Universität Hamburg
Janko Latschev
Leonardo García Heveling

Sommer 2025

Funktionentheorie

Übungsblatt 3

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P7) Sind folgende Aussagen für jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und jede glatte Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ wahr?

a) $\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \int_\gamma \mathrm{Re}(f(z))\,dz.$

b) Aus $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \gamma([0,1])$ folgt $\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0.$

(P8) Beweisen Sie, dass eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ genau dann zusammenhängend ist, wenn zu je zwei Punkten $z_0, z_1 \in U$ eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,T] \to U$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(T) = z_1$ existiert.

(P9) Seien f und g holomorph auf $U \subset \mathbb{C}$, und sei $\gamma : [0,1] \to U$ ein (stückweise) stetig differenzierbarer Weg. Gilt in diesem Fall die Formel

$$\int_\gamma f(z)g'(z)\,dz = f(\gamma(1))g(\gamma(1)) - f(\gamma(0))g(\gamma(0)) - \int_\gamma f'(z)g(z)\,dz$$

für partielle Integration?

(P10) Finden Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ (reelle) Stammfunktionen für $u(x) = e^{ax}\cos(bx)$ und $v(x) = e^{ax}\sin(bx)$, indem Sie die komplexe Stammfunktion der komplexen Funktion $f(z) = e^{(a+ib)z}$ auf $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ einschränken.

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 28.4. in der Vorlesung.

(A9) Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere offene Menge. Zeigen Sie, dass $f(z) = \overline{z}$ auf U keine Stammfunktion besitzt, und zwar

a) mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Gleichungen.

b) mit Hilfe von Satz 2 aus Kapitel 2 der Vorlesung (Kriterien für die Existenz von Stammfunktionen).

(A10) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{\mathbf{i}t}$, die Standardparametrisierung des Einheitskreises.

a) Berechnen Sie für $k \in \mathbb{Z}$ das Integral $\displaystyle\int_\gamma z^k \, dz$.

Hinweis: Den Fall $k = -1$ haben wir bereits in der Vorlesung betrachtet.

b) Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Integral $\displaystyle\int_\gamma z^{-1} \left(z + z^{-1}\right)^{2n} \, dz$.

c) Bestimmen Sie aus dem Resultat von **b)** den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x) \, dx$.

(A11) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z) - 1| < 1$ für alle $z \in U$. Zeigen Sie, dass für jede glatte geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ gilt:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = 0.$$

(A12) **a)** Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x + iy) = 3xy + \mathbf{i}y^2$ von $z_0 = \mathbf{i}$ bis $z_1 = 2 - \mathbf{i}$

(i) entlang der linear parametrisierten Strecke γ_1 von z_0 nach z_1, und

(ii) entlang der Kurve $\gamma_2 : [1, 2] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = 2t - 2 + \mathbf{i}(1 + t - t^2)$.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_\gamma (z^2 + 1)^2 dz$ entlang der Zykloide $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a(t - \sin(t)) + \mathbf{i}a(1 - \cos(t))$.