Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2024

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 1

Präsenzaufgaben

(P1)

a) Formulieren Sie den Satz über die Umkehrfunktion!

b) Formulieren Sie den Satz über implizite Funktionen!

c) Was sagt dieser Satz über folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$?

(i) $x^2 + y^2 = 1$

(ii) $x^3 + y^3 = 1$

(iii) $\sin(x)e^{x^{2023}} + \cos(y)e^{y^{2024}} - x^{2023}y^{2024} = 1$ in der Nähe von $(x_0, y_0) = (0,0)$

(P2) In der Vorlesung haben wir folgendes Beispiel betrachtet: $Y = \mathbb{R} \times \{0,1\}$, und $X = Y/\sim$, wobei

$$(t_1, n_1) \sim (t_2, n_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad (t_1, n_1) = (t_2, n_2) \text{ oder } t_1 = t_2 < 0 \text{ und } n_1, n_2 \text{ beliebig}$$

Für $n \in \{0,1\}$ betrachten wir die Einbettungen $\iota_n : \mathbb{R} \to X$, definiert als $\iota_n(t) = [(t,n)]$, und nennen eine Teilmenge $U \subseteq X$ genau offen, wenn $\iota_0^{-1}(U)$ und $\iota_1^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}$ sind. Beweisen Sie die in der Vorlesung gemachten Behauptungen:

a) Die beschriebenen offenen Teilmengen von X definieren in der Tat eine Topologie.

b) Jeder Punkt in X besitzt eine zu $\mathbb{R}$ homöomorphe Umgebung.

c) X ist kein Hausdorff-Raum.

(P3) Wann ist ein topologischer Raum M eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit?

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 11.4., in der Vorlesung

(A1) Beweisen Sie, dass die drei in der Vorlesung formulierten Charakterisierungen glatter Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension $0 \leq k \leq n$ in der Tat äquivalent sind:

a) Zu jedem Punkt $x \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $h : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ (mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen), so dass

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

b) Zu jedem Punkt $x \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine glatte Abbildung $\psi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, so dass für alle $p \in U \cap M$ die Ableitung $d\psi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ vollen Rang $n-k$ hat und $U \cap M = \psi^{-1}(0)$ gilt.

c) Zu jedem Punkt $x \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine offene Teilmenge $V^* \subseteq \mathbb{R}^k$ sowie eine glatte Abbildung $\varphi : V^* \to \mathbb{R}^n$, so dass für jedes $y \in V^*$ die Ableitung $d\varphi_y : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ vollen Rang k hat und φ die Menge V^* homöomorph auf $U \cap M$ abbildet.

(A2) Für $c \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$ definieren wir die Teilmenge

$$H^n_c := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = c\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

a) Skizzieren Sie H^2_1, H^2_0 und H^2_{-1}!

b) Verifizieren Sie, dass H^n_1 und H^n_{-1} für alle $n \geq 1$ glatte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n+1}$ sind!

c) Zeigen Sie, dass H^n_0 für $n \geq 1$ keine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist!

(A3) Sei $\mathcal{S} \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ der lineare Unterraum der symmetrischen Matrizen, und sei $F : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathcal{S}$ die Abbildung $F(A) := A^T A$.

a) Bestimmen Sie das Differential $DF : \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, n) \to \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, n)$ von F in einem Punkt $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$.

b) Zeigen Sie: Ist $A^T A = \mathbb{1}$, so ist DF_A surjektiv.

c) Schließen Sie hieraus, dass die orthogonale Gruppe

$$O(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie deren Dimension.