x)| \leq \Phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{1}_{Q_k}(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Wir definieren den Inhalt der Hüllreihe Φ durch die Summe

$$I(\Phi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k v(Q_k) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

2. Unter der L^1 -Halbnorm von $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ versteht man das Infimum

$$\|f\|_1 := \inf\{I(\Phi) \mid \Phi \text{ Hüllreihe zu } f\}.$$

Bemerkungen 1.1.11.

1. Es existiert für jede Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Hüllreihe mit Inhalt ∞ , nämlich

$$\Phi := \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Q_k}$$

wobei Q_k der offene Quader mit Mittelpunkt 0 und Kantenlänge k ist.

2. Es liegt keine Norm vor: Es ist ∞ als Wert zugelassen, und aus $\|f\|_1 = 0$ folgt nicht $f = 0$. Ein Beispiel für letztere Aussage ist die charakteristische Funktion eines Quaders A , der in einer Hyperebene enthalten ist. Man findet offene Quader beliebig kleiner Dicke. Daher ist das Infimum Null, aber die charakteristische Funktion 1_A ist nicht null.

Satz 1.1.12.

Für Funktionen $f, f_k (k \geq 1): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $c \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\|c \cdot f\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1$,
2. $|f_1| \leq |f_2| \Rightarrow \|f_1\|_1 \leq \|f_2\|_1$,
3. die verallgemeinerte Dreiecksungleichung: sei (f_k) eine Familie von Funktionen. Dann gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1.$$

Beweis. Die ersten beiden Aussagen lassen sich durch Betrachtung von Mengen von Hüllreihen beweisen. Wir zeigen nur die verallgemeinerte Dreiecksungleichung, und zwar für nicht-negative Funktionen $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sei $\epsilon > 0$. Wähle für jede Funktion f_k eine Hüllreihe $\Phi_k := \sum_i c_{ik} 1_{Q_{ik}}$ mit Inhalt

$$I(\Phi_k) \leq \|f_k\|_1 + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Dann ist die Summe

$$\Phi := \sum_k \Phi_k = \sum_{i,k} c_{ik} 1_{Q_{ik}}$$

eine Hüllreihe für $\sum_k f_k$. Sie hat Inhalt

$$I(\Phi) = \sum_{ik} c_{ik} v(Q_{ik}) = \sum_k \sum_i c_{ik} v(Q_{ik}) \leq \sum_k \|f_k\|_1 + \epsilon.$$

□

1.2 Das Lebesgue-Integral und zwei „kleine“ Sätze

Lemma 1.2.1.

1. Für die charakteristische Funktion eines abgeschlossenen Quaders $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\|1_A\|_1 = v(A) = \int 1_A dx$.
2. Für jede Treppenfunktion φ auf $\mathbb{R}^n$ gilt $\|\varphi\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| dx$.

Beweis.

1. Indem man offene Quader Q mit $v(Q) = v(A) + \varepsilon$ betrachtet, stellt man fest, dass $\|1_A\|_1 \leq v(A)$ gilt.

Unter Ausnutzung der Kompaktheit von A zeigt man, dass für jede Hüllreihe $\Phi = \sum c_k 1_{Q_k}$ zu 1_A gilt, dass $I(\Phi) \geq v(A)$ (Übung). Damit gilt auch $\|1_A\|_1 \geq v(A)$.

2. Da die Treppenfunktionen $|\varphi|$ und φ die gleiche Menge von Hüllreihen und damit die gleiche Halbnorm $\|\cdot\|_1$ besitzen, nehmen wir $\varphi \geq 0$ an. Betrachte eine Darstellung

$$\varphi = \sum_{k=1}^s c_k 1_{Q_k} + \sum_{i=1}^r d_i 1_{R_i}$$

mittels disjunkter Quader, wobei die Quader Q_k offen sind und die Quader R_i das Volumen Null haben. Weil die Quader disjunkt sind, folgt aus $\varphi \geq 0$, dass $c_k \geq 0$ und $d_i \geq 0$ gilt.

Für $\epsilon > 0$ können wir für jeden Quader R_i einen offenen Quader $R_i^* \supset R_i$ mit $v(R_i^*) \leq \epsilon$ wählen. Dann ist

$$\Phi := \sum_{k=1}^s c_k 1_{Q_k} + \sum_{i=1}^r d_i 1_{R_i^*}$$

eine Hüllreihe zu φ . Es folgt

$$\|\varphi\|_1 \leq I(\Phi) = \sum_{k=1}^s c_k v(Q_k) + \epsilon \sum_{i=1}^r d_i$$

und daher

$$\|\varphi\|_1 \leq \sum_{k=1}^s c_k v(Q_k) = \int \varphi dx.$$

Um die umgekehrte Abschätzung zu erhalten, betrachte einen abgeschlossenen Quader A , so dass $\varphi(x) = 0$ für $x \notin A$. Sei ferner $M := \max \varphi$. Dann ist die Treppenfunktion $\psi := M1_A - \varphi$ nicht negativ. Für ein nicht-negatives ψ gilt, wie wir gerade gesehen haben,

$$\|\psi\|_1 \leq \int \psi dx.$$

Damit folgt

$$\int \varphi dx = \int (M1_A - \psi) dx \leq \|\varphi + \psi\|_1 - \|\psi\|_1 \leq \|\varphi\|_1.$$

Im ersten Schritt ging die Definition von ψ ein; im zweiten Schritt Teil 1 und die Abschätzung für $\int \psi$. Der dritte Schritt ist die Dreiecksungleichung 1.1.12.3 für die Halbnorm.

□

Lemma 1.2.2.

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Funktion, und φ_k eine Folge von Treppenfunktionen, so dass

$$\|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Dann konvergiert die Folge $\int \varphi_k$ komplexer Zahlen gegen eine komplexe Zahl. Der Grenzwert einer solchen Folge hängt nicht von der Wahl der Folge von Treppenfunktionen ab.

Beweis. Seien φ, ψ Treppenfunktionen. Dann gilt

$$\left| \int \varphi dx - \int \psi dx \right| \leq \int |\varphi - \psi| dx = \|\varphi - \psi\|_1 \leq \|\varphi - f\|_1 + \|\psi - f\|_1.$$

Hier haben wir erst Satz 1.1.7.2, dann Lemma 1.2.1.2 für Treppenfunktionen und schließlich die Dreiecksungleichung für die Halbnorm $\|\cdot\|_1$ benutzt. Daher ist die Folge $\int \varphi_k$ eine Cauchy-Folge komplexer Zahlen und konvergiert im vollständigen Körper $\mathbb{C}$. Aus der gleichen Ungleichung folgt auch die Unabhängigkeit von der Wahl der Folge von Treppenfunktionen. □

Definition 1.2.3

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt Lebesgue-integrierbar (kurz: integrierbar) über $\mathbb{R}^n$, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen φ_k gibt mit

$$\|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\int f dx := \int f(x) d^n x := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) dx \in \mathbb{C}$$

Wegen Lemma 1.2.2 ist dies wohldefiniert und das Integral eine (endliche) komplexe Zahl.

Bemerkungen 1.2.4.

1. Jede Treppenfunktion φ ist Lebesgue-integrierbar: wähle zur Approximation die konstante Folge mit Gliedern φ .
2. Wir sagen auch kurz, dass dann $\varphi_k \rightarrow f$ bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_1$. Daraus folgt nicht notwendigerweise eine punktweise Konvergenz, aber wir werden sehen, dass *fast überall* punktweise Konvergenz gilt.

Wesentliches Hilfsmittel zur Definition der Integrierbarkeit war die Halbnorm $\|f\|_1$. Es ist nun nicht schwer, diese mit dem Lebesgue-Integral $\int |f| dx$ in Verbindung zu bringen:

Satz 1.2.5.

Ist die Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ über den $\mathbb{R}^n$ integrierbar, so ist auch die Funktion $|f|$ über den $\mathbb{R}^n$ integrierbar und es gilt

$$\left| \int f dx \right| \leq \int |f| dx \quad \text{und} \quad \|f\|_1 = \int |f| dx.$$

Für Treppenfunktionen hatten wir die erste Aussage in 1.1.7.2 und die zweite in 1.2.1.2 gesehen.

Beweis.

1. Da f integrierbar sein soll, finde eine Folge (φ_k) von Treppenfunktionen mit $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$. Wegen der Dreiecksungleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|f(x) - \varphi_k(x)\| \leq |f(x) - \varphi_k(x)|$$

und somit wegen der Monotonie 1.1.12.2 der L^1 -Halbnorm

$$\| |f| - |\varphi_k| \|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1.$$

Die rechte Seite und somit auch die linke Seite gehen für $k \rightarrow \infty$ gegen 0. Da auch $|\varphi_k|$ eine Folge von Treppenfunktionen ist, ist $|f|$ integrierbar und die Treppenfunktionen $|\varphi_k|$ approximieren $|f|$ bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_1$. Es folgt

$$|\int f dx| = |\lim_k \int \varphi_k dx| \leq \lim_k \int |\varphi_k| dx = \int |f| dx.$$

Die erste Gleichheit folgt aus der Definition des Integrals $\int f dx$, die Ungleichung ist 1.1.7.2 für Treppenfunktionen. Die letzte Gleichheit folgt, weil $|\varphi_k|$ die Funktion $|f|$ bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_1$ approximiert.

2. Für die zweite Aussage betrachten wir die Ungleichungen, die aus der Dreiecksungleichung 1.1.12.3 für die $\|\cdot\|_1$ -Norm folgen:

$$(*) \quad \|\varphi_k\|_1 - \|f - \varphi_k\|_1 \leq \|f\|_1 \leq \|\varphi_k\|_1 + \|f - \varphi_k\|_1$$

Nun gilt

$$\|\varphi_k\|_1 \stackrel{1.2.1.2}{\rightarrow} \int |\varphi_k| dx \rightarrow \int |f| dx$$

da die Folge von Treppenfunktionen $|\varphi_k|$ die Funktion $|f|$ L^1 -approximiert. Damit folgt aus der Ungleichung $(*)$

$$\int |f| dx \leq \|f\|_1 \leq \int |f| dx.$$

□

Korollar 1.2.6.

Es gelten die folgenden Rechenregeln: Sind f, g integrierbar, so gilt

1. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $\alpha f + \beta g$ integrierbar und es gilt

$$\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx.$$

2. Die Funktion $\bar{f}$ ist integrierbar und es gilt

$$\int \bar{f} dx = \overline{\int f dx}.$$

3. Für reellwertige und integrierbare Funktionen f, g folgt aus $f \leq g$, dass $\int f dx \leq \int g dx$ (Monotonie des Lebesgue-Integrals).
4. Ist überdies die Funktion g aus 3. beschränkt, so ist auch die Funktion $f \cdot g$ integrierbar.

Beweis. Übung.

[

Zu 1. und 2.: Sind (φ_k) und (ψ_k) L^1 -approximierende Folgen von Treppenfunktionen für f bzw. g , so ist $(\alpha\varphi_k + \beta\psi_k)$ eine L^1 -approximierende Folge für $\alpha f + \beta g$ und $(\overline{\varphi}_k)$ eine L^1 -approximierende Folge für $\overline{f}$.

Zu 3.: Nach Satz 1.2.5 ist wegen $g - f \geq 0$

$$\int (g - f) dx = \int |g - f| dx = \|g - f\|_1 \geq 0.$$

Zu 4.: Sei M eine positive obere Schranke für $|g|$. Da f integrierbar ist, finde zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine beschränkte Treppenfunktion φ mit

$$\|f - \varphi\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2M}$$

und eine Treppenfunktion ψ mit

$$\|g - \psi\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2\mu},$$

wobei μ eine positive obere Schranke der Treppenfunktion φ sei. Aus der für alle $x \in \mathbb{R}^n$ geltenden Abschätzung

$$|fg(x) - \varphi\psi(x)| \leq |(f - \varphi)(x)| \cdot |g(x)| + |\varphi(x)| \cdot |(g - \psi)(x)|$$

folgt dann wegen der Monotonie 1.1.12.2 der Halbnorm

$$\|fg - \varphi\psi\|_1 \leq M \cdot \|f - \varphi\|_1 + \mu \|g - \psi\|_1 \leq M \frac{\epsilon}{2M} + \mu \frac{\epsilon}{2\mu} \leq \epsilon.$$

]

□

Korollar 1.2.7.

1. Eine komplexwertige Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist genau dann integrierbar, wenn ihr Real- und Imaginärteil integrierbar sind. In diesem Falle gilt

$$\int f dx = \int \operatorname{Re} f dx + i \int \operatorname{Im} f dx.$$

2. Seien die Funktionen $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ integrierbar. Dann sind auch die Funktionen $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ integrierbar. Insbesondere ist der *positive Anteil* $f^+ := \max(f, 0)$ und der *negative Anteil* $f^- := -\min(f, 0)$ integrierbar.

Beweis. Der erste Teil folgt, weil Real- und Imaginärteil reelle Linearkombinationen von f und $\bar{f}$ sind. Wir zeigen nur den zweiten Teil der Aussage. Es gilt

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ und } \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

Nach Voraussetzung sind f und g , nach Korollar 1.2.6 ihre Differenz und nach Satz 1.2.5 deren Absolutbetrag integrierbar. $\square$

Wir wollen nicht nur Funktionen integrieren, die auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Wenn eine Funktion nur auf einer Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ definiert ist, kann man sie durch den Wert 0 auf das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus A$ fortsetzen. Auf die so erhaltene Funktion f_A kann man die vorherige Definition von Lebesgue-Integrierbarkeit und Lebesgue-Integral anwenden. Die folgende Definition formuliert diese Idee genauer.

Definition 1.2.8

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und f eine Funktion mit Werten in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, deren Definitionsbereich A umfasst.

1. Die (über A hinaus) triviale Fortsetzung von f ist die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} f_A: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases} \end{aligned}$$

(Unter einer Fortsetzung von f versteht man in der Regel eine Funktion, die auf dem Definitionsbereich $D(f)$ von f mit f übereinstimmt. Die triviale Fortsetzung f_A ist also eigentlich nur eine Fortsetzung der Einschränkung von f auf A .)

2. Eine solche Funktion f heißt über die Teilmenge A integrierbar, genau dann, wenn die triviale Fortsetzung f_A über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\int_A f dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A dx$$

das Lebesgue-Integral von f über A . Wir setzen

$$\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1 \stackrel{1.2.5}{=} \int_A |f| dx.$$

3. Die Menge der über $A \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbaren komplexwertigen Funktionen bildet einen komplexen Vektorraum $\mathcal{L}^1(A)$ mit Halbnorm $\|\cdot\|_{1,A}$.

Man beachte, dass die Notation f_A zu der bereits eingeführten Bezeichnung der Funktion 1_A passt. Wir vergleichen mit dem bekannten Begriff der Riemann-integrierbaren Funktion auf kompakten Intervallen. Im allgemeinen Fall, insbesondere bei uneigentlichen Integralen, ist die Lage subtiler.

Satz 1.2.9.

Es sei $A = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein *kompaktes* Intervall und f eine über A Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f über A Lebesgue-integrierbar und das Lebesgue-Integral und das Riemann-Integral sind gleich.

Beweis. Übung. □

Der folgende Satz verschafft uns eine große Klasse integrierbarer Funktionen:

Satz 1.2.10 (Kleiner Satz von Beppo Levi).

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und sei (φ_k) eine monoton wachsende (oder fallende) Folge von Treppenfunktionen, so dass

- (i) (φ_k) punktweise gegen f konvergiert,
- (ii) die Folge $(\int \varphi_k dx)$ der Integrale der Treppenfunktionen beschränkt ist.

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx$$

Beweis. Wir betrachten eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen. Dann gilt in jedem Punkt

$$f - \varphi_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{N+1} - \varphi_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^N (\varphi_{i+1} - \varphi_i) = \sum_{i=k}^{\infty} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \geq 0$$

Daraus folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung 1.1.12.3

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_k\|_1 &\leq \sum_{i=k}^{\infty} \|\varphi_{i+1} - \varphi_i\|_1 \stackrel{\text{Lemma 1.2.1.2}}{=} \sum_{i=k}^{\infty} \int |\varphi_{i+1} - \varphi_i| dx \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} \left(\int \varphi_{i+1} dx - \int \varphi_i dx \right) = \mathcal{I} - \int \varphi_k dx, \end{aligned}$$

denn es existiert $\mathcal{I} := \lim_{N \rightarrow \infty} \int \varphi_{N+1} dx$, da die Folge der Integrale monoton ist und beschränkt sein soll. Aus

$$\|f - \varphi_k\|_1 \leq \mathcal{I} - \int \varphi_k dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

folgt, dass f integrierbar ist. Nach Definition 1.2.3 des Integrals ist $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx$.

□

Wir behandeln nun die Integrierbarkeit *stetiger* Funktionen auf offenen oder kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Damit stellen wir eine Verbindung zwischen dem Lebesgue-Integral und der Topologie des $\mathbb{R}^n$ her.

Lemma 1.2.11.

Sei K eine kompakte Teilmenge und U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $K \subseteq U$. Sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige nicht-negative Funktion. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es dann Treppenfunktionen $\psi, \psi' \geq 0$ mit

1. $f(x) \leq \psi(x) \leq f(x) + \epsilon$ für alle $x \in K$.
2. $f(x) - \epsilon \leq \psi'(x) \leq f(x)$ für alle $x \in K$.
3. $\psi(x) = \psi'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$.

Beweis. Auf dem Kompaktum K ist f gleichmäßig stetig. Finde daher ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$ für alle $x, x' \in K$ mit $\|x - x'\|_{\max} \leq \delta$. Überdecke K durch endlich viele abgeschlossene Würfel $W_1, \dots, W_s$ der Kantenlänge kleiner als δ , die alle in U liegen. Sei M_i das Maximum und m_i das Minimum der stetigen Funktion f auf dem abgeschlossenen Würfel W_i . Dann setze

$$\psi := \max(M_1 \cdot 1_{W_1}, \dots, M_s \cdot 1_{W_s}) \text{ und } \psi' := \min(m_1 \cdot 1_{W_1}, \dots, m_s \cdot 1_{W_s})$$

□

Lemma 1.2.12.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige nicht-negative Funktion. Dann gilt

1. Ist A offen, dann existiert eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k \geq 0$, die gegen f punktweise auf A konvergiert, $\varphi_k \nearrow f$.
2. Ist A kompakt, dann existiert eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k \geq 0$ mit $\varphi_k \searrow f$ punktweise auf A .

Beweis.

1. Sei A offen. Wir wählen kompakte Mengen A_k mit $\cup_{k=1}^{\infty} A_k = A$. Finde nach Lemma 1.2.11 Treppenfunktionen ψ_ℓ für A_ℓ , die außerhalb A verschwinden und für die gilt

$$f(x) - \frac{1}{2^\ell} \leq \psi_\ell(x) \leq f(x)$$

und $\psi_\ell(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Dann leistet die Folge (φ_k) mit $\varphi_k := \max(\psi_1, \dots, \psi_k)$ das Gewünschte.

2. Sei A kompakt. Finde offene Mengen U_k mit $\cap_{k=1}^{\infty} U_k = A$ und mit dem gleichen Hilfssatz 1.2.11 Treppenfunktionen ψ_ℓ mit

$$f(x) \leq \psi_\ell(x) \leq f(x) + 2^{-\ell} \text{ für } x \in A \text{ und } \psi_\ell(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \setminus U_\ell.$$

Dann leistet die Folge (φ_k) mit $\varphi_k := \min(\psi_1, \dots, \psi_k)$ das Gewünschte.

□

Satz 1.2.13.

1. Jede beschränkte stetige Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer beschränkten offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist über diese integrierbar.
2. Jede stetige Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist über diese integrierbar.

Beweis. Wir beschränken uns auf reellwertige nicht-negative Funktionen, $f \geq 0$. Für komplexwertige Funktionen betrachte die Zerlegung in Real- und Imaginärteil und zerlege diese in ihren positiven und negativen Anteil.

1. Sei U beschränkt und offen. Nach Lemma 1.2.12 ist f die Grenzfunktion einer monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k \geq 0$. Um die Beschränktheit der Folge $\int \varphi_k$ der Integrale zu sehen, wähle eine obere Schranke M für die beschränkte Funktion f und einen Quader Q mit $U \subseteq Q$. Für die Treppenfunktionen gilt also

$$\varphi_k(x) \leq f(x) \leq M \text{ für alle } x \in U \text{ und für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Daher ist

$$\int \varphi_k dx \leq M \cdot v(Q).$$

Also folgt aus dem kleinen Satz 1.2.10 von Beppo Levi, dass f integrierbar ist.

2. Die zweite Aussage für kompaktes A wird analog mit einer Folge monoton fallender nicht-negativer Treppenfunktionen aus Lemma 1.2.12 bewiesen.

□

Um mehrdimensionale Integrale konkret auszurechnen hilft es oft, wenn man diese iterativ auf Integrale über Bereiche niedrigerer Dimension zurückführen kann. Dafür stellen wir nun die nötigen Techniken bereit.

Sei $X = \mathbb{R}^p$ und $Y = \mathbb{R}^q$. Wir wollen über eine Teilmenge $A \subseteq X \times Y \cong \mathbb{R}^{p+q}$ eine stetige beschränkte Funktion f integrieren. Wir bezeichnen für festes $y \in Y$ die „Schnittmenge“ von A zu $y \in Y$ mit $A_y := \{x \in X \mid (x, y) \in A\} \subseteq X$. Ein Reduktionsverfahren zur Berechnung des Integrals von f in dieser Situation liefert der folgende wichtige Satz.

Satz 1.2.14 (Kleiner Satz von Fubini).

Es sei $A \subseteq X \times Y$ entweder kompakt oder offen und beschränkt. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte stetige Funktion. Dann gilt:

1. Für alle $y \in Y$ mit $A_y \neq \emptyset$ ist die Funktion $f_y: x \mapsto f(x, y)$ über A_y integrierbar.
2. Betrachte daher die Funktion $F: Y \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(y) := \begin{cases} \int_{A_y} f_y(x) dx & \text{für } A_y \neq \emptyset, \\ 0 & \text{für } A_y = \emptyset. \end{cases}$$

Sie ist über Y integrierbar und es gilt

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_Y F(y) dy =: \int_Y \left(\int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy.$$

Es gilt ebenso

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx \text{ mit } A_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}.$$

Beweis. Wieder reicht es, die Aussage für den Fall einer nicht-negativen Funktion, $f \geq 0$, zu zeigen. Wir bringen auch nur den Beweis für offenes und beschränktes A ; der Fall A kompakt wird analog behandelt.

Sei (φ_k) eine gegen f_A konvergente, monoton wachsende Folge von Treppenfunktion auf $X \times Y$, deren Existenz wegen der Stetigkeit von f durch Lemma 1.2.12.1 garantiert ist. Für jedes feste $y \in Y$ bilden die Funktionen

$$x \mapsto \varphi_k(x, y)$$

eine gegen die Funktion

$$x \mapsto f_A(x, y)$$

punktweise konvergente, monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen auf X . Man zeigt wie im Beweis von Satz 1.2.13, dass die Folge der Integrale $\int_X \varphi_k(x, y) dx$ beschränkt ist. Nach dem kleinen Satz von Beppo Levi 1.2.10 gilt

$$F(y) = \lim_k \int_X \varphi_k(x, y) dx.$$

Die Funktionen

$$y \mapsto \Phi_k(y) := \int_X \varphi_k(x, y) dx$$

sind Treppenfunktionen auf Y und die Folge (Φ_k) konvergiert monoton wachsend gegen F . Mit dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen 1.1.8 erhält man wegen $\varphi_k \leq f_A$

$$\int_Y \Phi_k(y) dy \stackrel{1.1.8}{=} \int_{X \times Y} \varphi_k(x, y) d(x, y) \leq \int_{X \times Y} f_A(x, y) d(x, y);$$

also ist die Folge der Integrale $\int_Y \Phi_k(y) dy$ beschränkt. Wiederum nach dem kleinen Satz von Beppo Levi 1.2.10 ist F integrierbar. Es gilt

$$\int_Y F(y) dy = \lim_k \int_Y \Phi_k(y) dy = \lim_k \int_{X \times Y} \varphi_k(x, y) d(x, y) = \int_{X \times Y} f_A(x, y) d(x, y).$$

□

Beispiel 1.2.15.

1. Sei f wie oben, und sei jetzt $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $y \in Y$ die Menge A_y entweder leer oder ein Intervall ist, $A_y = [x_1(y), x_2(y)]$. Dann gilt

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_B \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \text{ mit } B := \{y \in Y \mid A_y \neq \emptyset\}.$$

Speziell für den Fall eines Rechtecks im $\mathbb{R}^2$ mit $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ finden wir:

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

2. Betrachte eine kompakte Kreisscheibe, $K = \overline{B_r}(0)$. Die Schnitte A_y sind die Intervalle $[-x(y), x(y)]$ mit $x(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$. Damit folgt:

$$v_2(K) := \int_K 1 d(x, y) = \int_{-r}^r \left(\int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} 1 dx \right) dy = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy \stackrel{\text{ÜA}}{=} \pi r^2.$$

1.3 Volumina und Nullmengen

Wir folgen [K2, §7.5-6]. Das Lebesgue-Integral liefert einen allgemeinen translationsinvarianten und normierten Volumenbegriff, das Lebesgue-Maß. Da Maße eine große Rolle spielen, wollen wir uns zunächst etwas allgemeiner mit ihnen beschäftigen.

Definition 1.3.1

Eine Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Grundmenge Ω heißt σ -Algebra, wenn gilt

1. Die Grundmenge Ω ist im Mengensystem $\mathcal{A}$ enthalten, $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Mit jeder Menge $A \in \mathcal{A}$ ist auch ihr Komplement $\Omega \setminus A$ im Mengensystem $\mathcal{A}$, i.e. $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
3. Abzählbare Vereinigungen von Mengen $A_i \in \mathcal{A}$ sind wieder in $\mathcal{A}$: es gilt $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Bemerkungen 1.3.2.

1. Aus den Bedingungen 1. und 2. folgt, dass eine σ -Algebra $\mathcal{A}$ immer das Komplement von Ω , also die leere Menge $\emptyset$ enthält.
2. Aufgrund der Eigenschaft 2. kann man in Eigenschaft 1. alternativ zu $\Omega \in \mathcal{A}$ auch $\emptyset \in \mathcal{A}$ fordern.
3. Wählt man in Bedingung 3 die Mengen $A_m = \emptyset$ für alle $m > n$, so folgt, dass die *endliche* Vereinigungsmenge $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist.
4. Nach den de Morgan'schen Gesetzen folgt, dass $\mathcal{A}$ auch abgeschlossen unter abzählbaren, also insbesondere auch endlichen, Durchschnitten ist.

Beispiel 1.3.3.

1. Für jede beliebige Menge Ω ist $\{\emptyset, \Omega\}$ die kleinste und die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ die größte mögliche σ -Algebra mit Ω als Grundmenge.
2. Es seien Ω und Ω' zwei beliebige Mengen, $\mathcal{A}'$ eine σ -Algebra in Ω' und $T: \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung. Dann ist $T^{-1}(\mathcal{A}') := \{T^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}$ eine σ -Algebra in Ω .

Definition 1.3.4

1. Es sei $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra über einer nicht-leeren Grundmenge Ω . Eine Funktion $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt ein Maß auf $\mathcal{A}$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) σ -Additivität: Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Für $A \in \mathcal{A}$ heißt die reelle Zahl $\mu(A)$ das Maß der Menge A .

2. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wird Maßraum genannt. Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ bestehend aus der Grundmenge und der darauf definierten σ -Algebra heißt messbarer Raum. Die Teilmengen $A \in \mathcal{A}$ heißen messbar.
3. Das Maß μ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß (oder normiertes Maß), wenn zusätzlich $\mu(\Omega) = 1$ gilt. Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ heißt Wahrscheinlichkeitsraum. Die Grundmenge Ω heißt Ergebnisraum und enthält als Elemente die möglichen Ergebnisse, die ein Wahrscheinlichkeitsexperiment liefern kann. Die σ -Algebra $\mathcal{A}$ enthält die Ereignisse, denen eine Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 zugeordnet werden kann. In dieser Anwendung nennt man auch $\Omega \in \mathcal{A}$ das sichere Ereignis und $\emptyset \in \mathcal{A}$ das unmögliche Ereignis.

Beispiel 1.3.5.

1. N -facher Münzwurf. Setze $M := \{0, 1\}$. Der Ergebnisraum ist das N -fache kartesische Produkt $\Omega := M^{\times N}$; der Ereignisraum ist die σ -Algebra, die durch die Potenzmenge gegeben ist. Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist $\mu(A) = |A|/2^N$.
2. Eine wichtige Verallgemeinerung auf Wahrscheinlichkeitsräume mit endlichem Ergebnisraum Ω sind *Gleichverteilungen*. Hier ist die σ -Algebra der Ereignisse $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß ist $\mu(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ für $A \subseteq \Omega$.

Definition 1.3.6

Sei Ω ein metrischer Raum oder allgemeiner ein topologischer Raum (die offenen Mengen sind festgelegt, vgl. MfP2: offene und abgeschlossene Mengen). Dann ist die Borel-Algebra definiert als die kleinste σ -Algebra, die die offenen Teilmengen von Ω enthält. (Sie enthält dann auch als Komplemente alle abgeschlossenen Teilmengen.)

Für den späteren Gebrauch definieren wir noch:

Definition 1.3.7

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt σ -kompakt, wenn sie eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen ist.

Bemerkungen 1.3.8.

Beispiele σ -kompakter Mengen sind alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Es sind Durchschnitte endlich vieler und Vereinigungen abzählbar vieler σ -kompakter

Mengen wieder σ -kompakt. Speziell ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ eine σ -kompakte Menge, jedoch ist $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht σ -kompakt (das wollen wir im Rahmen der Vorlesung nicht zeigen).

Die Borel-Algebra von $\mathbb{R}$ enthält unter anderem alle Intervalle und auch die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Wir möchten (mindestens) für die Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ein Maß definieren. Wir sprechen in der nächsten Definition vom Lebesgue-Maß, können die für ein Maß geforderten Eigenschaften, z.B. die σ -Additivität, im Moment aber noch nicht zeigen.

Definition 1.3.9

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue-)messbar (im Sinne von: messbar mit endlichem Maß), falls die konstante Funktion 1 über A integrierbar ist. In dem Fall ist das Lebesgue-Maß von A , auch das n -dimensionale Volumen von A genannt (im Fall $n = 2$ spricht man auch vom Flächeninhalt von A), gegeben durch

$$v(A) := v_n(A) := \int_A 1 \, dx.$$

Man setzt $v(\emptyset) = 0$.

Beispiel 1.3.10.

1. Nach Satz 1.2.13 sind offene beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messbar.
2. Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Dann ist die Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq g(x)\}$$

der Punkte unter dem Graphen von g kompakt und somit nach Satz 1.2.14 messbar. Nach Beispiel 1.2.15 gilt

$$v_2(A) = \int_{[a,b]} \left(\int_0^{g(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

3. Vereinigungen $A = Q_1 \cup \dots \cup Q_s$ endlich vieler Quader $Q_i \subseteq \mathbb{R}^n$ sind messbar. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Quader disjunkt sind. Wir nennen eine solche Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ab jetzt eine *Figur*.

Lemma 1.3.11.

1. Eine *Ausschöpfung* einer Menge A ist eine aufsteigende Folge $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ von Teilmengen $A_k \subseteq A$ mit $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ hat eine *Ausschöpfung* (A_k) durch Figuren.

Die offene Teilmenge U ist genau dann messbar, wenn die Folge $v(A_k)$ der Volumina der Figuren beschränkt ist. In dem Fall gilt

$$v(U) = \lim_{k \rightarrow \infty} v(A_k) = \sup v(A_k).$$

2. Analog gilt: für jedes Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert eine absteigende Folge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ von Figuren, so dass $K = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Mit jeder solchen Folge gilt

$$v(K) = \lim_{k \rightarrow \infty} v(A_k) = \inf v(A_k).$$

Beweis.

1. Betrachte die in U enthaltenen Quader mit rationalen Mittelpunktskoordinaten und rationalen Kantenlängen. Dies ist eine abzählbare Menge; wähle eine Abzählung $Q_1, Q_2, \dots$. Offenbar ist ihre Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_k = U$. Dann bilden die Figuren $A_k := Q_1 \cup \dots \cup Q_k$ eine Ausschöpfung von U . Die Folge der charakteristischen Funktion 1_{A_i} ist dann monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen die charakteristische Funktion 1_U .

Wir nehmen erst an, die offene Menge U sei messbar. Dann folgt aus $1_{A_k} \leq 1_U$, dass

$$v(A_k) \stackrel{1.2.1}{=} \int 1_{A_k} \leq \int 1_U \stackrel{\text{def}}{=} v(U) < \infty.$$

Also ist die Folge $(v(A_k))$ beschränkt und konvergiert als monoton wachsende Folge.

Ist umgekehrt die Folge $(v(A_k))$ beschränkt, so ist die Folge der Integrale $(\int 1_{A_k} dx)$ von Treppenfunktionen beschränkt. Nach dem kleinen Satz 1.2.10 von Beppo Levi folgt

$$v(U) \stackrel{\text{def}}{=} \int 1_U dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int 1_{A_k} dx}_{v(A_k)}.$$

2. Man wähle einen offenen Würfel $W \supseteq K$ und eine Folge (B_k) von Figuren, die die offene Menge $W \setminus K$ ausschöpft. Die Komplemente $A_k := W \setminus B_k$ sind Figuren mit der gewünschten Eigenschaft.

□

Beispiel 1.3.12. Wir definieren iterativ die *Cantormenge* wie folgt als Durchschnitt $A = \bigcap A_k$:

Aus dem Einheitsintervall $A_0 := [0, 1]$ entfernt man das mittlere Drittel, um zwei abgeschlossene Intervalle der Länge $1/3$ zu erhalten. Aus jedem dieser Intervalle entfernt man jeweils wieder das mittlere Drittel und erhält so 4 Intervalle der Länge $1/9$. So fährt man fort, und für A_n erhält man 4^n Intervalle der Länge $1/3^n$. Es ist A abgeschlossen und beschränkt, also kompakt und somit nach Beispiel 1.3.10.1 messbar. Man erhält

$$v_1(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(A_n) = 0.$$

Bemerkungen 1.3.13.

1. Für jedes Maß gilt: Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so folgt aus der disjunkten Zerlegung $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ wegen der σ -Additivität, dass $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
2. Im Falle des Lebesgue-Maßes ergibt sich dies auch, indem man die Beziehung $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$ integriert. (Für den Durchschnitt gilt $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$.)
3. Jedes Maß ist monoton: Aus $A \subseteq B$ folgt wegen der disjunkten Zerlegung $B = A \cup (B \setminus A)$, dass

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

4. Für das Lebesgue-Maß folgt dies auch aus der Ungleichung $1_A \leq 1_B$ für $A \subseteq B$ wegen der Monotonie des Integrals.
5. Allgemeiner gilt: Ist f integrierbar über A und B eine messbare Menge, so ist f auch über $A \cap B$ integrierbar. Es gilt

$$\left| \int_{A \cap B} f \right| \leq \int_A |f|.$$

Denn f_A und 1_B sind integrierbar und 1_B ist beschränkt, so dass nach Korollar 1.2.6.4 auch die Funktion $f_{A \cap B} = f_A \cdot 1_B$ integrierbar ist.

Bemerkungen 1.3.14 (Berechnung von Volumina).

1. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Bezeichne wieder für $y \in \mathbb{R}^q$ die Schnittmenge mit A_y . Dann liefert der kleine Satz von Fubini 1.2.14 für die charakteristische Funktion 1_A

$$v_{p+q}(A) = \int_{\mathbb{R}^q} v_p(A_y) dy$$

2. Daraus folgt das *Cavalierische Prinzip*: Zwei messbare Mengen A, B haben das gleiche Volumen, wenn ihre Schnittmengen A_y und B_y für alle $y \in \mathbb{R}^q$ das gleiche Volumen haben, $v_p(A_y) = v_p(B_y)$.

Beispiel 1.3.15.

1. Zylinder

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte oder beschränkte offene Menge. Dann heißt die Menge

$$A = B \times [0, h] \subseteq \mathbb{R}^n$$

der *Zylinder* mit Basis B und Höhe h . Alle Schnittmengen haben $v_{n-1}(A_y) = v_{n-1}(B)$, daher ist

$$v_n(A) = \int_0^h v_{n-1}(B) dy = h \cdot v_{n-1}(B).$$

2. Volumen allgemeiner Kegel:

Sei wieder $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte oder beschränkte offene Menge. Dann heißt

$$K(B, h) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n | y \in [0, h], x \in \left(1 - \frac{y}{h}\right) B\}$$

der *Kegel* mit Basis B und Höhe h . Für $y \in [0, h]$ ist die Schnittmenge

$$A_y = \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot B = \left\{\left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot b \mid b \in B\right\},$$

ÜA: Es gilt nun allgemein für beliebige Skalierungsfaktoren $s_1, \dots, s_n \in (0, \infty)$ und eine beliebige integrierbare Funktion f

$$\int f(s_1 x_1, \dots, s_n x_n) dx = s_1^{-1} \cdots s_n^{-1} \int f(x) dx.$$

Daher hat A_y das $(n-1)$ -dimensionale Volumen $\left(1 - \frac{y}{h}\right)^{n-1} v_{n-1}(B)$ und wir finden

$$v_n(K) = \int_0^h v_{n-1}(B) \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{n-1} dy = \frac{h}{n} v_{n-1}(B).$$

3. Ein wichtiger Spezialfall ist der *Standardsimplex*:

$$\Delta^n := \{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x_i, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}.$$

Wir finden $v_n(\Delta^1) = v([0, 1]) = 1$ und induktiv mit der Formel aus Beispiel 2.

$$v_n(\Delta^n) = \frac{1}{n} v(\Delta^{n-1}) = \frac{1}{n!}.$$

4. Volumen einer (Halb-)Kugel nach Archimedes

Wir benutzen das Cavalierische Prinzip: Eine Halbkugel vom Radius r hat das gleiche Volumen wie ein Kreiszylinder vom Radius r und Höhe r mit ausgeschnittenem (auf die Spitze gestellten) Kegel, denn die Schnittmengen A_y und B_y sind Kreise bzw. Kreiseiben mit Flächeninhalt $\pi(r^2 - y^2)$. Damit ist das Volumen der Halbkugel

$$v = v(\text{Kreiszylinder}) - v(\text{Kegel}) = r^3 \pi - \frac{r}{3} r^2 \pi = \frac{2}{3} \pi r^3.$$

Definition 1.3.16

Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue)Nullmenge, wenn sie eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. N ist messbar mit $v_n(N) = 0$.
2. Für die charakteristische Funktion gilt $\|1_N\|_1 = 0$.

Beweis. Zum Beweis der Äquivalenz bemerken wir: Es folgt 2. aus 1. da

$$\|1_N\|_1 \stackrel{\text{messbar}}{=} \int 1_N dx \stackrel{\text{def}}{=} v_n(N) = 0.$$

Für die umgekehrte Richtung betrachte die konstante Folge von Treppenfunktionen mit der konstanten Funktion Null, $\varphi_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sie approximiert die charakteristische Funktion 1_N bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_1$, denn es gilt

$$\|1_N - \varphi_k\|_1 = \|1_N\|_1 = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also ist die charakteristische Funktion 1_N integrierbar und somit die Menge N messbar. Es gilt

$$v(N) \stackrel{1.3.9}{=} \int 1_N dx \stackrel{1.2.3}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dx = 0,$$

wobei wir erst die Definition des Volumens und dann die Definition des Integrals verwendet haben. $\square$

Bemerkungen 1.3.17.

1. Jede Teilmenge $A \subseteq N$ einer Nullmenge N ist eine Nullmenge, denn aus $0 \leq 1_A \leq 1_N$ folgt wegen der Monotonie 1.1.12.2 der Halbnorm $\|1_A\|_1 \leq \|1_N\|_1 = 0$.
2. Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist eine Nullmenge. Denn aus $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ mit Nullmengen N_k folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung 1.1.12.3

$$\|1_N\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1_{N_k}\|_1 = 0.$$

Insbesondere ist jede abzählbare Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ mit ausgearteten Quadern Q_k eine Nullmenge. Jede abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist daher eine Nullmenge. Insbesondere ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullmenge. Das Beispiel der Cantormenge mit Lebesgue-Maß Null zeigt, dass es aber auch Nullmengen mit der gleichen Mächtigkeit wie der der reellen Zahlen gibt.

3. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine abgeschlossene oder offene Menge und $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Graph Γ von g eine Nullmenge.

Denn: Eine abgeschlossene Menge A können wir als abzählbare Vereinigung der Schnitte $A \cap \overline{B_n(0)}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit abgeschlossenen Kugeln schreiben. Im Fall einer offenen Menge betrachten wir abgeschlossene Kugeln um Punkte in U mit rationalen Koordinaten.

Es genügt also, den Fall zu behandeln, dass A kompakt ist. Dann ist der Graph als Bild der stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ a &\mapsto (a, g(a)) \end{aligned}$$

kompakt. Es folgt nach dem kleinen Satz von Fubini 1.2.14

$$v(\Gamma) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\Gamma} dy \right) d^{n-1}x = \int_A \underbrace{\left(\int_{g(x)}^{g(x)} 1 dy \right)}_{=0} d^{n-1}x = 0$$

4. Damit ist auch jede Hyperebene als Graph einer affinen Funktion eine Nullmenge. Jeder kompakte Teil einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $k < n$ ist eine Nullmenge, da jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die sich als Graph einer Funktion schreiben lässt.

Definition 1.3.18 [“fast überall”, “fast alle”]

Sei E eine Eigenschaft, so dass für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ erklärt ist, ob x diese Eigenschaft hat oder nicht. Wir sagen, dass E fast überall gilt oder dass fast alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft haben, wenn die Menge aller Punkte, für die E nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Bemerkungen 1.3.19 (Beispiele für solche Eigenschaften).

1. Gegeben eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ist E in x die Eigenschaft, dass f in x einen endlichen Wert annimmt.
2. Gegeben zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, so ist die Eigenschaft E in x , dass $f(x) = g(x)$ gilt.

Satz 1.3.20.

Jede Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $\|f\|_1 < \infty$ ist fast überall endlich.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $N := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = \infty\}$ eine Nullmenge ist. Dafür

beachte, dass für jedes $\epsilon > 0$ gilt $\mathbf{1}_N(x) \leq \epsilon |f(x)|$. Denn ist $x \in N$, so ist $1 \leq \epsilon |f(x)| = \infty$; ist $x \notin N$, so ist $0 \leq \epsilon |f(x)|$. Damit ist aber wegen der Monotonie der Halbnorm $\|\cdot\|_1$

$$v(N) = \|\mathbf{1}_N\|_1 \leq \epsilon \|f\|_1 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0,$$

weil $\|f\|_1$ nach Voraussetzung endlich ist. □

Satz 1.3.21 (Modifikationssatz).

Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zwei Funktionen, die fast überall gleich sind. Dann ist mit f auch g integrierbar und es gilt $\int f = \int g$.

Beweis. Betrachte $N := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq g(x)\}$ und $h_N = \infty \cdot \mathbf{1}_N$. Setzen wir $f_k := \mathbf{1}_N$ für alle k , so ist $h_N = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Da N eine Nullmenge ist, gilt $\|\mathbf{1}_N\|_1 = 0$ und auch $\|h_N\|_1 = 0$.

Für f gibt es eine Folge φ_k von Treppenfunktionen mit $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$. Mit $|g - \varphi_k| \leq |f - \varphi_k| + h_N$ gilt auch $\|g - \varphi_k\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1$ und das zeigt die Behauptung. □

Bemerkungen 1.3.22.

1. Zu jeder integrierbaren Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ existiert eine Funktion $\tilde{f}$, die fast überall mit f übereinstimmt und nur Werte $\neq \infty$ annimmt. Dazu setze

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } f(x) \neq \infty, \\ 0 & \text{für } f(x) = \infty. \end{cases}$$

2. Man kann sogar mit fast überall definierten Funktionen arbeiten: sei N eine Nullmenge und $f: \mathbb{R}^n \setminus N \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Man sagt dann, f sei über $\mathbb{R}^n$ integrierbar, wenn irgendeine Fortsetzung $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von f über $\mathbb{R}^n$ im Sinne der ursprünglichen Definition integrierbar ist.
3. Für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gilt: $\|f\|_1 = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall gilt. Denn verschwindet f außerhalb einer Nullmenge, so ersetze f durch die konstante Funktion 0 und wende den Modifikationssatz 1.3.21

$$\|f\|_1 = \int |f| dx \stackrel{1.3.21}{=} \int 0 dx = 0$$

an. Sei umgekehrt $\|f\|_1 = 0$. Schreibe dann

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$$

als Vereinigung der abzählbar vielen Mengen

$$N_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \geq 1/k\}.$$

Nun gilt $1_{N_k} \leq k|f|$ und daher

$$v(N_k) = \|1_{N_k}\|_1 \leq k\|f\|_1 = 0;$$

also sind alle Mengen N_k Nullmengen. Somit ist N als abzählbare Vereinigung von Nullmengen nach Bemerkung 1.3.17.2 wieder eine Nullmenge.

Betrachtung 1.3.23.

1. Es ist $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ integrierbar} \}$ mit $\|\cdot\|_1$ kein normierter Vektorraum. Stattdessen ist der Quotientenvektorraum

$$L^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N} \text{ mit } \mathcal{N} := \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid f = 0 \text{ fast überall} \}$$

ein normierter Vektorraum mit Norm: $\|f + \mathcal{N}\|_{L^1} := \|f\|_1$. Hierbei folgt die Wohldefiniertheit der Norm aus dem Modifikationssatz 1.3.21 und die Normeigenschaft aus 3.

Es gilt $f_k \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ für Funktionen $f_k, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, genau dann wenn $\|f - f_k\|_1 \rightarrow 0$. Dann heißt f ein L^1 -Grenzwert und ist als Funktion nur bis auf ein Element von $\mathcal{N}$ bestimmt.

2. In der Quantenmechanik wird der Zustand eines Teilchens im $\mathbb{R}^3$ durch eine Wellenfunktion $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ beschrieben, und $W_\psi(A) = \sqrt{\int_A |\psi(t)|^2 dt}$ wird als die Wahrscheinlichkeit interpretiert, das Teilchen in $A \subset \mathbb{R}^3$ anzutreffen. Zwei Wellenfunktionen ψ und ψ' , die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, liefern für jedes A dieselbe Wahrscheinlichkeit, $W_\psi(A) = W_{\psi'}(A)$. Es ist in diesem Kontext sinnvoll, den Raum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ der quadratintegrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ zu betrachten, und zwei Funktionen ψ und ψ' miteinander zu identifizieren, wenn diese fast überall gleich sind. Das Resultat ist der Zustandsraum $L^2(\mathbb{R}^3)$ der Quantenmechanik.

Wir wollen noch abschließend Nullmengen charakterisieren.

Satz 1.3.24 (Geometrische Charakterisierung von Nullmengen). Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Quader $Q_1, Q_2, \dots$ gibt, so dass

$$N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon.$$

Beweis.

1. Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ solche Quader gibt. Aus $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ folgt $1_N \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Q_k}$. Hieraus folgt

$$\|1_N\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1_{Q_k}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$ und somit $\|1_N\|_1 = 0$. Damit ist N nach Definition eine Nullmenge.

2. Die Umkehrung zeigt man mit den beiden Sachverhalten des folgenden Lemmas; wir möchten hier keinen Beweis geben – siehe dafür [K2], §7.6.

□

Lemma 1.3.25.

1. Ist $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine messbare offene Menge U mit $N \subseteq U$ und $v(U) < \varepsilon$.
2. Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Würfel $W_1, W_2, \dots$, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Ist U messbar, so gilt außerdem:

$$v(U) = \sum_{i=1}^{\infty} v(W_i).$$

Korollar 1.3.26.

Sei K kompakt und $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt. Es existiere eine Nullmenge $N \subseteq K$ mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung $f|_{K \setminus N}$ auf das Komplement von N stetig ist. Dann ist f über K integrierbar.

Beweis. Sei M eine obere Schranke für f auf K . Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 1.3.25.1 gibt es eine offene Menge U mit $N \subseteq U$ und $v(U) \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Die Einschränkung von f auf die kompakte Menge $K \setminus U$ ist nach Voraussetzung stetig, also integrierbar. Wähle eine Treppenfunktion φ mit $\|f_{K \setminus U} - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.

Ferner ist $\|f_U\|_1 \leq Mv(U) < \varepsilon$. Somit folgt

$$\|f_K - \varphi\|_1 \leq \|f_{K \setminus U} - \varphi\|_1 + \|f_U\|_1 < 2\varepsilon.$$

Also ist f integrierbar.

□

Das Lebesgue-Integral hat die wichtige Eigenschaft der Translationsinvarianz:

Satz 1.3.27.

1. Sei f eine integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist auch die durch $f_a(x) := f(x - a)$ definierte Funktion integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_a dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

2. Ist $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so ist auch die Menge $a + B$ messbar, mit $a \in \mathbb{R}^n$, und es gilt $v(a + B) = v(B)$.

Beweis.

1. Das Volumen von Quadern ist translationsinvariant, $v(a + Q) = v(Q)$. Damit gilt die Behauptung für Treppenfunktionen und somit für Hüllreihen. Damit ist $\|g_a\|_1 = \|g\|_1$ für jede Funktion g . Wenn die Folge (φ_k) von Treppenfunktionen die Funktion f L^1 -approximiert, so approximiert die Folge $(\varphi_{a,k})$ von verschobenen Treppenfunktionen f_a . Also ist f_a integrierbar mit Integral

$$\int f_a dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_{k,a} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx \stackrel{\text{def}}{=} \int f dx.$$

2. Es gilt

$$v(a + B) \stackrel{\text{def}}{=} \int 1_{a+B} = \int (1_B)_a \stackrel{1.3.27}{=} \int 1_B \stackrel{\text{def}}{=} v(B).$$

□

Bemerkungen 1.3.28.

1. Man kann zeigen: Fordert man für ein Maß die Messbarkeit aller beschränkten Borel-Mengen von $\mathbb{R}^n$, so stimmt jedes solche Maß, für das der Einheitswürfel Volumen 1 hat und das translationsinvariant ist, mit dem Lebesgue-Maß auf den beschränkten Borel-Mengen überein.
2. Es gibt kein *translationsinvariantes* Maß μ auf $\mathbb{R}$, normiert durch $\mu([0, 1]) = 1$, das für alle beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert ist.

Dazu wähle man ein Repräsentantensystem $A \subseteq [0, 1]$ des Quotienten $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Dann ist $\mathbb{R}$ eine abzählbare disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + A).$$

Würde $\mu(A) = 0$ gelten, so wäre $\mu(\mathbb{R}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(A) = 0$. Wir nehmen also $\mu(A) > 0$ an. Dann ist

$$\mu\left(\bigcup_{p \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} (p + A)\right)$$

als Maß einer disjunkten Vereinigung unendlich vieler Mengen des gleichen endlichen positiven Volumens unendlich. Andererseits ist $\cup_{p \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} (p + A) \subseteq [0, 2]$ und muss wegen der Monotonie des Maßes einen Inhalt kleiner als 2 haben.

Man beachte, dass in diesem Beweis bei der Konstruktion der Menge A das Auswahlaxiom eingeht. Nicht-messbare Mengen beziehungsweise Funktionen kann man nur über das Auswahlaxiom konstruieren.

1.4 Vollständigkeit von $L^1(\mathbb{R}^n)$, Konvergenzsätze

Wir folgen weiter [K2, 8.1-8.3].

Definition 1.4.1

1. Eine Folge von Funktionen $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt L^1 -konvergent gegen eine Funktion f und diese heißt ein L^1 -Grenzwert der Folge (f_k) , wenn

$$\|f_k - f\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

2. Eine Folge von Funktionen $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt L^1 -Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\|f_k - f_l\|_1 < \epsilon \text{ für alle } k, l \geq N.$$

Bemerkungen 1.4.2.

1. Der L^1 -Grenzwert ist nicht eindeutig. Sind aber f und $\tilde{f}$ beide L^1 -Grenzwerte, so gilt wegen der Dreiecksungleichung $\|f - \tilde{f}\|_1 = 0$. Also unterscheiden sich f und $\tilde{f}$ nur auf einer Nullmenge. Auch die Umkehrung dieser Aussage gilt.
2. Grenzwertbildung ist mit Summen und skalaren Vielfachen verträglich.
3. Wie für Zahlenfolgen zeigt man mit Hilfe der Dreiecksungleichung, dass L^1 -konvergente Folgen auch L^1 -Cauchy-Folgen sind.

Theorem 1.4.3 (Riesz-Fischer).

1. Der Quotientenraum $L^1(\mathbb{R}^n)$ aus Bemerkung 1.3.22.4 ist ein Banachraum:
Ist (f_k) eine L^1 -Cauchy-Folge integrierbarer Funktionen, dann existiert eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ in L^1 . Dabei ist

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx.$$

2. Eine geeignete Teilfolge von (f_k) konvergiert fast überall punktweise gegen die Grenzfunktion f .

Beweis. Wir wählen eine Teilfolge $(f_{k_\nu})_\nu$ der Cauchy-Folge aus, so dass

$$\|f_k - f_{k_\nu}\|_1 \leq 2^{-\nu} \text{ für alle } k \geq k_\nu.$$

Wir setzen

$$g_\nu := f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu} \text{ und } g := \sum_{\nu=1}^{\infty} |g_\nu|.$$

Dann gilt nach der verallgemeinerten Dreiecksungleichung

$$\|g\|_1 \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu}\|_1 \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} = 1.$$

Ebenso gilt nach Voraussetzung $\|f_{k_1}\|_1 < \infty$.

Nach Satz 1.3.20 ist somit die Menge

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = \infty \text{ oder } f_{k_1}(x) = \infty\}$$

eine Nullmenge. Die Reihe g konvergiert also fast überall absolut.

Wir definieren eine Funktion f durch

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{k_\nu}(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x) & \text{für } x \notin N, \\ 0 & \text{für } x \in N. \end{cases}$$

Nach Konstruktion konvergiert die Teilfolge (f_{k_ν}) fast überall punktweise gegen f . Nun prüft man noch, dass $f_k \rightarrow f$ in L^1 gilt. Sei dazu $\epsilon > 0$. Sei ein Index ρ so gewählt, dass

$$\sum_{\nu=\rho}^{\infty} \|g_\nu\|_1 \leq \epsilon \text{ und } \|f_k - f_{k_\rho}\|_1 \leq \epsilon \text{ für alle } k \geq k_\rho.$$

Da nach Voraussetzung f_{k_ρ} integrierbar ist, finden wir auch eine Treppenfunktion φ mit $\|f_{k_\rho} - \varphi\|_1 \leq \epsilon$. Damit gilt

$$\|f - \varphi\|_1 \leq \|f - f_{k_\rho}\|_1 + \|f_{k_\rho} - \varphi\|_1 \leq \sum_{\nu=\rho}^{\infty} \|g_\nu\|_1 + \epsilon \leq 2\epsilon.$$

Also liegt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Unter Verwendung derselben Ungleichungen folgt weiter

$$\left| \int f dx - \int f_k dx \right| \leq \int |f - f_k| dx \stackrel{1.2.5}{=} \|f - f_k\|_1 \leq \|f - \varphi\|_1 + \|\varphi - f_{k_\rho}\|_1 + \|f_{k_\rho} - f_k\|_1,$$

und damit $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$. □

Bemerkungen 1.4.4.

1. Man kann im Theorem von Riesz-Fischer 1.4.3 nicht auf die Auswahl einer Teilfolge verzichten, um punktweise Konvergenz zu erreichen. Betrachte dazu die folgende Funktionenfolge, auch „wandernder Buckel“ genannt: Schreibe $k \in \mathbb{N}$ eindeutig als $k = 2^{\nu(k)} + r(k)$ mit $0 \leq r(k) < 2^{\nu(k)}$. Sei

$$I_k := [r(k)2^{-\nu(k)}, (r(k) + 1)2^{-\nu(k)}] \text{ und } f_k := 1_{I_k}.$$

Dann gilt $\|f_k\|_1 = \int f_k dx = 2^{-\nu(k)} \rightarrow 0$. Aber an keiner Stelle $x \in [0, 1]$ geht $f_k(x)$ nach Null, da immer wieder Buckel der Höhe eins auftauchen.

2. In der Quantenmechanik, Fourier-Analyse und vielen anderen Anwendungen ist es wichtig, Elemente f eines Raumes von Funktionen als „unendliche Linearkombinationen“ $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(x)$ eines abzählbar unendlichen Satzes von Basisfunktionen ψ_k , $k \in \mathbb{N}$ darstellen zu können. Mithilfe des Satzes von Riesz-Fischer kann man in diesen Fällen zeigen, dass die Cauchy-Folgen der Partialsummen $\sum_{k=1}^N f_k \psi_k(x)$ tatsächlich immer einen Grenzwert haben, der wiederum im betrachteten Funktionenraum liegt.

Korollar 1.4.5.

Jede Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist L^1 -Grenzwert einer Folge (φ_k) von *Treppenfunktionen* mit:

- (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty$,
- (ii) (φ_k) konvergiert fast überall punktweise gegen f .

Beweis. Da f integrierbar ist, gibt es eine Folge (ψ_k) von Treppenfunktionen mit $\|f - \psi_k\|_1 \rightarrow 0$. Nach dem Beweis des Satzes von Riesz-Fischer erhalten wir eine Teilfolge (φ_k) mit der Eigenschaft (i), die fast überall punktweise gegen eine Funktion $\tilde{f}$ konvergiert, wobei $\tilde{f} + \mathcal{N} = f + \mathcal{N}$ in $L^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}$. Daraus folgt die zweite Eigenschaft. $\square$

Wir dehnen nun den kleinen Satz von Beppo Levi von Treppenfunktionen auf integrierbare Funktionen aus.

Theorem 1.4.6 (Satz von Beppo Levi von der monotonen Konvergenz).

Sei (f_k) eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sei die Funktion f durch $f(x) = \lim f_k(x)$ als punktwiser Grenzwert definiert. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn die Folge der Integrale $(\int f_k dx)$ beschränkt ist. In diesem Fall gilt:

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $f \geq 0$. Die Bedingung, dass die Folge $(\int f_k dx)$ beschränkt ist, ist notwendig für die Integrierbarkeit der Grenzfunktion wegen der Ungleichungen $\int f_k dx \leq \int f dx$.

Sei umgekehrt die Folge der Integrale beschränkt. Da sie monoton ist, konvergiert sie. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es also einen Index N , so dass für alle $m \geq k \geq N$ gilt

$$\int f_m dx - \int f_k dx < \epsilon.$$

Es folgt wegen der Monotonie von (f_k) , dass

$$\|f_m - f_k\|_1 \stackrel{1.2.5}{=} \int |f_m - f_k| dx = \int f_m dx - \int f_k dx < \epsilon.$$

Also ist (f_k) eine L^1 -Cauchy-Folge.

Nach dem Theorem von Riesz-Fischer 1.4.3 gibt es einen L^1 -Grenzwert $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$. Es existiert eine Teilfolge mit $f_{k_\nu} \rightarrow \tilde{f}$ fast überall. Fast überall gilt somit $\tilde{f} = f$, so dass nach dem Modifikationssatz 1.3.21 auch f integrierbar ist. $\square$

Bemerkungen 1.4.7.

1. Sei (A_k) eine Ausschöpfung einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ durch Figuren oder durch messbare Mengen und f eine Funktion auf $A \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass f über jedes A_k integrierbar ist.

Dann ist f genau dann über A integrierbar, wenn die Folge der Integrale $(\int_{A_k} |f| dx)$ beschränkt ist. In diesem Fall gilt

$$\int_A f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f dx.$$

Denn ist f integrierbar, so ist auch $|f|$ integrierbar und es gilt wegen $A_k \subseteq A$

$$\int_{A_k} |f| \leq \int_A |f|.$$

Ist umgekehrt die Folge der Integrale beschränkt, so zieht man sich nach Abänderung auf einer Nullmenge auf nichtnegative, reellwertige Funktionen zurück. Sei also $f \geq 0$. Dann ist die Folge $(\int_{A_k} f)$ monoton wachsend mit Grenzfunktion $\int_A f$. Aus dem Satz von Beppo Levi 1.4.6 folgt, dass f_A integrierbar ist.

2. Wir betrachten den Spezialfall der Funktion $f = 1$: es ist dann die Teilmenge A genau dann messbar, wenn die Folge $v(A_k)$ der Volumina für eine Ausschöpfung durch messbare Mengen beschränkt ist. In diesem Fall gilt $v(A) = \sup v(A_k)$.

3. σ -Additivität: Ist $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter messbarer Mengen $B_k \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} v(B_k) < \infty$, so ist B messbar mit Lebesgue-Maß $\sum_{k=1}^{\infty} v(B_k)$. Betrachte hierzu die Ausschöpfung $A_k := B_1 \cup \dots \cup B_k$ der Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_k$.

Theorem 1.4.8 (von Lebesgue von der majorisierten Konvergenz).

Sei (f_k) eine Folge integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Es gebe eine integrierbare *Majorante*, d.h. eine integrierbare Funktion F mit $|f_k| \leq F$ für alle k .

Dann ist die Grenzfunktion f integrierbar, und es gilt

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$$

Der Satz gilt analog für die Integration über eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Beweis.

- Da F integrierbar ist, ist die Menge, auf der $F(x) = \infty$ gilt, nach Satz 1.3.20 eine Nullmenge N' . Die Menge der $x \in \mathbb{R}^n$, für die $f_k(x)$ nicht gegen $f(x)$ geht, ist nach Annahme ebenfalls eine Nullmenge N'' . Wir ändern auf der Nullmenge $N := N' \cup N''$ die Funktionen f_k , f und F ab, indem wir 0 als Funktionswert setzen. (Die Integrierbarkeit, die Ungleichung $|f_k| \leq F$ und die Werte der Integrale bleiben unverändert.) Wir können daher annehmen, dass alle Funktionswerte endlich sind und dass f die Grenzfunktion ist. Außerdem können wir wieder annehmen, dass f reellwertig und nicht-negativ ist.
- Wir betrachten die Funktion $g_k := \sup\{f_i \mid i \geq k\}$. Für jedes feste k ist die Funktionenfolge

$$g_{k,\nu} := \max(f_k, \dots, f_{k+\nu}) \text{ mit } \nu = 0, 1, 2, \dots$$

monoton wachsend und konvergiert gegen die Funktion g_k . Die Funktionen $g_{k,\nu}$ sind als Maxima integrierbarer Funktionen integrierbar nach Korollar 1.2.7.2 und die Folge ihrer Integrale ist durch $\int F$ beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi 1.4.6 folgt, dass alle Funktionen g_k integrierbar sind:

$$\left| \int g_k \right| = \left| \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int g_{k,\nu} dx \right| \leq \int F dx.$$

- Auf die monoton fallende Folge (g_k) , die gegen f konvergiert, und deren Integrale nach der Abschätzung betragsmäßig durch $\int F dx$ beschränkt sind, können wir wieder den Satz von Beppo Levi 1.4.6 anwenden. Also ist auch f integrierbar und es gilt

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k dx.$$

Analog betrachtet man noch die Funktion $g_k^* := \inf\{f_i \mid i \geq k\}$ und erhält die Aussage

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k^* dx.$$

Aus $g_k^* \leq f_k \leq g_k$ folgt nun die Aussage. □

Wir haben nun Hilfsmittel, um integrierbare Funktionen zu identifizieren. Wir erinnern an den Begriff der σ -Kompaktheit aus Definition (1.3.7) und definieren weiterhin:

Definition 1.4.9

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine σ -kompakte Menge. Eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt lokal-integrierbar, wenn sie über jede kompakte Teilmenge $K \subseteq A$ integrierbar ist.

Bemerkungen 1.4.10.

Jede stetige Funktion auf einer σ -kompakten Menge ist nach Satz 1.2.13.2 lokal integrierbar.

Korollar 1.4.11.

Sei A eine σ -kompakte Menge.

1. Majorantenkriterium:

Sei $f: A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine lokal-integrierbare Funktion, die eine über A integrierbare Majorante F hat, d.h. es gilt

$$|f(x)| \leq F(x) \text{ fast überall auf } A.$$

Dann ist f über A integrierbar.

2. Sei $f: A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ integrierbar, $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ lokal-integrierbar und beschränkt. Dann ist auch das Produkt $f \cdot g$ integrierbar auf A .
3. Die Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ sei fast überall stetig auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und habe eine über U integrierbare Majorante F . Dann ist f über der offenen Menge U integrierbar.

Beweis.

1. Sei $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ eine Ausschöpfung durch kompakte Mengen A_k . Die Folge der Funktionen (f_{A_k}) konvergiert dann punktweise gegen f_A . Da alle Einschränkungen f_{A_k} integrierbar sind und $|f_{A_k}| \leq F_A$, möglicherweise wieder nach einer Abänderung auf einer Nullmenge, folgt die Behauptung aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz 1.4.8.

2. Das Produkt $f \cdot g$ ist lokal integrierbar. Sei M Schranke von g , also $M \geq |g(x)|$ für alle $x \in A$. Dann ist $F := |f| \cdot M$ eine integrierbare Majorante des Produkts $f \cdot g$.
3. Wegen des Majorantenkriteriums in Teil 1 reicht es zu zeigen, dass f lokal-integrierbar ist. Die Integrierbarkeit über ein beliebiges Kompaktum $K \subseteq U$ folgt nun aus Korollar 1.3.26, falls f beschränkt ist. Für den allgemeinen Fall verweisen wir auf Königsberger [K2]. □

Beispiel 1.4.12.

Sei f integrierbar über $\mathbb{R}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $t \mapsto f(t) \exp(-ixt)$ wegen $|f(t) \exp(-ixt)| = |f(t)|$ die integrierbare Majorante $|f|$ und ist somit nach Korollar 1.4.11.1 über $\mathbb{R}$ integrierbar. Die durch das Integral definierte Funktion

$$\begin{aligned} \hat{f}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-ixt) dt \end{aligned}$$

heißt die *Fourier-Transformierte* von f .

Satz 1.4.13 (Verallgemeinerter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Sei f eine differenzierbare Funktion auf dem kompakten Intervall $[x_0, x]$ mit beschränkter Ableitung. Dann ist die Ableitung f' auf dem Intervall $[x_0, x]$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$f(x) - f(x_0) = \int_{[x_0, x]} f'(t) dt$$

Beweis. Übung. □

1.5 Parameterabhängige Integrale, der Satz von Fubini und der Transformationssatz

Wir folgen [K2, §8.4, 8.5, 9.1-9.3].

Sei X ein metrischer Raum und $T \subseteq \mathbb{R}^p$. Es sei die Funktion

$$\begin{aligned} f: X \times T &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$

über T integrierbar für jedes feste $x \in X$. Wir definieren eine Funktion F auf dem metrischen Raum X durch die Integrale

$$F(x) := \int_T f(x, t) dt$$

Theorem 1.5.1 (Stetigkeitssatz).

Zusätzlich habe der Integrand f die folgenden Eigenschaften:

1. Für jedes feste $t \in T \subseteq \mathbb{R}^p$ ist die auf dem metrischen Raum X definierte Funktion $x \mapsto f(x, t)$ stetig.
2. Es gibt eine integrierbare Funktion $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $|f(x, t)| \leq \Phi(t)$ für alle $(x, t) \in X \times T$ gilt. (Man beachte, dass die Schranke unabhängig von $x \in X$ sein muss.)

Dann ist die Funktion $F(x) = \int_T f(x, t) dt$ auf X stetig.

Beweis. Zu zeigen ist, dass für jede Folge (x_k) in X mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = F(x).$$

Wir betrachten für die Folge (x_k) in X die Folge der Funktionen

$$\begin{aligned} f_k: T &\rightarrow \mathbb{C} \\ f_k(t) &:= f(x_k, t) \end{aligned}$$

Wegen Voraussetzung 1 gilt dann punktweise Konvergenz, also für jedes $t \in T$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, t) = f(x, t).$$

Nach Voraussetzung 2 gilt punktweise $|f_k| \leq \Phi$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz 1.4.8 folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T f_k(t) dt = \int_T f(x, t) dt$$

Das heißt aber $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = F(x)$. □

Beispiel 1.5.2 (Stetigkeit der Fourier-Transformierten).

Sei f integrierbar auf $\mathbb{R}$, dann ist die Fourier-Transformierte aus Beispiel 1.4.12

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-ixt) dt$$

stetig. Denn die Funktion $x \mapsto f(t)e^{-ixt}$ ist für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ stetig in x und $\Phi(t) = |f(t)|$ ist eine von x unabhängige integrierbare Majorante, da

$$|f(t) \exp(-ixt)| = |f(t)| \cdot \underbrace{|\exp(-ixt)|}_1.$$

Theorem 1.5.3 (Differentiationssatz).

Neben den Voraussetzungen zu Beginn des Abschnitts sei jetzt $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Es habe $f: X \times T \rightarrow \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften:

1. Für jedes feste $t \in T$ ist die Funktion $x \mapsto f(x, t)$ stetig differenzierbar.
2. Es gibt eine integrierbare Funktion $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x, t) \right| \leq \Phi(t) \text{ für alle } (x, t) \in X \times T \text{ und } \nu = 1, \dots, n.$$

Dann ist die Funktion $F(x) = \int_T f(x, t) dt$ stetig differenzierbar. Ferner ist für jedes x die Funktion $t \mapsto \partial_{x_\nu} f(x, t)$ integrierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \int_T f(x, t) dt = \int_T \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x, t) dt.$$

Beweis. Sei $x_0 \in X$ und $r > 0$ so gewählt, dass $B_r(x_0) \subseteq X$. Dies geht, da X offen ist. Sei (h_k) eine Nullfolge reeller Zahlen mit $0 < |h_k| < r$. Setze

$$x_k := x_0 + h_k e_\nu \text{ und } \varphi_k(t) := \frac{f(x_k, t) - f(x_0, t)}{h_k}.$$

Alle Funktionen φ_k sind auf T integrierbare Funktionen. Für jedes $t \in T$ gilt wegen der partiellen Differenzierbarkeit von f

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t) = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, t).$$

Aus dem Schrankensatz der Differentiation folgt mit Voraussetzung 2

$$|\varphi_k(t)| \leq \Phi(t).$$

Da Φ nach Voraussetzung 2 integrierbar sein soll, ist nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz 1.4.8 die Grenzfunktion $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, t)$ integrierbar und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T \varphi_k(t) dt = \int_T \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, t) dt.$$

Wegen

$$\int_T \varphi_k(t) dt = \frac{F(x_k) - F(x_0)}{h_k}$$

folgt daraus die partielle Differenzierbarkeit der Funktion F und die Formel für die partielle Ableitung des Integrals. Mit dem Stetigkeitssatz folgt dann auch die stetige Differenzierbarkeit von F . $\square$

Satz 1.5.4 (Newton-Potential).

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kompaktum, $\rho: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, die die Interpretation einer Ladungs- oder Masseverteilung haben kann. Das *Newton-Potential* zu ρ ist die Funktion $u: \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(x) := \int_K \frac{\rho(y)}{\|x - y\|_2} dy \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$$

mit der durch

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

auf $\mathbb{R}^n$ definierten euklidischen Norm. Wir behaupten:

1. Die Funktion u ist harmonisch:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = 0.$$

2. Für jeden Einheitsvektor $a \in \mathbb{R}^3$ gilt mit

$$M := \int_K \rho(y) dy$$

dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot u(ra) = M,$$

was wir auch in der Form $u(ra) \simeq M \cdot \frac{1}{r}$ schreiben.

Beweis.

- Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) := \frac{\rho(y)}{\|x - y\|_2} \text{ für } (x, y) \in (\mathbb{R}^3 \setminus K) \times K.$$

Für jedes feste $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ ist die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ nach Korollar 1.4.11.2 integrierbar auf K , da ρ integrierbar sein soll und da die Funktion $\frac{1}{\|x - y\|_2} =: \frac{1}{r}$ stetig und daher auf dem Kompaktum K beschränkt und integrierbar ist. Für jedes $y \in K$ ist $x \mapsto f(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3 \setminus K$, also in der Variablen x .

- Wir beweisen die C^2 -Differenzierbarkeit der Funktion u auf allen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^3 \setminus K$ die von K einen Mindestabstand $\varepsilon > 0$ haben. Dies reicht aus.

Wegen $\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3}(x_\nu - y_\nu)$ gilt

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x, y) \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} |\rho(y)|$$

Man zeigt durch weiteres Ableiten die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}(x, y) \right| \leq \frac{4}{\varepsilon^3} |\rho(y)|$$

Dies sind Abschätzungen gegen auf K integrierbare Funktionen, die nicht von x abhängen.

Der Differentiationssatz 1.5.3 ist also in beiden Fällen anwendbar; er liefert die C^2 -Differenzierbarkeit von u und die Identität

$$\Delta_x \int_K \frac{\rho(y)}{\|x - y\|_2} dy = \int_K \rho(y) \underbrace{\Delta_x \left(\frac{1}{\|x - y\|_2} \right)}_{= \dots = 0} dy = 0.$$

- Sei $R > 0$ so groß gewählt, dass $K \subseteq B_R(0)$. Für $r > R$ ist dann $ra \notin K$ und es gilt

$$ru(ra) = \int_K \frac{r\rho(y)}{\|ra - y\|_2} dy = \int_K \frac{\rho(y)}{\|a - \frac{1}{r}y\|_2} dy$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} g: [0, \frac{1}{2R}] \times K &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y) &\mapsto \frac{\rho(y)}{\|a - ty\|_2} \end{aligned}$$

ist für jedes y in t stetig. Ferner ist $|g(t, y)| \leq 2\rho(y)$ für alle $(t, y) \in [0, \frac{1}{2R}] \times K$. Mit dem Stetigkeitssatz 1.5.1 folgt somit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ru(ra) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_K \frac{\rho(y)}{\|a - ty\|_2} dy = \int_K \rho(y) dy.$$

□

Wir verallgemeinern nun den kleinen Satz von Fubini 1.2.14 von stetigen beschränkten Funktionen auf integrierbare Funktionen.

Theorem 1.5.5 (Allgemeiner Satz von Fubini).

Schreibe $X := \mathbb{R}^p$ und $Y := \mathbb{R}^q$. Es sei $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ integrierbar. Dann gilt

1. Für fast alle $y \in Y$, d.h. außer für y in einer Nullmenge $N \subseteq Y$, ist die Funktion

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ x &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

über X integrierbar.

2. Setzt man für $y \notin N$

$$F(y) := \int_X f(x, y) dx$$

und $F(y) := 0$ für $y \in N$, dann ist die Funktion $F: Y \rightarrow \mathbb{C}$ über Y integrierbar und es gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_Y F(y) dy.$$

Für diesen Sachverhalt schreiben wir auch

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy.$$

Es gilt analog

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx.$$

Die rechte Seite ist ein *iteriertes Integral*.

Beweis.

- *Schritt 1:* Ist $A \subseteq X \times Y$ eine Nullmenge, so gibt es eine Nullmenge $A' \subseteq Y$ derart, dass für $y \in Y \setminus A'$ alle Schnitte $A_y = \{x \in X | (x, y) \in A\}$ Nullmengen sind. (Man beachte, dass A_y nicht für *alle* $y \in Y$ eine Nullmenge sein muss. Betrachte etwa die Nullmenge $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: für alle $y \in \mathbb{Q}$ ist $A_y = \mathbb{R}$ keine Nullmenge.)

Dies sieht man so: Wir benutzen Satz 1.3.24, um zu gegebenen $\epsilon > 0$ abzählbar viele offene Quader $Q_1, Q_2, \dots$ zu finden, so dass

$$A \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \epsilon.$$

Dann schreiben wir jeden Quader als Produkt, $Q_k = Q'_k \times Q''_k$. Wir benutzen die Halbnorm $\|\cdot\|_1^X$ bezüglich X , um die Funktion

$$\begin{aligned} a: Y &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ y &\mapsto \|1_{A_y}\|_1^X \end{aligned}$$

einzuführen. Aus

$$1_{A_y} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Q'_k} \cdot 1_{Q''_k}(y)$$

schließen wir mit Hilfe der verallgemeinerten Dreiecksungleichung

$$a(y) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_p(Q'_k) 1_{Q''_k}(y).$$

Daraus folgt nach der Definition der Halbnorm $\|\cdot\|_1^Y$ über Treppenfunktionen

$$\|a\|_1^Y \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_p(Q'_k) v_q(Q''_k) = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) < \epsilon.$$

Also ist $\|a\|_1^Y = 0$. Es gibt nach Bemerkung 1.3.22.3 eine Nullmenge $N \subseteq Y$, so dass $a(y) = \|1_{A_y}\|_1^X = 0$ und somit A_y eine Nullmenge ist für jedes $y \in Y \setminus N$.

- *Schritt 2:* Reduktion auf den Fall von Treppenfunktionen

Nach dem Korollar 1.4.5 zum Satz von Riesz-Fischer existiert eine Folge φ_k von Treppenfunktionen auf $X \times Y$ mit den Eigenschaften wie in Korollar 1.4.5:

1. $\varphi_k \rightarrow f$ punktweise außerhalb einer Nullmenge $A \subseteq X \times Y$ und im L^1 -Sinne.
2. Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty$.

Wegen Eigenschaft 1 und nach der Beschreibung von Nullmengen $A \subseteq X \times Y$ in Schritt 1 folgt:

- (1_X) Es gibt eine Nullmenge $N' \subseteq Y$, so dass $\varphi_k(\cdot, y) \rightarrow f(\cdot, y)$ für y außerhalb N' punktweise fast überall auf X .

Betrachte die Treppenfunktion

$$H_k(y) := \int_X \underbrace{|\varphi_{k+1}(x, y) - \varphi_k(x, y)|}_{\geq 0} dx$$

Nach dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen 1.1.8 folgt

$$\int_Y H_k(y) dy = \int_{X \times Y} |\varphi_{k+1}(x, y) - \varphi_k(x, y)| d(x, y) = \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1$$

Aus Eigenschaft 2. folgt nun, dass

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y H_k(y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty.$$

Die Folge der Partialsummen $\sum_{k=1}^{\ell} H_k(y)$ wächst monoton und die Integrale $\int \sum_{k=1}^{\ell} H_k(y) dy$ sind beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi 1.4.6 ist die Funktion $\sum_{k=1}^{\infty} H_k$ integrierbar. Insbesondere gilt wegen Satz 1.3.20, dass $\sum_{k=1}^{\infty} H_k(y) < \infty$ für alle y außerhalb einer Nullmenge $N'' \subseteq Y$ ist. Somit haben wir

- (2_X) Es gilt $\sum_k \|\varphi_{k+1}(\cdot, y) - \varphi_k(\cdot, y)\|_1^X < \infty$ für alle y außerhalb einer Nullmenge $N'' \subseteq Y$.

Also ist $(\varphi_k(\cdot, y))$ eine L^1 -Cauchy-Folge auf X . Daher erhält man für $y \notin N := N' \cup N''$ nach Riesz-Fischer 1.4.3, dass eine Teilfolge von $\varphi_k(\cdot, y)$ fast überall gegen eine integrierbare Funktion auf X konvergiert. Diese ist wegen Eigenschaft 1_X gleich $f(\cdot, y)$ fast überall. Damit ist $f(\cdot, y)$ über X integrierbar und Aussage 1. des Satzes gezeigt.

- *Schritt 3:* Aus dem Satz von Riesz-Fischer 1.4.3 folgt außerdem für $y \in Y \setminus N$:

$$(**) \quad F(y) = \int_X f(x, y) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_X \varphi_k(x, y) dx}_{\Phi_k(y)}.$$

Zum Beweis des zweiten Teils der Aussage des Satzes setze

$$\Phi_k(y) := \int_X \varphi_k(x, y) dx.$$

Dies sind Treppenfunktionen auf Y mit den Eigenschaften

(1_Y) Die Folge (Φ_k) konvergiert auf $Y \setminus N$ punktweise gegen F . Dies ist die Aussage (**).

(2_Y) $\sum_{k=1}^{\infty} \|\Phi_{k+1} - \Phi_k\|_1^Y < \infty$. Dies folgt aus (*).

Wegen (2_Y) ist (Φ_k) eine L^1 -Cauchy-Folge von Treppenfunktionen auf Y . Nach dem Satz von Riesz-Fischer 1.4.3 konvergiert eine Teilfolge punktweise fast überall gegen eine integrierbare Funktion auf Y . Wegen (1_Y) stimmt diese mit F überein. Folglich ist auch F integrierbar über Y . Der Satz von Riesz-Fischer liefert schließlich

$$\begin{aligned} \int_Y F(y) dy &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Y \Phi_k(y) dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} \varphi_k(x, y) d(x, y) \\ &= \int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) \text{ [Eigenschaft 1. der } \varphi_k]. \end{aligned}$$

□

Aus dem Satz von Fubini 1.5.5 folgt sofort: Ist f über $X \times Y$ integrierbar, so gilt

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy.$$

Im Satz von Fubini haben wir *vorausgesetzt*, dass die Funktion auf $X \times Y$ integrierbar ist. Der Satz von Tonelli gibt hierfür ein Kriterium:

Theorem 1.5.6 (Satz von Tonelli).

Sei $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ eine fast überall stetige (oder lokal-integrierbare) Funktion. Dann ist f genau dann über $X \times Y$ integrierbar, wenn wenigstens eines der iterierten Integrale

$$\int_Y \left(\int_X |f(x, y)| dx \right) dy \text{ oder } \int_X \left(\int_Y |f(x, y)| dy \right) dx$$

existiert. Damit ist z.B. für das erste Integral wie im Satz von Fubini gemeint, dass für jedes $y \in Y$ außerhalb einer geeigneten Nullmenge $N \subseteq Y$ das Integral $\int_X |f(x, y)| dx$ existiert und dass die Funktion mit

$$F(y) := \int_X |f(x, y)| dx \text{ für } y \in Y \setminus N$$

und $F(y) = 0$ für $y \in N$ über Y integrierbar ist.

In dem Fall gelten die Aussagen des Satzes von Fubini 1.5.5 und die Vertauschungsregel.

Beweis. Ist die Funktion f über $X \times Y$ integrierbar, so ist nach Satz 1.2.5 auch die Funktion $|f|$ über $X \times Y$ integrierbar. Somit ist die angegebene Bedingung nach dem Satz von Fubini 1.5.5 notwendig.

Zum Beweis der Umkehrung zeigen wir, dass unter der angegebenen Bedingung, etwa zu $\int_Y \left(\int_X |f(x, y)| dx \right) dy$, $|f|$ über $X \times Y$ integrierbar ist. Nach dem Majorantenkriterium in Korollar 1.4.11.1 bzw. 3. ist dann auch f über $X \times Y$ integrierbar und die Aussagen des Satzes von Fubini 1.5.5 gelten.

Sei dazu $h_k := \min(|f|, k \cdot \mathbf{1}_{[-k, k]^n})$; die Funktion h_k ist integrierbar: für eine lokal-integrierbare Funktion f folgt dies sofort nach Definition 1.4.9, für eine fast überall stetige Funktion aus Korollar 1.3.26. Die Folge h_k konvergiert monoton wachsend gegen $|f|$. Die Folge der Integrale ist beschränkt:

$$\int_{X \times Y} h_k(x, y) d(x, y) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_Y \left(\int_X h_k(x, y) dx \right) dy \leq \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| dx \right) dy$$

und mit dem Satz von Beppo Levi 1.4.6 folgt $|f| \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$. □

Beispiel 1.5.7.

Aussage (und Voraussetzungen!) des Satzes von Fubini sind nicht erfüllt bei der Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

die nicht auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ integrierbar ist:

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| dy dx = \infty.$$

Dies sieht man so:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x, y)| \, dy &\geq \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} |f(x, y)| \, dy \\
&\geq \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \frac{x^2 - \frac{x^2}{2}}{(x^2 + \frac{x^2}{2})^2} \, dy \\
&= \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2}x^2}{(\frac{3}{2}x^2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Aber das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx$ ist nicht endlich. In der Tat darf man hier auch nicht die Integrationsgrenzen vertauschen: es ist

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \right) \, dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy \right) \, dx.$$

Bemerkungen 1.5.8.

Für Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $g: Y \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert man eine Funktion

$$\begin{aligned}
f \otimes g: X \times Y &\rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\
(x, y) &\mapsto f(x) \cdot g(y).
\end{aligned}$$

Seien $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $g \in \mathcal{L}^1(Y)$. Dann gilt, dass $f \otimes g$ ein Element von $\mathcal{L}^1(X \times Y)$ definiert, also integrierbar ist.

Man rechnet dies für Treppenfunktionen nach und approximiert dann f und g durch Treppenfunktionen. Es gilt hierbei die Abschätzung $\|f \otimes g\|_{1, X \times Y} \leq \|f\|_{1, X} \|g\|_{1, Y}$, die man erhält, indem man aus einer Hüllreihe von f und einer Hüllreihe von g eine Hüllreihe von $f \otimes g$ konstruiert. Mit dem Satz von Fubini 1.5.5 zeigt man schließlich:

$$\int_{X \times Y} (f \otimes g)(x, y) \, d(x, y) = \left(\int_X f(x) \, dx \right) \cdot \left(\int_Y g(y) \, dy \right)$$

Es ist also z.B. die Funktion $f(x, y) := x^{p-1}y^{q-1}$ für reelle p und q genau dann über das offene Quadrat $(0, 1)^2$ integrierbar, wenn $p > 0$ und $q > 0$.

Bemerkungen 1.5.9.

Wir erinnern:

1. Seien $U, U' \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein Diffeomorphismus $T: U \rightarrow U'$ ist eine bijektive Abbildung, so dass die Abbildungen T und T^{-1} in jedem Punkt stetig differenzierbar sind.

2. Sei $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $T: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ Diffeomorphismus des Innern und ein Homöomorphismus auf dem abgeschlossenen Intervall. Dann unterscheiden wir zwei Fälle, den orientierungserhaltenden und den orientierungsumkehrenden Fall:

$$(i) \quad T(a) = \alpha, T(b) = \beta \text{ und } (ii) \quad T(a) = \beta, T(b) = \alpha.$$

Es gilt dann:

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad & \int_a^b f(T(x)) T'(x) dx = \int_\alpha^\beta f(y) dy \\ (ii) \quad & \int_a^b f(T(x)) \cdot \underbrace{T'(x)}_{<0} dx = \int_\beta^\alpha f(y) dy = - \int_\alpha^\beta f(y) dy \end{aligned} \right\}$$

In beiden Fällen gilt die Transformationsformel $\int_{[a,b]} f(T(x)) \cdot |T'(x)| dx = \int_{[\alpha,\beta]} f(y) dy$.

Theorem 1.5.10 (Transformationssatz).

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $T: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist die Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genau dann über V integrierbar, wenn die Funktion

$$f \circ T \cdot \left| \det \left(\frac{\partial T_\mu}{\partial x_\nu} \right)_{\mu,\nu} \right|$$

über U integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_U f(T(x)) \cdot \left| \det \left(\frac{\partial T_\mu}{\partial x_\nu}(x) \right)_{\mu,\nu} \right| dx = \int_V f(y) dy.$$

Bevor wir den Satz beweisen, bringen wir ein Plausibilitätsargument und diskutieren wichtige Spezialfälle.

Bemerkungen 1.5.11.

Für das Plausibilitätsargument verwenden wir Riemannsche Summen und schreiben die Menge U als Vereinigung kleiner Quader, $U = \bigcup_k Q_k$. In jedem Quader wählen wir einen Punkt $x_k \in Q_k$. Wir approximieren so $v(U) \approx \sum_k v(Q_k)$.

Dann ist aber $V = T(U)$ die Vereinigung der „krummlinigen Quader“ $T(Q_k)$. Lokal approximieren wir die Abbildung durch ihr Differential,

$$T(x) \approx T(x_k) + dT_{x_k}(x - x_k),$$

die eine affine Abbildung ist. Die „krummlinigen Quader“ $T(Q_k)$ haben daher in Annäherung das Volumen

$$|\det(dT_{x_k})| v(Q_k).$$

Ist f stetig, so approximieren wir f auf dem kleinen Quader $T(Q_k)$ durch $f|_{T(Q_k)} \approx f(y_k)$ für $y_k = T(x_k) \in T(Q_k)$. Damit erhalten wir für das Integral:

$$\begin{aligned} \int_V f(y) dy &\approx \sum f(y_k) \cdot v(T(Q_k)) \approx \sum f(T(x_k)) |\det(dT_{x_k})| v(Q_k) \\ &\approx \int_U f(T(x)) |\det(dT_x)| dx. \end{aligned}$$

Korollar 1.5.12 (Spezialfall affiner Transformationen).

Sei $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nicht-ausgeartete affine Transformation, also $T(x) = Ax + b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann ist $dT = A$ und somit $\det dT = \det A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ist $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ über eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar, dann ist $f \circ T$ über die Urbildmenge $T^{-1}(K)$ integrierbar und es ist

$$\int_{T^{-1}(K)} f(T(x)) dx = \frac{1}{|\det A|} \int_K f(y) dy.$$

Beweis. Um den Transformationssatz 1.5.10 anzuwenden, betrachte man die triviale Fortsetzung f_K . Dann ist $f_K \circ T$ nur auf der Teilmenge $T^{-1}(K)$ von 0 verschieden. $\square$

Bemerkungen 1.5.13.

1. Wir betrachten folgende Anwendung: Sei $T(x) = Ax + b$ eine invertierbare affine Abbildung des $\mathbb{R}^n$ mit Umkehrabbildung $T^{-1}(y) = A^{-1}y - A^{-1}b$. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge, dann ist auch $T(K) \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und es gilt

$$v(T(K)) = |\det A| \cdot v(K).$$

Dies folgt durch Anwendung der affinen Transformationsformel auf die affine Abbildung T^{-1} :

$$v(T(K)) = \int_{T(K)} 1_K(T^{-1}(x)) dx = |\det A| \int_K 1_K(y) dy = |\det A| v(K).$$

Es gilt also insbesondere für affine Abbildungen mit $A \in SL(n, \mathbb{R})$, dass $v(T(K)) = v(K)$. Zu solchen Abbildungen zählen alle Translationen der $\mathbb{R}^n$ und alle Rotationen des $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-euklidischen Struktur, so dass wir die Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes gezeigt haben. Wir erwähnen nur, dass auch symplektische Transformationen, also insbesondere kanonische Transformationen eines Phasenraums, Determinante Eins haben und somit das Volumen erhalten.

2. Symmetrien des Newton-Potentials:

Wir verwenden Bezeichnungen wie in Beispiel 1.5.4. Sei nun speziell K eine kompakte Kugelschale und ρ sei eine rotationssymmetrische Massenverteilung,

$$\rho(Ay) = \rho(y) \text{ für alle } A \in SO(3).$$

Dann existiert nach Beispiel 1.5.4 das Potential überall und es gilt

$$u(Ax) = \int_K \frac{\rho(y)}{\|Ax - y\|_2} dy = \int_K \frac{\rho(A^{-1}y)}{\|x - A^{-1}y\|_2} dy \stackrel{1.5.10}{=} \int_K \frac{\rho(\gamma)}{\|x - \gamma\|_2} d\gamma = u(x).$$

Also ist dann auch das Newton-Potential u rotationssymmetrisch.

Wir kommen nun zum Beweis des Transformationssatzes:

Beweis. Wir skizzieren hier nur die wichtigsten Beweisschritte und verweisen für Details auf [K2, §9.2].

- *Schritt 1:*

Sei $N \subseteq U$ Nullmenge und T Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L . Dann ist auch das Bild $T(N) \subseteq V$ eine Nullmenge.

Man benutzt Überdeckungen der Nullmenge N durch achsenparallele Würfel $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} v_n(W_k) < \epsilon$ wie in Lemma 1.3.25.2. Dann liegt das Bild $T(N \cap W_k)$ in einem Würfel mit dem Volumen $(2L)^n v(W_k)$. Diese Würfel überdecken das Bild $T(N)$; die Summe ihrer Volumina ist kleiner als $(2L)^n \epsilon$. Somit ist $T(N)$ eine Nullmenge.

- *Schritt 2:*

Den Fall einer C^1 -Abbildung $T: U \rightarrow V$ führt man auf den Fall einer (Lipschitz-) stetigen Abbildung auf kompakten Mengen zurück, da nach dem Schrankensatz die C^1 -Abbildung auf jedem kompakten Würfel W_k Lipschitz-stetig ist.

- *Schritt 3:*

Man schätzt nun in mehreren Schritten die Änderung des Volumens kompakter Mengen unter dem Diffeomorphismus ab und findet: ist $K \subseteq U$ kompakt und der Rand ∂K eine Nullmenge, so gelten die Abschätzungen

$$\left(\min_{x \in K} |\det dT_x| \right) v(K) \leq v(T(K)) \leq \left(\max_{x \in K} |\det dT_x| \right) v(K).$$

- *Schritt 4:*

Unter dem *Träger* $\text{supp}(h)$ einer Funktion h auf einem metrischen Raum X versteht man die abgeschlossene Hülle der Menge derjenigen Punkte, in denen h nicht verschwindet:

$$\text{supp}(h) := \overline{\{x \in X | h(x) \neq 0\}}$$

Wir zeigen nun, dass der Transformationssatz für Treppenfunktionen φ mit Träger in der offenen Teilmenge V gilt.

Wegen Linearität genügt es, die Aussage für die charakteristische Funktion eines kompakten Quaders $Q \subseteq V$ zu zeigen. Mit $S := T^{-1}$ ist also zu zeigen:

$$\int_{S(Q)} |\det(dT_x)| \, dx = \int_Q 1 \, dy = v(Q) \quad (*).$$

Der Integrand des linken Integrals ist nach Voraussetzung stetig und daher über Q integrierbar.

Sei $\varepsilon > 0$. Da die Funktion $|\det dS|^{-1}$ auf Q gleichmäßig stetig ist, existiert eine Zerlegung von Q in kompakte Quader Q_i , die höchstens Randpunkte gemeinsam haben und so klein sind, dass

$$\max_{y \in Q_i} |\det dS_y|^{-1} - \min_{y \in Q_i} |\det dS_y|^{-1} \leq \varepsilon.$$

Auf $K_i := S(Q_i)$ gilt dann wegen $S = T^{-1}$

$$\max_{x \in K_i} |\det dT_x| - \min_{x \in K_i} |\det dT_x| \leq \varepsilon.$$

Durch Summation über alle Quader Q_i erhält man dann mit Schritt 3, dass

$$\left| \int_{S(Q)} |\det(dT_x)| \, dx - v(Q) \right| \leq \varepsilon v\left(\bigcup_i K_i\right)$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung (*).

- *Schritt 5:*

Sei f integrierbar über die offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Treppenfunktion ψ mit $\|f_V - \psi\|_1 < \varepsilon/2$. Wegen der punktweisen Ungleichung $|f_V - 1_V \psi| \leq |f_V - \psi|$ gilt dann auch

$$\|f_V - 1_V \psi\|_1 < \varepsilon/2.$$

Man überlegt sich nun, dass man seinerseits $1_V \psi$ durch eine Treppenfunktion φ mit Träger in V approximieren kann, so dass $\|1_V \psi - \varphi\|_1 \leq \varepsilon/2$.

Damit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion φ mit Träger in V und mit

$$\|f_V - \varphi\|_1 < \varepsilon.$$

- *Schritt 6:*

Nach Schritt 5 können wir f durch eine Folge (φ_k) von Treppenfunktionen mit Träger in V approximieren. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir nach dem Satz von Riesz-Fischer 1.4.3 annehmen, dass (φ_k) auch außerhalb einer Nullmenge N punktweise gegen f geht.

Wir setzen

$$\tilde{\varphi}_k := (\varphi_k \circ T) \cdot |\det dT| \text{ und } \tilde{f} := (f \circ T) \cdot |\det dT|.$$

Aus Schritt 4 folgt, dass die Funktionen $\tilde{\varphi}_k$ über U integrierbar sind. Da für diese Funktionen nach Schritt 4 der Transformationssatz gilt, finden wir

$$\|\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_\ell\|_1 = \int_U |\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_\ell| dx \stackrel{\text{Schritt 4}}{=} \int_V |\varphi_k - \varphi_\ell| dy = \|\varphi_k - \varphi_\ell\|_1.$$

Somit ist die Folge $(\tilde{\varphi}_k)$ eine Cauchy-Folge, die auch noch punktweise auf $U \setminus T^{-1}(N)$ gegen $\tilde{f}$ geht. Aber nach Schritt 2 ist auch $T^{-1}(N)$ eine Nullmenge.

Somit können wir aus dem Satz von Riesz-Fischer 1.4.3 schließen, dass die Grenzfunktion $\tilde{f}$ integrierbar ist und dass

$$\int_U \tilde{f} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U \tilde{\varphi}_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_V \varphi_k dy = \int_V f(y) dy.$$

□

Bemerkungen 1.5.14 (Anwendung: Integration in Polarkoordinaten).

- Wir hatten bereits Polarkoordinaten für $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ eingeführt. Polarkoordinaten haben eine große rechnerische Bedeutung: durch sie wird die Integration über eine Kugelschale auf die Integration über einen Produktraum zurückgeführt, auf dem wir den Satz von Fubini 1.5.5 anwenden können.
- Für den $\mathbb{R}^2$ sind Polarkoordinaten durch den lokalen Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} P_2: \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus S \\ (r, \varphi) &\mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $S := \{(x_1, 0) \mid x_1 \leq 0\}$ gegeben, dessen Bild also der entlang der negativen x -Achse “geschlitzte” $\mathbb{R}^2$ ist.

- Polarkoordinaten auf dem $\mathbb{R}^3$ sind durch den Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} P_3: \mathbb{R}_+ \times \underbrace{(-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}_{\Pi_3} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus N \\ (r, \varphi, \theta) &\mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $N := S \times \mathbb{R}$ definiert. Das Bild ist der entlang der Halbebene $x \leq 0, y = 0$ geschlitzte $\mathbb{R}^3$.

- Für den $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachten wir nun induktiv Abbildungen

$$P_{n+1}: \underbrace{\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}_{=: \Pi_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \text{Nullmenge}$$

$$(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \mapsto \begin{pmatrix} P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cos \varphi_n \\ r \sin \varphi_n \end{pmatrix}$$

Man zeige als Übungsaufgabe, dass dies ein Diffeomorphismus ist.

- Für konstanten Radius r erhalten wir Sphären. Etwa für Radius $r = 1$ in Dimension $n = 4$ die 3-Sphäre

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

- Wir brauchen auch die Determinanten der Differentiale: in Dimension $n = 2$ erhalten wir für die Jacobi-Matrix:

$$dP_2 = \begin{pmatrix} \partial_r(r \cos \varphi) & \partial_\varphi(r \cos \varphi) \\ \partial_r(r \sin \varphi) & \partial_\varphi(r \sin \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det(dP_2) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Man zeigt dann für $n \geq 3$ (ÜA):

$$\det dP_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \det dP_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \cdot r \cos^{n-2}(\varphi_{n-1});$$

daraus folgt dann rekursiv

$$\det dP_n = r^{n-1} \cdot C(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \text{ mit } C(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) := \cos^1 \varphi_2 \cdot \cos^2 \varphi_3 \cdot \dots \cdot \cos^{n-2} \varphi_{n-1}.$$

- Speziell kann man wegen $\det dP_3 = r^2 \cos \underbrace{\varphi_2}_{\theta}$ das Kugelvolumen $v(B_R^3(0))$ der dreidimensionalen Vollkugel folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} v(B_R^3(0)) &= \int_{B_R(0)} 1 dx = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta \, d\theta d\varphi dr \\ &= \int_0^R r^2 dr \cdot 2\pi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Korollar 1.5.15.

1. Sei $I \subseteq [0, \infty)$ ein Intervall und

$$K(I) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \in I\}$$

die zugehörige Kugelschale im $\mathbb{R}^n$.

Dann ist eine Funktion $f: K(I) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf der Kugelschale genau dann integrierbar, wenn $f(P_n(r, \varphi)) \cdot r^{n-1} C(\varphi)$ auf $I \times \Pi_n \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt nach dem Transformationssatz 1.5.10 und dem Satz von Fubini 1.5.5

$$\int_{K(I)} f(x) dx = \int_I \left(\int_{\Pi_n} f(P_n(r, \varphi)) \cdot C(\varphi) r^{n-1} d\varphi \right) dr.$$

2. Ist speziell f rotationssymmetrisch, d. h. $f(P_n(r, \varphi)) = g(r)$, so ist die Funktion f auf der Kugelschale $K(I)$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $g(r)r^{n-1}$ auf dem Intervall I integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_{K(I)} f(x) dx = \int_I g(r) r^{n-1} dr \cdot \int_{\Pi_n} C(\varphi) d\varphi.$$

Betrachtet man hier den Spezialfall $f = 1$ und $I = [0, 1]$, so folgt mit $\kappa_n := v_n(B_1^n(0))$ dem Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel:

$$\kappa_n = \int_0^1 r^{n-1} dr \int_{\Pi_n} C(\varphi) d\varphi = \frac{1}{n} \int_{\Pi_n} C(\varphi) d\varphi.$$

Wir finden also für die rotationssymmetrische Funktion f

$$\int_{K(I)} f(x) dx = n\kappa_n \int_I g(r) r^{n-1} dr.$$

Beispiel 1.5.16 (Berechnung des Gauß-Integrals und $\Gamma(\frac{1}{2})$).

Wir rechnen durch Integration der rotationssymmetrischen Funktion $e^{-x_1^2 - x_2^2}$ über $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2 - x_2^2} dx = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr \\ &= \pi \int_0^\infty e^{-u} du = \pi, \end{aligned}$$

woraus $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ folgt. Zur Berechnung von $\Gamma(\frac{1}{2})$, siehe 0.1.10, bemerken wir $\int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du$, woraus auch $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ folgt.

Index

- L^1 -Cauchy-Folge, 46
- L^1 -Grenzwert, 46
- σ -Algebra, 34
- σ -kompakte Menge, 35

- Ausschöpfung, 37

- Borel-Algebra, 35

- Cantormenge, 38
- Cavalierisches Prinzip, 38
- charakteristische Funktion, 17

- Differentiationssatz, 54
- Dirichlet-Funktion, 16

- Ereignis, 35
- Ergebnisraum, 35

- Figur, 36
- Fläche, 13, 14
- Flächeninhalt, 36
- Fourier-Transformierte, 52, 53

- Gleichverteilung, 35

- Hüllreihe, 21
- Hyperfläche, 13

- Immersion, 13
- Indikatorfunktion, 17
- Inhalt, 22
- Integral einer Treppenfunktion, 19
- iteriertes Integral, 57

- Karte, 13
- Kegel, 39
- Kurve, 14

- Lebesgue-Integral, 28
- Lebesgue-integrierbar, 25
- lokal integrierbare Funktion, 51
- lokale Parametrisierung, 13

- Maß, 18, 34
- Maßraum, 35
- Majorante, 50
- Majorantenkriterium, 51
- messbar, 35, 36
- messbarer Raum, 35
- Modifikationssatz, 42

- Newton-Potential, 55
- Normalenvektor, 14
- Nullmenge, 40

- positiver Anteil einer Funktion, 27

- Quader, 18

- Satz von Beppo Levi, 48
- Satz von der majorisierten Konvergenz, 50
- Satz von der monotonen Konvergenz, 48
- Satz von Fubini, 56
- Satz von Lebesgue, 50
- Satz von Riesz-Fischer, 46
- Satz von Tonelli, 59
- sicheres Ereignis, 35
- Standardsimplex, 39
- Stetigkeitssatz, 53
- Submersion, 13

- Tangentialraum, 14
- Tangentialvektor, 13
- Träger, 64
- Treppenfunktion, 18

- unmögliches Ereignis, 35
- Untermannigfaltigkeit, 13

- Volumen, 18, 36

- Wahrscheinlichkeitsmaß, 35
- Wahrscheinlichkeitsraum, 35

- Zylinder, 39

Literatur

- [FL] Wolfgang Fischer und Ingo Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg, Wiesbaden, 2005
- [F3] Otto Forster, *Analysis 3*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011
- [H] Harro Heuser, *Funktionalanalysis*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006
- [H01] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis 1*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006
- [Koe] Max Koecher, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer, Grundwissen Mathematik, Band 2, 1983
- [K2] Konrad Königsberger, *Analysis 2*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2004
- [RS] Michael Reed und Barry Simon, *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972
- [R1] Reinhold Remmert, *Funktionentheorie 1*, Springer, Berlin/Heidelberg
- [T] Hans Triebel, *Höhere Analysis*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.
- [W] Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2007