Name(n):

Dozent: Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke

Übungsleiter: Christian Gloy, BSc
Jun.-Prof. Dr. Klaus Kröncke
Dr. Immanuel van Santen

Übungsgruppe:

Höhere Analysis

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 12 — Do, 12. Januar 2017

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $K \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Sei $v : \partial K \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld. Für eine 2-fach stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ und $x \in \partial K$ sei $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$ und $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \mathrm{grad} f(x), v(x)\rangle$ die Richtungsableitung von f in Richtung v an der Stelle x. Zeigen Sie, dass für 2-fach stetig differenzierbare Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$ die Green'sche Formel

$$\int_K (f\Delta g - g\Delta f) d\lambda_n = \int_{\partial K} (f\frac{\partial g}{\partial v} - g\frac{\partial f}{\partial v}) dS$$

gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ schreiben wir $f = o(r^{-\alpha})$, wenn es es eine Konstante $K > 0$ gibt, sodass $|f(x)| \leq K \|x\|^{-\alpha}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Ist $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit

$$F_i = o(r^{-(\alpha-1)}) \qquad \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = o(r^{-\alpha}),$$

für ein $\alpha > n$, dann gilt $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div} F d\lambda_n = 0$.

Aufgabe 3 ($2 + 2$ Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^l, wobei $l \in \mathbb{N}$.

a) Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt k-fach stetig differenzierbar (wobei $0 \leq k \leq l$), wenn es für jedes $x \in M$ eine Karte (U, ψ_U) mit $x \in \psi_U(U)$ gibt, sodass $f \circ \psi_U : U \to \mathbb{R}$ k-fach stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass das genau dann der Fall ist, wenn für jede Karte (V, ψ_V) von M die Funktion $f \circ \psi_V : V \to \mathbb{R}$ k-fach stetig differenzierbar ist. Wo geht hierbei die Voraussetzung an k ein?

b) Zeigen Sie Lemma 4.2.13: Eine Pfaff'sche Form w auf M ist genau dann k-fach stetig differenzierbar (wobei $0 \leq k \leq l-1$), wenn für jede Karte (U, ψ_U) die Koeffizienten w_i der Darstellung $w = \sum_{i=1}^m w_i dx_i$ bezüglich dieser Karte k-fach stetig differenzierbar sind. Wo geht hierbei die Voraussetzung an k ein?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktionen $f, g : S^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x, y, z) = x \cdot y$ und $g(x, y, z) = z$ (hierbei bezeichnen x, y, z die Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^3$) beliebig oft stetig differenzierbar auf S^2 sind. Drücken Sie außerdem die totalen Differentiale von f und g in allen lokalen Koordinaten aus, die Sie verwenden.

Abgabe bis zum 19.1.2017 um 12:15.