

FUNKTIONENTHEORIE

Übungsblatt 1

Präsenzaufgaben für die Übung

(P1) Wieviele Lösungen $z \in \mathbb{C}$ besitzt die Gleichung

$$\cos(z) = 2025?$$

(P2) Sei $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche unter der Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ der Multiplikation mit $\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ entspricht. Wir nennen eine reell lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *komplex linear*, falls $AI = IA$, und *komplex anti-linear*, falls $AI = -IA$.

- a) Zeigen Sie, dass jede reell lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Zerlegung $A = A' + A''$ mit A' komplex linear und A'' komplex anti-linear besitzt.
- b) Was ist die darstellende Matrix von I bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$?
- c) Die darstellende Matrix von A bezüglich der Standardbasis sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen von A' und A'' !
- d) Was können Sie über A' und A'' sagen, wenn die Abbildung A reellen Rang 1 besitzt?

(P3) Wir hatten für komplexe Zahlen $a, z \in \mathbb{C}$ mit $a \notin (-\infty, 0]$ die Potenz definiert als

$$a^z := e^{z \log(a)},$$

wobei $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ der Hauptzweig des komplexen Logarithmus ist.

- a) Zeigen Sie an einem geeigneten Beispiel, dass die Gleichung

$$a^z \cdot b^z = (ab)^z$$

im Allgemeinen *nicht* gelten muss, selbst wenn beide Seiten definiert sind!

- b) Welchen Wert hat $\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$ mit unserer Definition?
- c) Welche anderen Werte für $\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$ sind durch die Wahl eines anderen Zweigs des Logarithmus noch möglich?

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 14.4. in der Vorlesung.

(A1) a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$:

(i) $\frac{1-2i}{1+\frac{1}{3}i}$ (ii) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{12}}$ (iii) $i^{(i)}$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^5 = 4 - 4i$!

c) Wieviele Elemente enthält die Menge $\left\{\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$?

(A2) Skizzieren Sie folgende Teilmengen $M_j \subset \mathbb{C}$:

- a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z| < 10\}$ d) $M_4 := \{z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq 2\}$
b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| + |z + i| < 4\}$ e) $M_5 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = \operatorname{Re}(z)\}$
c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) > 0\}$ f) $M_6 := \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + z - 3\bar{z} + 1 = 0\}$

Entscheiden Sie außerdem für jede dieser Mengen, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt und/oder kompakt ist!

(A3) Zeigen Sie, dass drei paarweise verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ genau dann ein gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ bilden, falls

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

gilt!

(A4) Zu $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{C}$ mit $\frac{|c|^2}{\alpha} > \delta$ betrachten wir die Teilmenge

$$M = M_{\alpha, \delta, c} := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z \bar{z} - \bar{c} z - c \bar{z} + \delta = 0\}.$$

Beweisen Sie:

- a) Ist $\alpha = 0$, so ist M eine Gerade in $\mathbb{C}$.
b) Ist $\alpha \neq 0$, so ist M ein Kreis in $\mathbb{C}$.
c) Umgekehrt lassen sich jede Gerade und jeder Kreis in $\mathbb{C}$ in dieser Form schreiben.