Lösungsvorschlag zum Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Die erste Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, denn sie ist von der Form $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$, wobei $a_k = \frac{k}{k^2+1} \geq 0$ gilt. Wegen $\frac{k}{k^2+1} = \frac{1/k}{1+(1/k^2)}$ ist (a_k) eine Nullfolge, also brauchen wir nur noch zu zeigen, dass (a_k) ab einem bestimmten k monoton fällt. Für $k \geq 1$ ist $k^2 + k \geq 1$ und es folgt $k((k+1)^2+1) = k^3 + 2k^2 + 2k \geq k^3 + k^2 + k + 1 = (k^2+1)(k+1)$ und daher $a_k = \frac{k}{k^2+1} \geq \frac{k+1}{(k+1)^2+1} = a_{k+1}$.

Die zweite Reihe divergiert, da für $k \geq 0$ gilt $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \geq k^2 + 1$ und daher $\frac{k+1}{k^2+1} \geq \frac{1}{k+1}$; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ stellt eine divergente Minorante dar.

Die dritte Reihe konvergiert nach Quotientienkriterium, denn

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!}}{\frac{(k!)^2}{(2k)!}} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{k+1}{2(2k+1)} = \frac{1+(1/k)}{2(2+(1/k))} \to \frac{1}{4}$$

Die vierte Reihe divergiert schließlich: Für $k \geq 1$ ist $\frac{k}{2k^2+1} \geq \frac{k}{2k^2+2k^2} = \frac{1}{4k}$ und $\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert bereits.

Aufgabe 2

Zunächst bemerken wir, dass $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \exp(i\frac{2k\pi}{n}) = \exp(i\frac{2\pi}{n})^k$ gilt. Mit Hilfe der Summenformel für die endliche geometrische Reihe erhalten wir:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\exp(i\frac{2\pi}{n})^k = \frac{1-\exp(i\frac{2\pi}{n})^n}{1-\exp(i\frac{2\pi}{n})} = \frac{1-1}{1-\exp(i\frac{2\pi}{n})} = 0$$

Für das zu berechnende Produkt ergibt sich mit der auf dem Aufgabenzettel angegebenen Formel und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\exp\frac{2i\pi k}{n} = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right) = \exp\left(i\pi(n-1)\right) = (-1)^{n-1}$$

Aufgabe 3

$$\operatorname{Arsinh}'x = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh}x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh}x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{Arsinh}x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{aligned}((\tan^2 x + \exp(x\ln 2))^{\frac{1}{3}})' &= (\tan^2 x + \exp(x\ln 2))' \cdot \frac{1}{3}(\tan^2 x + \exp(x\ln 2))^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2\tan x(1+\tan^2 x) + (\ln 2)2^x}{3(\sqrt[3]{\tan^2 x + 2^x})^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{(\sin x)(\ln x)}{\sqrt{\cosh^2 x + x^2}}\right)' &= \frac{\left((\cos x)(\ln x) + \frac{\sin x}{x}\right)\sqrt{\cosh^2 x + x^2} - (\sin x)(\ln x)\frac{2\cosh x\sinh x + 2x}{2\sqrt{\cosh^2 x + x^2}}}{\cosh^2 x + x^2} \\ &= \frac{\left((\cos x)(\ln x) + \frac{\sin x}{x}\right)(\cosh^2 x + x^2) - (\sin x)(\ln x)(\cosh x\sinh x + x)}{(\cosh^2 x + x^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$$(x^{\frac{1}{x^2}})' = (\exp(\frac{\ln x}{x^2}))' = \exp(\frac{\ln x}{x^2})\left(-\frac{2\ln x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) = (x^{\frac{1}{x^2}})\frac{1}{x^3}(-2\ln x + 1)$$

Die Ableitung verschwindet genau dann, wenn $\ln x = \frac{1}{2}$, also $x = \sqrt{e}$ ist. Für $x > 0$ ist $(x^{\frac{1}{x^2}})\frac{1}{x^3} > 0$. Die Funktion $\ln x$ ist streng monoton wachsend, $1 < \sqrt{e} < \sqrt{e^2} = e$ und damit $(-2\ln 1 + 1) = 1 > 0$, $(-2\ln e + 1) = -1 < 0$, also macht die Ableitung um $x = \sqrt{e}$ einen Vorzeichenwechsel von + nach -, d.h. dort befindet sich ein lokales Maximum.

Aufgabe 4

Partielle Integration liefert:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\ln x\,dx = \ln x \ln x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx, \text{ also } \int \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2}\ln^2 x.$$

Alternativ führt die Substitution $u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}\,dx$ zum selben Ergebnis:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\ln^2 x$$

Verwendet man $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ und die Substition $u = \cos x,\ du = -\sin x\,dx$, so erhält man für das zweite Integral:

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx = -\int (1-u^2)\,du = -u + \frac{1}{3}u^3 = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$$

Mit $u = \sinh x,\ du = \cosh x\,dx$ ergibt sich für das dritte Integral:

$$\int \cosh x \cdot \sin(\sinh x)\,dx = \int \sin u\,du = -\cos u = -\cos(\sinh x)$$

Beim vierten integrieren wir zweimal partiell:

$$\int \cosh x \sin x\,dx = \sinh x \sin x - \int \sinh x \cos x\,dx = \sinh x \sin x - \cosh x \cos x - \int \cosh x \sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \sinh x \sin x - \cosh x \cos x = 2\int \cosh x \sin x\,dx \Rightarrow \int \cosh x \sin x\,dx = \frac{1}{2}(\sinh x \sin x - \cosh x \cos x)$$

Beim fünften Integral verwenden wir schließlich die Substitution $x = \sin u,\ dx = \cos u\,du,\ \arcsin x = u$ sowie $1 - \sin^2 u = \cos^2 u$:

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{2\sin^2 u}{\cos u}\cos u\,du = \int 2\sin^2 u\,du = u - \cos u \sin u = \arcsin x - x\sqrt{1-x^2}$$

wobei $2\int \sin^2 u\,du$ mit Hilfe partieller Integration berechnet wurde:

$$\int \sin^2 u\,du = -\sin u \cos u + \int \cos^2 u\,du = -\sin u \cos u + \int (1-\sin^2 u)\,du = -\sin u \cos u + u - \int \sin^2 u\,du$$