Lineare Darstellungen von Symmetrischen Gruppen

150 232 (Holtkamp) 2st., Mi 12.00-14.00, NA 2/24

1

Beispiel 1. *Freies Monoid über Alphabet X*

Beispiel 2. $S_1, S_2, S_3, ...$

Satz 1. *(Bijektion zw. Partitionen von n und Konjugationsklassen von S_n)*

Satz 2. *($k_\lambda = ...$)*

2

Beispiel 3. *Triviale Darstellung, Sgn-Darstellung, Standard-Darstellung von S_n*

Beispiel 4. *Linksreguläre Darstellung ...*

Wiederholung:
$\mathbb{C}[\underline{\mathbf{n}}]$, VR mit Basis $\underline{n}$ als S_n-Modul: Standarddarstellung von S_n
$\mathbb{C}[S_n]$ Reguläre Darstellung von S_n.

Definition. *Sei V ein G-Modul.*

*Ein Untermodul W von V (auch G-***invarianter Unterraum*** genannt) ist ein Unterraum W mit $g\mathbf{w} \in W$ für alle $\mathbf{w} \in W \subseteq V, g \in G$.*

Bezeichnung: $W \leq V$.

Beispiel 5. *Die trivialen G-Untermoduln sind $W = V$ und $W = \{0\}$.*

Betrachtet man die (definierende oder) Standarddarstellung von S_n (s.o.), so ist $W = \mathbb{C}[\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \mathbf{n}]$ ein eindimensionaler Unterraum, der invariant ist unter der Aktion von S_n. Für $n \geq 2$ ist $\{0\} \neq W \neq V$, also W nichttrivialer S_n-Untermodul. (Allerdings ist W eine Kopie der trivialen Darstellung.)

[Analoges Beispiel: $W = \mathbb{C}[\sum_{\pi \in S_n} \pi] \leq$ reguläre Darstellung]

Sei $W = \mathbb{C}[\sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)\pi]$. Dann ist $W \leq \mathbb{C}[S_n]$ die sgn-Darstellung (man multipliziere $\sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)\pi$ mit $sgn(\sigma)\sigma$).

Z.B. S_3, zugehörige Matrixdarstellung: $(1, 2) \mapsto (-1)$, usw.

Definition.

Ein G-Modul $V \neq 0$ (bzw. die zugehörige Darstellung) heißt einfach oder **irreduzibel***, wenn V keine nichttrivialen Untermoduln hat. Andernfalls heißt er* **reduzibel***.*

Der G-Modul $V \neq 0$ (bzw. die zugehörige Darstellung) heißt halbeinfach oder **vollständig reduzibel***, wenn V geschrieben werden kann als direkte Summe $W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus ... \oplus W^{(k)}$ von irreduziblen G-Untermoduln, $k \geq 1$.*

Es gilt:

Der Modul V ist genau dann reduzibel, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ gibt, für die alle Matrizen $d(g)$, $g \in G$, von der Form $\binom{A\ C}{0\ B}$ sind, wobei alle $A = A(g)$ nichtleere quadratische Matrizen mit fester Größe $< \dim V$ (unabhängig von g), ebenso alle B, C.

Denn: (“nur dann“)Man ergänze die Basis $\mathbf{w_1}, ..., \mathbf{w_k}$ des nichttrivialen Untermoduls zu Basis $\mathcal{B}$ von V und erhält die gewünschte Form aufgrund der G-Invarianz. Umgekehrt findet man sofort den nichttrivialen G-Untermodul $W = \mathbb{C}[\mathbf{e_1}, ..., \mathbf{e_k}]$, wenn k die Größe der $A(g)$ ist. $\square$

Klar: $V = U \oplus W$ direkte Summe von G-Untermoduln genau dann, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ gibt, für die alle Matrizen $d(g)$, $g \in G$, von der Form $\binom{A\ 0}{0\ B}$ sind.

Beispiel 6. *Sei* $W = \mathbb{C}[\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}]$ *der (oben betrachtete) Untermodul der Standarddarstellung von* S_3*. Man ergänzt zur Basis* $\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ *von* $V = \mathbb{C}[\underline{3}]$*. Nun ist* $(1,2)(\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}) = \mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}, (1,2)\mathbf{2} = (\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}) - \mathbf{2} - \mathbf{3}$*,* $(1,2)\mathbf{3} = \mathbf{3}$*, also*
$d((1,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Weiterhin $d((1,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$*,* $d((2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*, usw.*

Es ist $\mathbb{C}[\underline{3}] = \mathbb{C}[\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}] \oplus \mathbb{C}[\mathbf{2},\mathbf{3}]$ *als Vektorraum aber nicht als* S_3*-Modul, da* $\mathbb{C}[\mathbf{2},\mathbf{3}]$ *kein* S_3*-Modul (z.B.* $(1,2)\mathbf{2} \notin \mathbb{C}[\mathbf{2},\mathbf{3}]$*).*

Lemma 1. *Sei* V *ein* G*-Modul,* W *ein* G*-Untermodul, und* $\langle .,. \rangle$ *ein* G*-invariantes Skalarprodukt (d.h.* $\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$*). Dann ist auch* $W^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle v, w \rangle = 0$ *für alle* $\mathbf{w} \in W\}$ *ein* G*-Untermodul.*

Denn: Für $u \in W^\perp$, $\langle gu, w \rangle = \langle g^{-1}gu, g^{-1}w \rangle = \langle u, g^{-1}w \rangle = 0$, da $g^{-1}w \in W$. □

Nun ist für $\mathbb{C}[\underline{3}]$ durch $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle := \delta_{ij}$ ein invariantes Skalarprodukt gegeben (da $\delta_{\pi(i),\pi(j)} = \delta_{ij}$ für alle Bijektionen π).

Es ist $\mathbb{C}[\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}]^\perp = \{\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{1} + \lambda_2\mathbf{2} + \lambda_3\mathbf{3} : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$.

Deshalb ist (z.B.) $\mathbb{C}[\underline{3}] = \mathbb{C}[\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}] \oplus \mathbb{C}[\mathbf{2}-\mathbf{1}, \mathbf{3}-\mathbf{1}]$ als S_3-Modul.

Die zugehörigen Matrizen sind:
$d((1,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d((1,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,
$d((1,2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, usw.

Satz 3. *(Maschke)*

Sei G *endliche Gruppe. Dann ist jede Darstellung von* G *mit Grad* > 0 *vollständig reduzibel.*

(Gilt auch, wenn $\mathbb{C}$ *ersetzt wird durch Körper* K *mit* $\mathrm{char} K$ *kein Teiler von* $|G|$*.)*

Beweis: Sei V ein G-Modul. Zu zeigen $V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus ... \oplus W^{(k)}$ Summe von irreduziblen G-Untermoduln.

Induktion über $n = \dim V$. Eindimendsionale Darstellungen sind irreduzibel, $V = W^{(1)}$. Sei nun $n > 1$ und V reduzibel.

1) Sei $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}$ eine Basis von V. Es gibt ein Skalarprodukt auf V mit $\langle \mathbf{v_i}, \mathbf{v_j} \rangle = \delta_{ij}$ (i.a. nicht G-invariant).

Es wird durch $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle' = \sum_{g \in G} \langle g\mathbf{v}, g\mathbf{w} \rangle$ ein G-invariantes Skalarprodukt definiert (denn: $\langle h\mathbf{v}, h\mathbf{w} \rangle' = \sum_{f=(gh) \in G} \langle f\mathbf{v}, f\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle'$).

2) Da V reduzibel existiert ein nichttrivialer G-Untermodul W, und $V = W \oplus W^{\perp}$ als G-Modul mit $W^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V : \langle v, w\rangle' = 0 \text{ für alle } \mathbf{w} \in W\}$. Nach Induktion sind W und $W^{\perp}$ vollständig reduzibel und V ist Summe von irreduziblen G-Untermoduln. □

Zusatz: Haben auch bewiesen, dass für jeden G-Modul V ein G-invariantes Skalarprodukt existiert. Somit existiert ON-Basis von V für die jede Matrix der Matrixdarstellung unitär ist, d.h. $d(g^{-1}) = \overline{d(g)}^{t}$.

Aufgaben der Darstellungstheorie:
* Zerlege gegebene Darstellungen in irreduzible.
* Klassifiziere alle irreduziblen Darstellungen
(bis auf Äquivalenz, d.h.Isomorphie von G-Moduln)

Definition. *Sei $H \leq G$ (d.h. H Untergruppe von G). Elemente $t_1, t_2, ..., t_k$ in G heißen Transversal für H, wenn $\mathcal{H} := \{t_1H, ..., t_kH\}$ eine Zerlegung von G in (Links-)Restklassen bzgl. H ist.*

Es gilt:
Seien $H \leq G$ Gruppen, $t_1, ..., t_k$ Transversal.
Es ist $\mathbb{C}[\mathcal{H}] = \mathbb{C}[t_1H, ..., t_kH]$ ein G-Modul (**Restklassen-Darstellung**) mit

$$g(c_1\mathbf{t_1H} + ... + c_k\mathbf{t_kH}) = c_1\mathbf{gt_1H} + ... + c_k\mathbf{gt_kH}.$$

Ist speziell $H = G$, so ist $\mathbb{C}[\mathcal{H}] \cong \mathbb{C}$ die triviale Darstellung.
Ist $H = \{1_G\}$, so ist $\mathbb{C}[\mathcal{H}] = \mathbb{C}[G]$ die linksreguläre Darstellung.
Bew.: (klar).

Beispiel 7. *In $G = S_3$ betrachten wir die Untergruppe*
$H = S(\{2,3\}) \times S(\{1\}) = \{\mathrm{id}, (2,3)\}$.
Dann ist $\mathcal{H} := \{H, (1,2)H, (1,3)H\}$ (gegeben durch) ein Transversal.
Wieder berechnet man $d((1,2))$ indem man $(1,2)$ auf die 3 Basiselemente von $\mathbb{C}[\mathcal{H}]$ anwendet, und erhält:
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *[allgemein wieder die Standard-Darstellung von S_3].*

Es gibt eine Äquivalenz $\theta : \mathbb{C}[\mathcal{H}] \to \mathbb{C}[\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}]$ (Standard-Darstellung); [siehe unten]

Lemma 2. *(Schur) Sei $0 \neq \theta : V \to W$ Homomorphismus von G-Moduln, und sei V irreduzibel. Dann ist $\theta(V)$ irreduzibel und $\theta : V \to \theta(V)$ ist Isomorphismus [$W = \theta(V)$, falls auch W irreduzibel].*

Speziell ($K = \mathbb{C}$): Die Endomorphismenalgebra End(V) ist $\{c \cdot \mathrm{id}_V : c \in \mathbb{C}\}$.

(Ist also d eine irreduzible Matrixdarstellung, so sind alle Matrizen T, die mit allen $d(g)$ kommutieren, von der Form $c \cdot 1_{m \times m}$, $m = \dim d$.)

Beweis:

1) Nach Voraussetzung ist $\ker\theta$ nicht ganz V, also $\ker\theta = 0$, da V irreduzibel.

2) Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen, gibt es einen Eigenwert c von θ, d.h. $0 \neq \ker(\theta - c\,\mathrm{id}_V)$. Da V irreduzibel, muss $\ker(\theta - c\,\mathrm{id}_V) = V$, also $\theta = c\,\mathrm{id}_V$ sein. □

Definition.

Sind $V^{(1)}, ..., V^{(k)}$ (bis auf Isomorphie) alle G-Untermoduln von V, paarweise nicht äquivalent, so schreiben wir $V \cong m_1 V^{(1)} \oplus ... \oplus m_k V^{(k)}$ (anstatt $V^{(1)} \oplus ... \oplus V^{(1)} \oplus ... \oplus V^{(k)} \oplus ... \oplus V^{(k)}$.) Die m_i heißen Multiplizitäten.

Es gilt:

Ist $d = d^{(1)} \oplus d^{(2)} = \begin{pmatrix} d^{(1)} & 0 \\ 0 & d^{(2)} \end{pmatrix}$ direkte Summe zweier irreduzibler nicht-äquivalenter Matrixdarstellungen der Dimensionen r_1, r_2, so sind Matrizen T, die mit allen $d(g)$ kommutieren, immer von der Form

$$T = \begin{pmatrix} c_1 \cdot 1_{r_1 \times r_1} & 0 \\ 0 & c_2 \cdot 1_{r_2 \times r_2} \end{pmatrix}$$

Denn: aus $Td(g) = d(g)T$ folgt für $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$ dass $T_{ij} d^{(j)} = d^{(i)} T_{ij}$.

Mit dem Lemma von Schur folgt die Behauptung.

Analog:

Das Zentrum $Z_{End(V)}$ (d.h. die Endomorphismen, die mit allen Endomorphismen von V kommutieren) ist isomorph zur Algebra der $k \times k$-Diagonalmatrizen (k = Anzahl der $V^{(i)}$ in der Definition).

3 Tableaux und Tabloide

Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist eine Halbordnung $\leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ ("Poset"-Struktur: reflexiv, antisymmetrisch, transitiv, aber nicht notwendigerweise immer $a \leq b$ oder $b \leq a$) und eine vollständige Ordnung $\rightarrow$ definiert:

$$
\begin{aligned}
(i,j) \leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} (k,l) &:\iff i \leq k \text{ und } j \leq l \\
(i,j) \rightarrow (k,l) &:\iff i > k \text{ oder } (i = k \text{ und } j \leq l).
\end{aligned}
$$

Definition.
Sei R enliche Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, Dann heißt R zusammen mit den Beschränkungen $\rightarrow_R$ und $\leq_R$ von $\rightarrow$ und $\leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ auf R eine **Gestalt** *(bzw. Form) in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*
Zwei Gestalten R, R' heißen isomorph, wenn es eine Bijektion $R \rightarrow R'$ gibt mit

$$x \leq_R y \iff x' \leq_{R'} y' \text{ und } x \rightarrow_R y \iff x' \rightarrow_{R'} y'$$

Matrizen-artige Notation (Ferrer-Diagramm):
in Zeile i, Spalte j zeichne Zelle (Kreis, Kästchen,...), wenn $(i,j) \in R$.

$$\begin{array}{cccc} & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & & \bullet \end{array}$$

Keine Anfangskoordinate nötig, denn für jedes $z \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist die Abbildung $+z : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + z_1, x_2 + z_2)$ ordnungserhaltende Bijektion.

Für feste Zelle x, $x \leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} y$ für alle y, die schwach (d.h. gleiche Spalte erlaubt) rechts von und (zusätzlich) schwach unter x liegen.
Weiterhin ist $x \rightarrow y$ für alle y, die schwach über x liegen und, wenn sie in der gleichen Zeile liegen, auch schwach rechts von x liegen.

Es gilt:
Sei $\lambda \vdash n$. Dann ist $R(\lambda) := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \leq n \text{ und } j \leq \lambda_i\}$ konvex bzgl. $\leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, d.h. mit $x, z \in R$ ist auch jedes y mit $x \leq y \leq z$ in R.
Ist eine Gestalt R konvex bzgl. $\leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ so heißt R **Rahmen**.

Wenn $\tilde{\lambda}$ weitere Partition, so ist auch $R(\lambda\backslash\tilde{\lambda}) := R(\lambda)\backslash R(\tilde{\lambda})$ Rahmen.
Jeder Rahmen ist isomorph zu einem Rahmen der Form $R(\lambda\backslash\lambda_1)$.

Übung: (Rahmen, alle neun 3-elementigen)

$\bullet\bullet\bullet$,

$\bar{\bullet}\bullet\bullet$, ...

Ist $\lambda \models n$ (Zerlegung), so ist $R(\lambda)$ ebenso definiert (aber kein Rahmen).

Definition.

*Ein (verallgemeinertes) R-***Tableau** *über* $\mathbb{N}$ *ist eine Gestalt R zusammen mit einer Abbildung $R \to \mathbb{N}$ (d.h. einer Beschriftung der Kästchen des Ferrer-Diagramms mit Zahlen aus $\mathbb{N}$, Wiederholungen erlaubt); ein R-Young-Tableau ist eine Gestalt R zusammen mit einer Bijektion $R \to \underline{n}$ (wobei $n = |R|$).*

Ist t Tableau, so wird der Eintrag an der Stelle (i, j) auch mit $t_{i,j}$ bezeichnet.

Sei R eine Gestalt, $|R| = n$. Dann gibt es genau eine monotone (d.h. ordnungserhaltende) Bijektion $\iota_R : (\underline{n}, \leq) \to (R, \to)$.

Dem entspricht die kanonische Numerierung (Zeile für Zeile, von unten links beginnend):

  x x x
x   x
  3 4 5
1   2

Sei w ein Wort über dem Alphabet $\mathbb{N}$.

Definition.

Wenn $w = \alpha \circ \iota_R$ ist für eine monotone Abbildung $\alpha : (R, \leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}) \to (\mathbb{N}, \leq)$ mit:

$\alpha(x) < \alpha(y)$, wenn $x \neq y, x \leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} y, y \to x$, dann heißt w (oder das zugehörige Tableau) **Standard Tableau der Gestalt** *R.*

Ist zusätzlich $w = \pi$ ein Element von S_n (mit $|R| = n$), so heißt π **Standard Young Tableau** *der Gestalt R. Die Bedingung lautet dann, dass die Bijektion $\pi \circ \iota_R^{-1} : R \to \underline{n}$ ordnungserhaltend ist bzgl. $\leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ (bzw. $\leq$).*

Beispiel 8. *Standard Young Tableaux zu*

  x x x
x   x

Man trägt die Werte $\pi(1), \pi(2), \ldots$ entsprechend der kanonischen Numerierung in R ein. Ordnungserhaltend heißt, dass für jede Zelle sowohl alle Einträge in folgenden Zeilen größer sind und ebenso alle Einträge rechts in der gleichen Zeile.

  1 2 3   *1 2 4*
4   5 , *3   5*

  1 3 4
2   5

  2 3 4
1   5

Also ist $\{45123, 35124, 25134, 15234\}$ *die Menge der zugehörigen Worte.*