Lineare Darstellungen von Symmetrischen Gruppen

150 232 (Holtkamp) 2st., Mi 12.00-14.00, NA 2/24

Beispiel 1. *Freies Monoid über Alphabet X*

Beispiel 2. $S_1, S_2, S_3, ...$

Satz 1. *(Bijektion zw. Partitionen von n und Konjugationsklassen von S_n)*

Satz 2. *($k_\lambda = ...$)*

Beispiel 3. *Triviale Darstellung, Sgn-Darstellung, Standard-Darstellung von S_n*

Beispiel 4. *Linksreguläre Darstellung ...*

Beispiel 5. $\mathbb{C}[\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \mathbf{n}]$

Beispiel 6. $\mathbb{C}[\underline{3}] = \mathbb{C}[\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}] \oplus \mathbb{C}[\mathbf{2} - \mathbf{1}, \mathbf{3} - \mathbf{1}]$ *als S_3-Modul.*

Satz 3. *(Maschke)*

Beispiel 7. $\mathbb{C}[\mathcal{H}], \mathcal{H} := \{H, (1,2)H, (1,3)H\}$, $H = S(\{2,3\}) \leq S_3$

Lemma 1. *(Schur)*

Beispiel 8. M^λ

Satz 4. $\mathbb{C}[S_n\{t^\lambda\}]$ *isomorph zur Restklassendarstellung von S_n bzgl. S_λ.*

Beispiel 9. *Fixpunkte zählen...*

Satz 5. *(Charakter-Gleichungen erster Art [die Zeilen]).*

Beispiel 10. *Charaktertafel von S_3*

Satz 6. *Multiplizitäten in $\mathbb{C}[G]$.*

Satz 7. *(Charakter-Gleichungen der zweiten Art: die Spalten)*

Satz 8. $d_G^{(i)} \otimes d_H^{(j)}$ *eine vollständige Liste aller irreduziblen $G \times H$-Moduln.*

Beispiel 11. *Was ist $d_G = 1 \uparrow^G$, z.B. $1 \uparrow^G ((1,2))$?*

Satz 9. *(Induzierte Darstellung)*

Satz 10. *(Reziprozitätsgesetz von Frobenius)*

Satz 11. *(Geissinger-Bialgebra)*

Beispiel 12. S^λ

Satz 12. *(Untermodul-Theorem von James)*

Satz 13. *vollständige Liste der irreduziblen S_n-Moduln (über $\mathbb{C}$)*

Satz 14. *(Robinson-Schensted)*

Satz 15. *(Knuth)*

Satz 16. *SYT^R als Vereinigung von koplaktischen Klassen in S_n.*

Beispiel 13. *(Halbgruppenbialgebra)*

Satz 17. *(Hopfalgebra von Malvenuto-Reutenauer)*

Beispiel 14. *(Koplaktische und Rahmen-Bialgebra)*

Satz 18. *(Jöllenbeck-Epimorphismus)*

9 Nichtkommutative Charaktertheorie der symmetrischen Gruppen

Definition.
Sei M ein S_n-Modul, $\chi : S_n \to \mathbb{C}$ der zugehörige Charakter.
Die Urbilder von χ bezüglich des Epimorphismus $c : \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ heißen **nichtkommutative Charakter** *(von M).*

[Anmerkung:
Algebra $\Lambda = \mathbb{C}[m_\lambda]$ der symmetrischen Funktionen $m_\lambda = \sum_i x_{i_1}^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_l}^{\lambda_l}$: Strukturkonstanten bzgl. Schur-Funktionen s_λ identisch mit Littlewood-Richardson-Koeffizienten, d.h. diese entsprechen den Charakteren ζ^λ.
Analog zur nichtkommutativen Charaktertheorie geht man zu
“nichtkommutativen symmetrischen Funktionen“über.]

Beispiel 15. *(Nichtkommutative Charakter)*

(i) *Sei* $\Xi^n := Z^{(n)} = \mathrm{id}_n \in S_n$.
Es ist $c(\Xi^n)(K_\nu) = (\Xi^n, \omega_\nu)_{\mathcal{P}} = (\mathrm{id}_n, \omega_\nu)_{\mathcal{P}}$ *der Koeffizient von* $12...n$ *in* ω_ν *(für alle* $\nu \vdash n$*).*
Da $\omega_n = Z^{(n)} - Z^{(n-1).1} + ...$, *ist dieser Koeffizient 1 für* $\nu = (n)$. *Es folgt dann auch für* $\nu = \nu'.\nu_l = \nu_1...\nu_l, l > 1$, *dass (unter Benutzung der Selbstdualität von* $\mathcal{P}$*):*
$(\Xi^n, \omega_{\nu'.\nu_l})_{\mathcal{P}} = (\Delta(\mathrm{id}_n), \omega_{\nu'} \otimes \omega_{\nu_l})_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} = (\sum_k \mathrm{id}_{n-k} \otimes \mathrm{id}_k, \omega_{\nu'} \otimes \omega_{\nu_l})_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} = (\mathrm{id}_{n-\nu_l} \otimes \mathrm{id}_{\nu_l}, \omega_{\nu'} \otimes \omega_{\nu_l})_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} = (\Xi^{n-\nu_l}, \omega_{\nu'})_{\mathcal{P}} = 1.$
Es ist also Ξ^n *der* **nichtkommutative triviale Charakter** *von* S_n.

(ii) *Für* $\nu = \nu_1.....\nu_l$ *Zerlegung von* n *sei*

$$\Xi^\nu := \Xi^{\nu_1} \star \Xi^{\nu_2} \star ... \star \Xi^{\nu_l} \ [\in \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{Q}_n \subseteq kS_n].$$

(Skizze des zugehörigen Rahmens: $_{..\nu_1..}{}^{..\nu_2..}$ *usw.)*
Ist allgemein R *ein Rahmen mit* $n := |R|$, *so heißt* R *Horizontalstreifen, wenn die Projektion* $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto y$ *injektiv ist (oder äquivalent, wenn* $\mathrm{id}_n \in SYT^R$ *ist).*
Es ist $c(\Xi^\nu) = c(\Xi^{\nu_1}) \bullet c(\Xi^{\nu_2}) \bullet ... \bullet c(\Xi^{\nu_l}) = 1_{S_{\nu_1}} \bullet ... \bullet 1_{S_{\nu_l}} = \xi^\nu \in Cl(S_n)$ *der Young Charakter zu* ν, *siehe §5. Speziell ist* $\Xi^{1^n} = \sum_{\pi \in S_n} \pi$ *der* **nichtkommutative reguläre Charakter** *von* S_n.

(iii) *Analog sei* $\hat{\Xi}^n := Z^{(1^n)} = n.(n-1)....1 \in S_n$, *und* $\hat{\Xi}^\nu := \hat{\Xi}^{\nu_1} \star \hat{\Xi}^{\nu_2} \star ... \star \hat{\Xi}^{\nu_l}$.
(Skizze des zugehörigen Rahmens: $_{Spalte\nu_1}{}^{Spalte\nu_2}$ *usw.)*
Es ist $c(\hat{\Xi}^n) = sgn_n = \zeta^{1^n}$ *der 1-dimensionale Charakter mit* $sgn_n(K_\nu) = (-1)^{n-1}$ *für* $\nu = (n)$ *und* $= (-1)^{n-l}$ *für* $\nu = \nu_1...\nu_l \vdash n$.

Es gilt:
Sei R Rahmen und $\zeta^R := c(Z^R)$ [speziell $\zeta^\emptyset = c(\emptyset) = ch_\emptyset$].
Sind $\lambda, \mu \vdash n$, so kann man zeigen, dass

$$(Z^\lambda, Z^\mu)_{\mathcal{P}} = \begin{cases} 1 & : \lambda = \mu \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Deshalb bilden die Klassenfunktionen $c(Z^\nu), \nu \vdash n$ eine ON-Basis von $Cl(S_n)$.
Es handelt sich genau um die irreduziblen Charaktere ζ^ν (zugehörig zum Specht-Modul S^ν):
Stellt man die Young-Charaktere bzgl. der ON-Basis dar als

$$\xi^\lambda = \sum_\nu k_{\nu\lambda}\, c(Z^\nu),$$

bezüglich lexikographischer Anordnung der Partitionen mit der Matrix $(k_{\nu\lambda})_{\nu,\lambda\vdash n}$ (Kostka-Matrix), so erhält man (wieder) eine invertierbare Dreiecksmatrix über $\mathbb{Z}$ [s.u.]. Es folgt, dass alle ζ^ν Charaktere sind (nicht nur Klassenfunktionen), und wegen $(Z^\nu, Z^\nu)_{\mathcal{P}} = 1$ ist entweder $c(Z^\nu)$ oder $-c(Z^\nu)$ irreduzibel.

Es ist $c(Z^\nu)$ [nicht $-c(Z^\nu)$] irreduzibler Charakter, denn im regulären Charakter tritt $c(Z^\nu)$ auf mit Multiplizität

$$(Z^\nu, \Xi^{1^n})_{\mathcal{P}} = (\sum_{\sigma \in SYT^\nu} \sigma, \sum_{\pi \in S_n} \pi)_{\mathcal{P}} = |SYT^\nu| \geq 0.$$

[Wir haben damit erneut das Resultat erhalten, dass die Dimension (d.h. der Grad) der Irreduziblen ζ^ν durch $f_\nu = |SYT^\nu|$ gegeben ist!]

Zusatz zu Satz 13(!)(Regel von Young)
Die Einträge der Kostka-Matrix, die sogenannten **Kostka-Zahlen**, *sind gegeben durch*

$$k_{\nu\mu} = |ST^\nu(\mu)| := \text{ Anzahl der Standard Tableaux zu } R(\nu) \text{ mit Inhalt } \mu.$$

[vgl. §3: mit Wiederholungen, aber streng monoton steigend in den Spalten]

Hierbei ist der Inhalt des Tableaus bzw. des zugehörigen Worts (mit grösstem Eintrag m) die Komposition $\mu = \mu_1 ... \mu_m$, wobei $\mu_i \geq 0$ die Anzahl der Einträge i angibt.

[Dies gibt also eine kombinatorische Beschreibung der Multiplizitäten mit denen die Spechtmoduln S^ν in den Darstellungen M^μ auftreten.]

Bsp: $n = 6$
z.B. $k_{(6),\mu}$: 1 für alle $\mu \vdash 6$,
für $\nu = 4.2, \mu = 3.2.1$ ist $k_{\nu,\mu} = 2$, da genau zwei Standard Tableaux der Gestalt $R(\nu)$ mit Inhalt μ existieren, nämlich

1112 1113
23 22.

Beweis (Zusatz Satz 13):

Für jeden Rahmen R ist $(\Xi^n, Z^R)_{\mathcal{P}} = (Z^R, \mathrm{id}_n)_{\mathcal{P}} = \begin{cases} 1 & : R \text{ } n\text{-Horizontalstr.} \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$
$= |ST^R(n)|$.

Induktiv zeigt man nun
$(\Xi^{\mu_1 . \mu_2}, Z^R)_{\mathcal{P}} = (Z^R, \Xi^{\mu_1} \star \Xi^{\mu_2})_{\mathcal{P}} = (\Delta(Z^R), \Xi^{\mu_1} \otimes \Xi^{\mu_2})_{\mathcal{P}}$
$= \sum_{I \text{Ideal in } R} (Z^I, \Xi^{\mu_1}) \cdot (Z^{R \setminus I}, \Xi^{\mu_2}) = \sum_I |ST^I(\mu_1)||ST^{R \setminus I}(\mu_2)|$
$= |ST^R(\mu_1 . \mu_2)|$.

Definition.
Ein **Randhaken** *ist eine Gestalt R der folgenden Form:*

$$\underbrace{\begin{matrix} & & ..\nu_l... \\ & y..\nu_2..\cdots & \\ ..\nu_1..x & & \end{matrix}}_{l Zeilenhoch}$$

[als Pfad durch $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *: von jeder Zelle geht es entweder nach rechts oder nach oben weiter; in Skizze: pro Zeile* ν_i *Zellen].*

Äquivalent [mit Induktion über $|R|$ *um "hinreichend" z.z.]:*

R ist zusammenhängend (in dem Sinn dass R keine semidirekte Vereinigung von nichtleeren Untergestalten ist) und jede Teilmenge I, die mit y auch alle $\{x \in R : x \to y\}$ *enthält, ist konvex bezüglich* $\leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

Die **Beinlänge** $ll(R)$ *des Randhakens R wird definiert als* $l-1$
[Zeilenanzahl -1*].*

Satz 19. *(Murnaghan-Nakayama) Sei* $n \in \mathbb{N}_0$, $\mu \models m \in \mathbb{N}_0$ *und R Rahmen mit* $|R| = m+n$. *Dann gilt:*

$$\zeta^R(K_{\mu.n}) = \sum_{\binom{R\setminus I \, Randhaken \; mit \; n Zellen}{I Ideal}} (-1)^{ll(R\setminus I)}\zeta^I(K_\mu)$$

Beispiel 16. *Berechnung von* $\zeta^{R(4.4.3)}(K_{2.4.5})$*:*

Zwei mögliche Randhaken: $\binom{\;\;xx}{xxx}$ *mit ungerader Beinlänge* $[I:\;4.2]$ *und*

x
xx
xx *mit gerader Beinlänge* $[I:\;3.2.1]$.

Im ersten Schritt erhält man also $\zeta^{R(4.4.3)}(K_{2.4.5}) =$
$-\zeta^{R(4.2)}(K_{2.4}) + \zeta^{R(3.2.1)}(K_{2.4})$.

Im zweiten Schritt ist $\zeta^{R(3.2.1)}(K_{2.4}) = 0$, *da* 3.2.1 *keine 4-elementigen Randhaken hat.*

Andererseits $\binom{.xxx}{.x}$ *ist* $-\zeta^{R(4.2)}(K_{2.4}) = -\big(-\zeta^{1^2}(K_2)\big)$, *und man erhält den Wert* $(-1)^3 = -1$.

Übg:
$\zeta^{R(4.4.3\setminus 2)}(K_{3.2.2.2}) = \zeta^{R(4.4.1\setminus 2)}(K_{3.2.2}) - \zeta^{R(3.3.3\setminus 2)}(K_{3.2.2}) = ...[= -3]$.

Korollar: (Verzweigungsregel)

Für alle $\lambda \vdash n$ gilt:

$$\zeta^\lambda|_{S_{n-1}} = \sum_{\lambda^-} \zeta^{\lambda^-},$$

wobei die Summe sich über alle Partitionen λ^- erstreckt, die aus λ durch Weglassen einer (inneren) Ecke entstehen (vgl. § 7).

$$\zeta^\lambda \uparrow^{S_{n+1}} = \sum_{\lambda^+} \zeta^{\lambda^+},$$

wobei die Summe sich über alle Partitionen λ^+ erstreckt, die aus λ durch Hinzunahme einer äußeren Ecke entstehen.

Beweis des Korollars:

Man bentutzt die Regel von Murnaghan-Nakayama im Spezialfall $n = 1$, $\mu \vdash n-1$ und $\pi \in S_n$ vom Zykeltyp $\mu.1$:

Es ist für alle $\lambda \vdash n$:

$$\zeta^\lambda|_{S_{n-1}}(K_\mu) = \zeta^\lambda(K_{\mu.1}) = \sum_{\lambda^-} \zeta^{\lambda^-}(K_\mu).$$

Mit dem Reziprozitätsgesetz folgt:

$$\langle \zeta^\lambda \uparrow^{S_{n+1}}, \zeta^\mu \rangle = \langle \zeta^\lambda, \zeta^\mu|_{S_n} \rangle = \begin{cases} 1 & : \lambda = \mu^- \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1 & : \mu = \lambda^+ \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

□

Bsp: $\zeta^{2.1}|_{S_2}$: $(2) \oplus 1^2$ (abkürzende Schreibweise),
$(2) \uparrow^{S_3} = (3) \oplus 2.1$, $(1^2) \uparrow^{S_3} = 1^3 \oplus 2.1$.

Beweis des Satzes:

1) Sei $\mu = \emptyset$. Dann ist z.z.:

$$[\zeta^R(K_n) =]\ (Z^R, \omega_n)_{\mathcal{P}} = \begin{cases} (-1)^{\mathrm{ll}(R)} & : R \text{ Randhaken}, |R| = n \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}.$$

(Der Fall $|R| \neq n$ ist klar.)

Fall 1: Sei R mit $|R| = n$ nicht zusammenhängend (bzgl. $\leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$), also semidirekte Vereinigung von nichtleeren Rahmen G, H.
$(Z^R, \omega_n)_{\mathcal{P}} = (Z^G \star Z^H, \omega_n)_{\mathcal{P}} = (Z^G \otimes Z^H, \Delta(\omega_n))_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}}$
$= (Z^G \otimes Z^H, \omega_n \otimes \emptyset + \emptyset \otimes \omega_n)_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} = (Z^{\neq\emptyset}, \emptyset)_{\mathcal{P}} \cdot (...) = 0.$

Fall 2: Gegeben R mit $(\omega_n, Z^R)_{\mathcal{P}} \neq 0$, d.h. es existiert (eine Zahl k und) eine Permutation $\pi \in SYT^{(n-k).1^k}$ mit $\pi^{-1} \in SYT^R$; schreibe $\pi^{-1} = \hat{\alpha} \circ \iota_R$. Die Permutation π ist von der Form

$$\pi(1) > ... > \pi(k+1) = 1 < \pi(k+2) < ... < \pi(n),$$

eine sogenannte Talpermutation (mit Abstiegsmenge $\underline{k}$). Für solche Talpermutationen gilt: $\pi^{-1}(\underline{j})$ ist Intervall $i...l$ in $\underline{n}$, für alle $\underline{j} \subseteq \underline{n}$. (Wähle $i \in \underline{k+1}$ minimal mit $\pi(i) < j$, $l \in \underline{n} \backslash \overline{k}$ maximal mit $\pi(l) \leq j$.) Man beachte auch [wird noch nicht sofort gebraucht], dass:

$$\underbrace{i+1 \in \pi(\underline{k})}_{d.h. links\ von 1} \iff \pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(i+1) \tag{1}$$

Nun gilt: Der (zusammenhängende) Rahmen R ist ein Randhaken

$$\underbrace{..\nu_1..\frac{\square..\nu_2..^{\cdots^{...\nu_l...}}}{\square}}_{l Zeilen hoch}$$

denn:
Sei eine Teilmenge $I \subseteq R$, die mit y auch alle $\{x \in R : x \to y\}$ enthält, d.h. $I = \iota_R(\underline{j})$ für ein j. [Wir müssen Konvexizität bezüglich $\leq_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ zeigen.]
Da $\pi^{-1}(\underline{j}) = \hat{\alpha} \circ \iota_R(\underline{j}) = \hat{\alpha}(I)$ konvex bzgl. $\leq$ ist, ist auch I konvex [Monotonie von $\hat{\alpha}$].
Aus (1) läßt sich ablesen, dass für Talpermutationen π mit Abstiegsmenge $\underline{k}$ die Inverse π^{-1} Abstiege genau bei $i \in \{-1 + \pi(a) : a \in \underline{k}\}$ hat.
Es gibt genau eine Talpermutation σ, so dass σ^{-1} die Abstiegsmenge $A := \{\nu_1, \nu_1 + \nu_2, ..., \sum_{a=1}^{l-1} \nu_a\}$ hat [d.h. damit $\sigma^{-1} \in SYT^R$]. Somit ist:

$$(Z^R, \omega_n)_{\mathcal{P}} = \Big(Z^R, \sum_{\pi Talperm., k+1 = \pi^{-1}(1)} (-1)^k \pi\Big)_{\mathcal{P}} = (-1)^{\sigma^{-1}(1)-1} = (-1)^{\mathrm{ll}(R)}.$$

2) Sei nun $\mu \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned}
\zeta^R(K_{\mu.n}) &= (Z^R, \omega_\mu \star\ \omega_n)_{\mathcal{P}} = (\Delta(Z^R), \omega_\mu \otimes\ \omega_n)_{\mathcal{P}} \\
&= \sum_{I \text{Ideal in } R} (Z^I, \omega_\mu)_{\mathcal{P}} \cdot (Z^{R \backslash I}, \omega_n)_{\mathcal{P}} \\
&= \sum_{I:...} (-1)^{\mathrm{ll}(R \backslash I)} \zeta^I(K_\mu) \quad \text{nach 1)}
\end{aligned}$$

$\square$