Universität Hamburg
Janko Latschev
Leonardo García Heveling

Sommer 2025

Funktionentheorie

Übungsblatt 5

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P14) Zeigen Sie, dass das Bild einer nicht konstanten ganzen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

(P15) **a)** Gibt es einen Ball $B(0, r)$, in dem die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nz)}{n^2}$$

eine holomorphe Funktion definiert?

b) In welchem Gebiet um Null wird durch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nz)}{2^n}$$

eine holomorphe Funktion definiert?

(P16) Zeigen Sie, dass jedes Paar ganzer Funktionen f und g, welche die Gleichung

$$f^2 + g^2 = 1$$

erfüllen, von der Form $f(z) = \cos(h(z))$ und $g(z) = \sin(h(z))$ für eine geeignete ganze Funktion h sein muss!
Hinweis: Erinnern Sie sich daran, was Sie in Aufgabe (A14) bewiesen haben.

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 12.5. in der Vorlesung.

(A18) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ in Null die Taylorreihe

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \cdots$$

besitzt, und bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe!

(A19) Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Die Taylorreihe

$$T_0Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

der Funktion $Q(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ aus der Vorlesung im Punkt $z_0 = 0$ besitzt den Konvergenzradius 2π ($B_n = Q^{(n)}(0)$ sind die Bernoullizahlen).

b) Die Bernoullizahlen erfüllen für jedes $n > 0$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0.$$

c) Alle Bernoullizahlen sind rational und für $k \geq 1$ gilt $B_{2k+1} = 0$.

d) *(optional)* Für $k \geq 1$ gilt $\operatorname{sgn}(B_{2k}) = (-1)^{k+1}$, d.h. die geraden Bernoullizahlen haben alternierende Vorzeichen.

(A20) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Ist f eine ganze Funktion, so dass für $n \in \mathbb{N}$ stets $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ gilt, so folgt $f(z) = z$.

b) Ist $f : B(0,2) \to \mathbb{C}$ holomorph, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f(\frac{1}{n}) \neq \frac{1}{n+1}$.

c) Es existiert eine holomorphe Funktion $f : B(0,1) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, welche $f(z)^2 = z$ erfüllt.

d) Ist f eine ganze Funktion mit $f(n) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so folgt $f(z) = z^2$.

Siehe nächstes Blatt!

(A21) Sei $P(z)$ ein Polynom vom Grad $d \geq 1$ mit Nullstellen $z_1, \dots, z_d$ (mehrfache Nullstellen sind erlaubt, d.h. die z_k müssen nicht paarweise verschieden sein).

a) Beweisen Sie die Partialbruchzerlegung

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{z - z_k} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\overline{z - z_k}}{|z - z_k|^2}.$$

b) Zeigen Sie, dass jede Nullstelle von P' in der konvexen Hülle der z_k liegt, d.h. von der Form $w = \sum_k \lambda_k z_k$ mit $\lambda_k \in [0,1]$ und $\sum_k \lambda_k = 1$ ist.

(A22) *(optional)* Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\binom{z}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{z}{n} := \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n!} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie die binomische Formel in Reihenform, d.h. beweisen Sie, dass für $w \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+w)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} w^n. \tag{1}$$

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C}$ den Konvergenzradius der Binomialreihe

$$b_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} w^n.$$

c) Was können Sie über das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises sagen?