Name(n):

Dozent: Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke

Übungsleiter: Christian Gloy, BSc
Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke
Dr. Immanuel van Santen

Übungsgruppe:

Höhere Analysis

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 2 — Do, 20. Oktober 2016

Aufgabe 1 $(1 + 2 + 1$ Punkte$)$

Sei Ω eine nicht-leere Menge und $R := \mathbb{F}_2^\Omega$ die Menge aller Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{F}^2$ von Ω in den Körper $\mathbb{F}^2 = \{0, 1\}$. Zeigen Sie:

a) R ist mit den Verknüpfungen

$$(f \oplus g)(x) := f(x) \oplus g(x) \qquad \text{(Addition in } \mathbb{F}^2)$$
$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

ein kommutativer Ring mit 1.

b) Die Abbildung

$$\mathcal{P}(\Omega) \to R, \qquad A \mapsto \chi_A,$$

die einer Teilmenge $A \subset \Omega$ ihre charakteristische Funktion

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

zuordnet, ist bijektiv und es gilt

$$\chi_{A\Delta B} = \chi_A \oplus \chi_B, \qquad \chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$

für alle $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Hierbei ist $A\Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$. Daher wird $\mathcal{P}(\Omega)$ ein zu R isomorpher Ring, wenn man Δ als Addition und $\cap$ als Multiplikation einführt.

c) Eine Teilmenge $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann ein Ring im Sinne von Mengen wenn $\mathfrak{R}$ ein Unterring von $\mathcal{P}(\Omega)$ bezüglich der oben eingeführten Ringstruktur ist.

Aufgabe 2 $(2 + 2$ Punkte$)$

a) Sei Ω eine nicht-leere Menge und $\mathfrak{R}$ ein Ring auf Ω. Zeigen Sie:

– $\mathfrak{A} = \mathfrak{R} \cup \{A^c \mid A \in \mathfrak{R}\}$ ist die kleinste Algebra, die $\mathfrak{R}$ enthält.

– Ist $\mathfrak{R}$ ein σ-Ring, dann ist $\mathfrak{A}$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathfrak{A}$ enthält.

b) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt nirgends dicht, wenn die abgeschlossene Hülle von A keine nichtleeren offene Menge enthält. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt mager, wenn Sie als Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen geschrieben werden kann. Zeigen Sie: $\mathfrak{A} = \{A \subset X \mid A \text{ mager}\}$ ist ein σ-Ring.

Aufgabe 3 $(2 + 1 + 1$ Punkte)

Eine Menge $I \subset \mathbb{R}^n$ heißt halboffenes Intervall, falls es $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$I = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i = 1, \ldots, n\colon a_i \leq x_i < b_i\}.$$

Wir schreiben $I = [\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Eine Menge A, für die es endlich viele halboffene Intervalle $I_1, \ldots, I_m$, $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} I_i$$

ist, wird als *elementare Menge* bezeichnet.

Zeigen Sie:

a) Sind I_1, I_2 halboffene Intervalle, so ist $I_2 \setminus I_1$ eine elementare Menge.

b) Jede elementare Menge kann als disjunkte Vereinigung halboffener Intervalle dargestellt werden.

c) Die Menge $\mathcal{E}$ der elementaren Mengen ist ein Ring.

Aufgabe 4 $(3 + 1$ Punkte)

Für ein nichtleeres, halboffenes Intervall $I = [\mathbf{a}, \mathbf{b})$ setzen wir $\lambda(I) = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$ und $\lambda(\emptyset) = 0$.

a) Definieren Sie für $E \in \mathcal{E}$ die Größe $\lambda(E)$ auf sinnvolle Weise.

b) Zeigen Sie: $\lambda : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ ist ein Inhalt.