

# Graph Minors

Vorlesung von Nathan Bowler  
Aufschrieb von Raphael Jacobs (ohne jede Gewähr!)  
Korrektur von Florian Gut und Paul Knappe

23. Juli 2020

## Materialien

- Vorlesungen 'Graph Minors' zu diesem Skript von Nathan Bowler (<https://www.math.uni-hamburg.de/home/bowler/minoren/>)
- Video-Vorlesungen 'Graph Minors' von Jim Geelen (<https://www.math.uwaterloo.ca/~jfggeelen/C0749/lectures.html>)
- 'A new proof of the flat wall theorem' von Paul Wollan (<https://arxiv.org/pdf/1207.6927.pdf>)
- 'A generalisation of the Grid Theorem' von Geelen und Joeris (<https://arxiv.org/pdf/1609.09098.pdf>)

## 1 Einleitung zum Struktursatz

### 1.1 Die Aussage

**Definition 1.1.1.** Sei  $G$  ein Graph. Ein  $IG$  ist ein Graph, der aus einer Familie  $(B_g : g \in V(G))$  von zusammenhängenden Teilgraphen besteht, sodass es genau eine Kante zwischen  $B_g$  und  $B_{g'}$  gibt, wenn es in  $G$  eine Kante von  $g$  nach  $g'$  in  $G$  gibt. Die  $B_g$  heißen *Verzweigungsmengen*. Ein  $G$ -Minor in  $H$  ist ein  $IG$ , der ein Teilgraph von  $H$  ist. Wir sagen,  $G$  ist ein *Minor* von  $H$ , falls  $H$  einen  $G$ -Minor hat.

**Frage** (Leitfrage). *Wie sehen Graphen ohne  $K^t$ -Minor aus?*

- $t = 1$ : Leer.
- $t = 2$ :  $G$  besteht aus isolierten Ecken.
- $t = 3$ : Bäume, Wälder ( $K^3$ -Minor in  $G$  findet man als Kreis in  $G$ )

- $t = 4$ :  $\leq 2$ -Summen von Ecken, Kanten und Dreiecken. Jeder Block ist ein Series-Parallel Graph, also  $\leq 1 - \text{Sum}(\text{SERIES} - \text{PARALLEL})$ . Baumweite  $\leq 2$ .

**Definition 1.1.2.** Für Graphen  $G_1$  und  $G_2$  ist der Graph  $G$  eine  $k$ -Summe von  $G_1$  und  $G_2$ , falls:

- $|V(G_1) \cap V(G_2)| \leq k$ ;
- $V(G_1) \cap V(G_2)$  ist vollständig in  $G_1$  und  $G_2$ ;
- $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ ;
- $E(G) \supseteq E(G_1) \cup E(G_2) \setminus E(G_1 \cap G_2)$ ;
- $E(G) \subseteq E(G_1) \cup E(G_2)$ .

$G$  ist eine  $\leq k$ -Summe von  $G_1$  und  $G_2$ , falls er eine  $l$ -Summe ist mit  $l \leq k$ . Für  $\mathcal{G}$  eine Klasse von Graphen ist  $\leq k - \text{sum}(\mathcal{G})$  die Klasse von Graphen, die man aus Graphen in  $\mathcal{G}$  durch wiederholte Bildung von  $\leq k$ -Summen bauen kann.

**Bemerkung.** Series-Parallel Graphen werden wie folgt rekursiv konstruiert:

- $K^2$  ist Series-Parallel.
- Für  $G_1$  und  $G_2$  Series-Parallel mit jeweils zwei ausgezeichneten Ecken  $v_a^1, v_b^1$  und  $v_a^2, v_b^2$  sind die folgenden Graphen Series-Parallel:  $G_1$  und  $G_2$  werden aneinandergelinkt durch Identifizierung von  $v_b^1$  und  $v_a^2$  oder durch die Identifizierung von  $v_a^1$  und  $v_a^2$  sowie von  $v_b^1$  und  $v_b^2$ .

Ein Graph  $G$  ist auch genau dann Series-Parallel, wenn wir von  $G$  auf einen  $K^2$  kommen können durch eine Folge von Operationen der folgenden Typen:

- Entfernen von Unterteilungsecken,
- Kollabieren von parallelen Kanten.

**Definition 1.1.3.** Eine *Baumzerlegung* eines Graphen  $G$  besteht aus einem Baum  $T$  und einer Familie  $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in V(T)}$  von *Teilen*, sodass

- jede Ecke in einem Teil vorkommt;
- jede Kante in einem  $G[V_t]$  vorkommt;
- Falls  $v \in V_t \cap V_{t'}$  und  $t''$  auf  $tTt'$ , so gilt  $v \in V_{t''}$ .

Die *Weite* von  $(T, \mathcal{V})$  ist  $\max_{t \in V(T)} (|V_t| - 1)$ . Die *Baumweite* von  $G$  ist die minimale Weite einer Baumzerlegung von  $G$ . Für  $t \in V(T)$  ist der *Torso* an  $t$  der Graph auf  $V_t$ , deren Kanten die Kanten von  $G[V_t]$  sind, zusammen mit allen  $vw$ , sodass es  $t' \neq t$  gibt mit  $v, w \in V_t \cap V_{t'}$ . Die *Adhäsionsmenge*  $V_{tt'}$  für eine Kante  $tt'$  von  $T$  ist  $V_t \cap V_{t'}$ . Die *Adhäsion* von  $(T, \mathcal{V})$  ist die maximale Größe einer Adhäsionsmenge.

**Satz 1.1.4.**  $\leq k - \text{sum}(\mathcal{G})$  ist die Klasse von Graphen, die eine Baumzerlegung besitzen von Adhäsion  $\leq k$ , sodass alle Torsos in  $\mathcal{G}$  liegen.

*Beweis.* Übung auf dem 1. Übungsblatt. □

**Satz 1.1.5** (Wagner). Die Klasse von Graphen ohne  $K^5$ -Minor ist

$$\leq 3 - \text{sum}(\text{PLANAR} + V_8),$$

wobei  $V_8$  ein Kreis mit vier Diagonalen ist (entspricht dem Cayley-Graph von  $(\mathbb{Z}_8, +)$  mit erzeugender Menge  $\{\pm 1, \pm 4\}$ ).

**Definition 1.1.6.**  $\leq k - \text{apex}(\mathcal{G})$  ist die Klasse von Graphen  $G$ , sodass es  $X \subseteq V(G)$  mit  $|X| \leq k$  gibt, sodass  $G - X \in \mathcal{G}$ .

**Vermutung 1.1.7** (Jorgensen). Jeder 6-zusammenhängende Graph ohne  $K^6$ -Minor liegt in  $1 - \text{apex}(\text{PLANAR})$ .

**Definition 1.1.8.** Das  $k \times k$ -Gitter ist der Graph mit Eckenmenge  $[k]^2$  und einer Kante von  $(i, j)$  nach  $(i', j')$  genau dann, wenn  $|i - i'| + |j - j'| = 1$ .

**Satz 1.1.9** (Der Gittersatz). Zu jeder  $k \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $f(k) \in \mathbb{N}$ , sodass jeder Graph ohne  $k \times k$ -Gitter als Minor Baumweite  $\leq f(k)$  hat (, also in  $f(k) - \text{sum}$  (Größe  $\leq f(k) + 1$ ) liegt).

**Satz 1.1.10** (Erdős-Posa). Zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $f(k) \in \mathbb{N}$ , sodass jeder Graph ohne  $k \cdot K^3$ -Minor in  $f(k) - \text{apex}(\leq 1 - \text{sum}(K^1, K^2))$ .

**Lemma 1.1.11.** Sei  $\mathcal{G}$  eine Klasse von Graphen ohne  $K^6$ -Minor und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann hat kein Graph in  $\leq k - \text{sum}(\mathcal{G})$  ein  $K^t$ -Minor.

*Beweis.* Übung auf dem 1. Übungsblatt. □

**Bemerkung.** In obigem Lemma können wir  $k \leq t$  annehmen, da wir andernfalls keine vollständigen Minoren haben, entlang derer wir zusammenkleben können.

**Lemma 1.1.12.** Sei  $\mathcal{G}$  eine Klasse von Graphen ohne  $K^6$ -Minor und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann hat kein Graph in  $\leq k - \text{apex}(\mathcal{G})$  ein  $K^{t+k}$ -Minor.

*Beweis.* Angenommen, schon, und sei  $G \in \leq k - \text{apex}(\mathcal{G})$  mit  $IK^{t+k}$ -Teilgraph. Sei  $X \subseteq V(G)$  mit  $|X| \leq k$  und  $G \setminus X \in \mathcal{G}$ . Wenn wir alle Verzweigungsmengen aus dem  $IK^{t+k}$  löschen, die  $X$  treffen, kriegen wir ein  $IK^{t'}$  mit  $t' \geq t$ . □

**Tatsache 1.1.13.** Für jede Fläche  $S$  gibt es ein  $t$ , sodass  $K^t$  nicht in  $S$  einbettbar ist.

Gitter mit Wirbeln: Für jeden Knoten am Rand des Gitters wird an diesen ein kleiner vollständiger Graph angehängt. Je zwei solcher hinzugefügten Graphen werden vollständig verbunden, wenn zwischen ihren beiden Kontaktpunkten mit dem Gitter eine Kante im Gitter existiert. Die Idee ist, dass man, um große Minoren in einem Gitter mit Wirbeln zu finden, zwei disjunkte Wege im Gitter zwischen 4 alternierend angeordneten Punkten auf dem Rand finden muss, die es aber nicht gibt.

**Definition 1.1.14.** Sei  $C = v_1, \dots, v_k$  in einem Graphen  $G$ . Wir sagen, dass  $H$  durch *Einfügen eines Wirbels der Tiefe  $d$*  aus  $G$  gebaut wird, wenn  $H$  aus  $G$  besteht, zusammen mit, für  $1 \leq i \leq k$  und  $2 \leq j \leq d$ , einer neuen Ecke  $v_i^j$  (wir setzen  $v_i^1 := v_i$ ), und Kanten zwischen allen  $v_i^j$  und allen anderen  $v_{i'}^{j'}$  mit  $|i - i'| \leq 1 \pmod{k}$ .

Mit diesen Konstruktionen sind wir nun in der Lage den Struktursatz zu formulieren. Dabei gehen wir von Graphen aus, die "fast in eine Fläche eingebettet werden können. "Fast" meint hier "bis auf Wirbel", und zwar Wirbel entlang Kreisen, die in einer fixierten Einbettung Gebiete begrenzen. Diese Graphen sind sozusagen die "Hauptzutaten", die wir zusammensetzen wollen. Diese wollen wir nun zuerst definieren.

**Definition 1.1.15.** Sei  $S$  eine Fläche. Ein Graph  $G$  ist *bis auf  $n$  Wirbel der Tiefe  $d$  in  $S$  einbettbar*, wenn es einen Graphen  $G'$  gibt, der in  $S$  einbettbar ist, sodass man  $G$  aus  $G'$  durch Einfügen von nicht mehr als  $n$  Wirbeln der Tiefe  $\leq d$  entlang disjunkten gebietumrandenden Kreise von  $G'$  bauen kann.

Sei  $\mathcal{G}_n$  die Klasse von Minoren von Graphen, die in Flächen von Genus  $\leq n$  bis auf  $n$  Wirbel der Tiefe  $n$  einbettbar sind.

**Satz 1.1.16** (Der Struktursatz von Robertson & Seymour). *Zu jedem  $t \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $f(t) \in \mathbb{N}$ , sodass jeder Graph ohne  $K^t$ -Minor in*

$$\leq f(t) - \text{sum} (\leq f(t) - \text{apex} (\mathcal{G}_{f(t)}))$$

*liegt.*

Man kann diesen Satz informell so beschreiben: Jeder Graph ohne  $K^t$ -Minor liegt in einer Klasse von Graphen. Um diese Klasse von Graphen zu bauen, beginnen wir mit der Familie von Graphen  $\mathcal{G}_{f(t)}$ , die fast, d.h. bis auf einige Wirbel, in Oberflächen von Genus höchstens  $f(t)$  eingebettet werden kann. Dann haben wir die Möglichkeit, bis zu  $f(t)$  Punkte zu einem solchen Graphen hinzuzufügen und beliebig mit dem ursprünglichen Graph zu verbinden. Und schlussendlich dürfen wir solche Graphen als  $\leq f(t)$ -Summen aneinanderkleben, also entlang von kleinen vollständigen Teilgraphen.

## 1.2 Anwendungen

**Definition 1.2.1.** Eine *Präordnung* auf einer Menge  $X$  ist eine reflexive und transitive Relation auf  $X$ .

Eine Präordnung  $\preceq$  auf  $X$  ist eine *Wohlquasiordnung* (oder wqo), wenn es keine unendliche Folge  $(x_1, x_2, \dots)$  in  $X$  gibt mit  $x_i \preceq x_j$  für  $i \leq j$ .

**Tatsache 1.2.2.** Sei  $\preceq$  eine wqo auf  $X$ . Für jede nach unten abgeschlossene Teilmenge  $Y$  von  $X$  gibt es eine endliche Folge  $x_1, \dots, x_k$  in  $X$  mit  $Y = \{x \in X \mid \nexists i \in [k] : x_i \preceq x\}$ .

**Satz 1.2.3** (Der Minorensatz von Robertson & Seymour). *Endliche Graphen sind bezüglich der Minorenrelation wohlquasi geordnet.*

**Korollar 1.2.4.** *Es gibt nur abzählbar viele Klassen von endlichen Graphen, die unter Minoren abgeschlossen sind.*

**Satz 1.2.5** (Minorenprüfungssatz von Robertson & Seymour). *Zu jedem Graphen  $H$  gibt es einen  $O(n^3)$ -Algorithmus, womit man erkennen kann, ob ein Graph  $G$  einen  $H$ -Minor hat.*

**Bemerkung.** Inzwischen gibt es auch Algorithmen, die dieses Problem in  $O(n \log(n))$  lösen.

**Korollar 1.2.6** (Zugehörigkeitsprüfungssatz von Robertson & Seymour). *Zu jeder unter Minoren abgeschlossenen Klasse  $\mathcal{G}$  von Graphen gibt es einen  $O(n^3)$ -Algorithmus, womit man erkennen kann, ob ein Graph  $G$  in  $\mathcal{G}$  liegt.*

Dieser Satz erscheint auf den ersten Blick sehr mächtig. Allerdings hat er auch einige Probleme: Die Laufzeit des Algorithmus ist von der Klasse der ausgeschlossenen Minoren abhängig. Diese Klasse kann:

- sehr groß sein, z.B. für  $\leq 1 - \text{apex}$  (*PLANAR*) hat die Klasse mehr als 1000 Elemente (und ist unbekannt);
- unbekannt sein.

**Beispiel 1.2.7.** Ein Graph  $G$  heißt *knotenfrei einbettbar*, falls es eine Einbettung von  $G$  in  $\mathbb{R}^3$  gibt, sodass kein Kreis von  $G$  ein geknotetes Bild hat. Wir haben keine Ahnung, wie viele ausgeschlossene Minoren es gibt.

Der Zugehörigkeitssatz gibt uns also nur die Existenz eines schnellen Algorithmus, aber er gibt uns keine Möglichkeit, einen Algorithmus zu finden, oder festzustellen, ob ein Algorithmus korrekt ist. Um herauszufinden, ob eine Klasse von ausgeschlossenen Minoren korrekt ist, müssten wir nämlich untersuchen, ob diese Minoren in der Klasse sind - und genau dafür bräuchten wir wieder einen schnellen und korrekten Algorithmus...

## 2 Halsketten und der Gittersatz

### 2.1 Halsketten

**Definition 2.1.1.** Eine Menge  $U$  von Ecken eines Graphen  $G$  heißt  $\theta$ -zusammenhängend, wenn es zu je zwei Teilmengen  $X, Y \subseteq U$  mit  $|X| = |Y| \leq \theta$  eine Menge von  $|X|$  (ecken-)disjunkte  $X$ - $Y$ -Wege in  $G$  gibt.

**Bemerkung 2.1.2.**  $G$  ist  $\theta$ -zusammenhängend genau dann, wenn  $V(G)$  in  $G$   $\theta$ -zusammenhängend ist.

Eine Halskette sieht in etwa so aus: Es gibt Perlen, disjunkte zusammenhängende Graphen, die kreisförmig angeordnet sind. Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Perlen gibt es eine feste Anzahl an Kanten - mit Ausnahme einer Stelle, wo wir auch weniger Kanten haben können. (Dass wir nur an genau einer Stelle weniger Kanten haben, verringert die Anzahl der Wege entlang der Kette für alle Paare von Perlen gleichmäßig.) Innerhalb der Perlen gibt es jeweils disjunkte Wege, die die jeweils ein Paar von ein- und ausgehenden Kanten verbinden. An der schmalen Stelle fordert man dann entsprechend weniger solcher disjunkter Wege. Innerhalb der Halskette gibt es Ecken, die mit Nachbarn in allen Perlen haben.

**Definition 2.1.3.** Sei  $G$  ein Graph und sei  $N = (\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$ , wobei  $\mathcal{B}$  eine Folge  $(B_i : i \in \mathbb{Z}_n)$  von disjunkten Teilmengen von  $V(G)$ ,  $\mathcal{M}$  eine Folge  $(M_i : i \in \mathbb{Z}_n)$  von Teilmengen von  $E(G)$  und  $Z$  eine Teilmenge von  $V(G)$  ist. Die *Linksverbindungsfolge* von  $N$  ist  $\mathcal{X} = (X_i := B_i \cap V(M_{i-1}) : i \in \mathbb{Z}_n)$  und die *Rechtsverbindungsfolge* von  $N$  ist  $\mathcal{Y} = (Y_i := B_i \cap V(M_i) : i \in \mathbb{Z}_n)$ .  $N$  heißt  $(t, s, z, n)$ -Halskette, falls:

- (N1) Die  $B_i$  sind voneinander und von  $Z$  disjunkt.
- (N2)  $G[B_i]$  ist nicht leer, aber zusammenhängend für  $i \in \mathbb{Z}_n$ .
- (N3)  $M_1, \dots, M_{n-1}$  haben die Größe  $t$  und  $M_n$  hat Größe  $s$ .
- (N4) Für  $i \in \mathbb{Z}_n$  ist  $M_i$  eine Paarung von  $Y_i$  nach  $X_{i+1}$ .
- (N5) Für  $i \in \mathbb{Z}_n$  gibt es in  $B_i$   $\min(|X_i|, |Y_i|)$ -viele disjunkte  $X_i$ - $Y_i$ -Wege.
- (N6)  $|Z| = z$  und jedes Element von  $Z$  hat Nachbarn in allen  $B_i$ .

Die  $B_i$  heißen *Perlen* von  $N$ ,  $Z$  heißt die *Nabe* von  $N$  und  $n$  heißt die *Länge* von  $N$ . Eine  $(\theta; n)$ -Halskette ist eine  $(t, s, z, n)$ -Halskette mit  $t + s + z = \theta$ .

**Satz 2.1.4.** Sei  $N = (\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$  eine  $(\theta; n)$ -Halskette in  $G$  und  $U$  eine Menge, die aus genau einem Element jeder Perle besteht. Dann ist  $U$  in  $G$   $\theta$ -zusammenhängend.

*Beweis.* Angenommen nicht. Sei  $N$  eine  $(t, s, z, n)$ -Halskette mit  $t+s+z = \theta$ . Seien  $X, Y \subseteq U$  mit  $|X| = |Y| \leq \theta$ , sodass es keine Menge von  $|X|$ -vielen disjunkten  $X$ - $Y$ -Wegen in  $G$  gibt. Nach dem Satz von Menger gibt es eine Menge  $S$  mit  $|S| < |X|$ , die  $X$  von  $Y$  in  $G$  trennt.

Sei  $x \in X, y \in Y$ , sodass die Perlen  $B_x$  und  $B_y$ , die  $x$  bzw.  $y$  enthalten, von  $S$  disjunkt sind. Nun  $B_x \neq B_y$ , da alle Perlen zusammenhängend sind und  $S$  insbesondere  $x$  von  $y$  trennt. Es gibt  $\theta$  disjunkte  $B_x$ - $B_y$ -Wege ( $z$  durch die Nabe,  $t$  in einer Richtung um die Halskette und  $s$  in der anderen Richtung) und einer davon muss  $S$  vermeiden. Widerspruch.  $\square$

In diesem Kapitel werden wir eine Art Rückrichtung dieses Satzes zeigen:

**Satz 2.1.5** (Der Halskettensatz von Geelen und Joeris, 2016). *Für  $\theta, n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$ , sodass jeder Graph  $G$ , der eine  $\theta$ -zusammenhängende Menge  $U$  der Größe  $m$  enthält, auch eine  $(\theta; n)$ -Halskette enthält, in der jede Perle  $U$  trifft.*

*Beweis.* Später.  $\square$

Wir können benachbarte Perlen einer größeren Halskette zu größeren Perlen kontrahieren, ohne dass Eigenschaften der Halskette verloren gehen (abgesehen von der Länge). Dies kann hilfreich sein, um sicherzustellen, dass beispielsweise in Satz 2.1.5 jede Perle der Halskette  $U$  trifft.

**Definition 2.1.6.** Sei  $N = (\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$  eine  $(t, s, z, m)$ -Halskette. Sei  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = m$ . Dann ist

$$N \cdot (a_1, \dots, a_{n-1}) := \left( \left( \bigcup_{j=a_{i-1}+1}^{a_i} B_j : i \in \mathbb{Z}_n \right), (M_{a_i} : i \in \mathbb{Z}_n), Z \right)$$

eine  $(t, s, z, n)$ -Halskette, die wir *Kontraktion* von  $N$  zwischen  $a_1, \dots, a_{n-1}$  nennen.

**Definition 2.1.7.** Sei  $N = (\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$  eine  $(t, s, z, n)$ -Halskette. Die *Umkehrung* von  $N$  ist die  $(t, s, z, n)$ -Halskette

$$\left( (B_{n+1-i} : i \in \mathbb{Z}_n), (M_{n-i} : i \in \mathbb{Z}_n), Z \right).$$

**Definition 2.1.8.** Eine Halskette  $N$  *trägt* eine Halskette  $N'$ , falls jede Perle von  $N'$  eine Perle von  $N$  enthält. Eine Menge  $U$  *trägt* eine Halskette  $N$ , falls jede Perle von  $N$  die Menge  $U$  trifft.

**Bemerkung.** Tragen ist eine transitive Relation.

Nun beginnen wir mit dem Beweis des Halskettensatzes 2.1.5. Wir zeigen zunächst, dass es bei große Baumweite eine große hochzusammenhängende Teilmenge gibt. Zudem zeigen wir, dass man aus einer Halskette ein Gitter bauen kann. Wir führen den Beweis per Induktion über  $\theta$ .

## 2.2 Der Induktionsanfang

Eine  $(1, n)$ -Halskette ist entweder ein Stern mit  $n$  Blättern in  $U$  oder ein Kamm mit  $n$  Zinken in  $U$ . Der Induktionsanfang ist also ein endlicher Stern-Kamm-Satz. Die Beweisidee ist in etwa: Wir bauen einen Baum ausgehend von einer Wurzel. Dabei versuchen wir immer in eine Richtung zu gehen, wo noch viel von  $U$  liegt. So hofft man, dass entweder eine große Verzweigung (Stern) oder wenige Verzweigungen (Kamm) vorliegen.

**Lemma 2.2.1.** *Seien  $l, n \in \mathbb{N}$ . Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph und sei  $U \subseteq V(G)$  mit  $|U| > \frac{n^l - 1}{n - 1}$ . Sei  $v \in V(G)$ . Dann gibt es in  $G$  eine  $(0, 0, 1, n + 1)$ -Halskette (Stern), die  $U$  trägt, oder eine  $(1, 0, 0, l + 1)$ -Halskette  $(\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$  (Kamm) mit  $v \in B_{l+1}$ , die  $U$  trägt.*

*Beweis.* Induktion nach  $|V(G)|$ .

*Induktionsanfang:*  $G = \emptyset$ . Dann gilt  $U = \emptyset$ , nicht möglich.

*Induktionsschritt:* Falls  $l = 0$ :  $U$  ist nicht leer, also finden wir eine  $(1, 0, 0, 1)$ -Halskette mit  $v \in B_1$ , die  $U$  trägt, indem wir  $B_1 = V(G)$  wählen. Falls  $l > 0$ , gibt es drei Fälle:

1. *Es gibt eine Komponente  $K$  von  $G - v$ , die  $U$  enthält.*  
Sei  $v'$  ein Nachbar von  $v$  in  $K$ . Wir wenden die IH für  $l, n, K, U$  und  $v'$  an und fügen  $v$  ggf. in der Perle  $B_{l+1}$  hinzu.
2. *Es gibt eine Komponente  $K$  von  $G - v$  mit  $\frac{n^{l-1} - 1}{n - 1} < |K \cap U| < |U|$ .*  
Sei  $v'$  ein Nachbar von  $v$  in  $K$ . Wir wenden die IH für  $l - 1, n, K, U \cap K$  und  $v'$  an und fügen  $G - K$  ggf. als letzte Perle  $B_{l+1} = \{v\}$  hinzu.
3. *Für jede Komponente  $K$  von  $G - v$ , die  $U$  trifft, gilt  $|K \cap U| \leq \frac{n^{l-1} - 1}{n - 1}$ .*  
Dann ist die Anzahl von solchen Komponenten mehr als

$$\left( \frac{n^l - 1}{n - 1} - 1 \right) / \left( \frac{n^{l-1} - 1}{n - 1} \right) = \frac{n^l - n}{n^{l-1} - 1} = n.$$

Also bilden  $n + 1$  von diesen Komponenten die Perlen einer  $(0, 0, 1, n + 1)$ -Halskette mit Nabe  $\{v\}$ , die  $U$  trägt. □

**Korollar 2.2.2.** *Seien  $l, n \in \mathbb{N}$ . Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph. Sei  $N$  eine  $(0, 0, 0, m)$ -Halskette in  $G$  mit  $\frac{n^l - 1}{n - 1} < m$ . Dann gibt es in  $G$  eine  $(0, 0, 1, m + 1)$ - oder eine  $(1, 0, 0, l + 1)$ -Halskette, die  $N$  trägt.*

*Beweis.* Wir wenden Lemma 2.2.1 in dem Graphen an, wo wir alle Perlen von  $N$  kontrahiert haben. □

**Definition 2.2.3.** Eine  $(t, s, z, n)$ -Halskette heißt *aneinandergereiht*, falls  $t > 0$ .



**Lemma 2.2.4.** *Es gibt eine Funktion  $f : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ , sodass für  $\theta, l, n \in \mathbb{N}$  mit  $l, n \geq 2$  es für jeden Graphen  $G$ , jede  $\theta$ -zusammenhängende Menge  $U$  und jede von  $U$  getragene  $(0; m)$ -Halskette  $N$  mit  $m \geq f(\theta, l, n)$  eine von  $N$  getragene  $(0, 0, \theta, n + 1)$ - oder eine  $(1, 0, 0, l + 1)$ -Halskette gibt.*

*Beweis.* Wir setzen  $f(0, l, n) := n$  und für  $\theta > 0$  sei

$$f(\theta, l, n) := \frac{f(\theta - 1, l, n)^l - 1}{f(\theta - 1, l, n) - 1}.$$

Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach  $\theta$ . Der Induktionsanfang  $\theta = 0$  ist klar.

*Induktionsschritt:* Nach Korollar 2.2.2 gibt es eine von  $N$  getragene  $(1, 0, 0, l + 1)$ - oder  $(0, 0, 1, f(\theta - 1, l, n))$ -Halskette. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten Fall sei die Halskette  $(\mathcal{B}, \mathcal{M}, \{v\})$ . Wir wenden dann die IH für  $\theta - 1, l, n, G - v$  und  $(\mathcal{B}, \mathcal{M}, \emptyset)$  an und fügen  $v$  ggf. am Ende in die Nabe hinein.  $\square$

**Notation 2.2.5.**  $a \gg a_1, \dots, a_k$  in einer Aussage bedeutet, dass es eine Funktion  $f$  gibt, sodass das Argument funktionieren würde, wenn wir an dieser Stelle  $a \geq f(a_1, \dots, a_k)$  schreiben würden.

**Korollar 2.2.6.** *Sei  $G$  ein Graph und  $U$  eine  $\theta$ -zusammenhängende Menge in  $G$  mit  $|U| \gg \theta, l, n$ . Dann gibt es in  $G$  eine von*

- (i) *eine von  $U$  getragene  $(0, 0, \theta, n)$ -Halskette;*
- (ii) *eine  $(1, 0, 0, l)$ -Halskette, in der jede Perle mindestens  $\theta$  Elemente von  $U$  enthält.*

*Beweis.* Aus jeder  $(1, 0, 0, \theta l)$ -Halskette können wir durch Kontraktion eine Halskette wie in (ii) bauen. Also reicht  $|U| > f(\theta, \theta l, n)$  mit  $f$  der Funktion aus Lemma 2.2.4.  $\square$

**Satz 2.2.7** (Erdős-Szekeres). *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $X$  eine linear geordnete Menge. Dann enthält jede Folge  $(x_1, \dots, x_l)$  mit  $l \gg n$  von Elementen von  $X$  eine auf- oder absteigende Teilfolge der Länge  $n$ .*

**Lemma 2.2.8.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph. Sei  $U \subseteq V(G)$  mit  $|U| \gg m$ . Sei  $\leq$  eine lineare Ordnung auf  $U$ . Dann enthält  $G$  eine von*

- (i) *eine  $(0, 0, 1, n)$ -Halskette, die von  $U$  getragen wird.*
- (ii) *eine  $(1, 0, 0, n)$ -Halskette  $(\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$ , sodass es eine aufsteigende Folge  $u_1 < u_2 < \dots < u_n$  in  $U$  gibt mit  $u_i \in B_i$ .*

*Beweis.* Mit Lemma 2.2.1 finden wir eine  $(0, 0, 1, n)$ - oder  $(1, 0, 0, l)$ -Halskette  $(\mathcal{B}, CM, Z)$  mit  $l \gg n$ , die von  $U$  getragen wird. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten, sei  $v_1, \dots, v_l$  eine Folge in  $U$  mit  $v_i \in B_i$ . Nach dem Satz von Erdős-Szekeres 2.2.7 gibt es eine auf- oder absteigende Teilfolge  $u_1, \dots, u_n$ . Indem wir die Halskette ggf. umdrehen, können wir annehmen, dass die Folge aufsteigend ist. Also können wir eine passende Kontraktion von dieser Halskette nehmen.  $\square$

### 2.3 Lange Sprünge

**Definition 2.3.1.** Sei  $N = (\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$  eine Halskette in  $G$ . Ein  $N$ -Sprung ist ein  $\bigcup \mathcal{B} \cup Z$ -Weg. Ein  $N$ -Sprung heißt  $(i, j)$ -Sprung, falls die Endknoten in  $B_i$  bzw.  $B_j$  liegen. Ein  $(i, j)$ -Sprung heißt *lang*, falls  $|i - j| > 1$  (modulo die Länge von  $N$ ).  $N$  heißt *langsprunglos*, falls es keine langen  $N$ -Sprünge gibt.

**Lemma 2.3.2.** *Sie  $t, s, z \in \mathbb{N}$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $m \gg n$ . Dann hat jede  $(t, s, z, m)$ -Halskette  $N = (\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$  in einem Graphen  $G$  oder seine Umkehrung eine Kontraktion  $N'$  der Länge  $n$ , sodass eine der folgenden Optionen gilt:*

- (i)  $N'$  ist langsprunglos.
- (ii) Es gibt zu jedem  $i \in \mathbb{Z}_n$  einen  $(1, i)$ -Sprung.

*Beweis.* Wir nennen eine  $(t, s, z, l)$ -Halskette  $k$ -gut, falls für  $i \leq k$  es keinen  $(i, j)$ -Sprung gibt mit  $j \notin \{i - 1, i, i + 1, l\}$ .

**Behauptung.** Seien  $n', k \in \mathbb{N}$  und sei  $m \gg n, n', k$ . Dann hat jede  $(t, s, z, m)$ -Halskette  $M$  in  $G$  eine Kontraktion  $M'$ , sodass eine von:

- (i)  $M'$  hat Länge  $\geq n'$  und ist  $k$ -gut
- (ii)  $M'$  hat Länge  $\geq n$  und es gibt zu jedem  $i \in \mathbb{Z}_n$  einen  $(1, i)$ -Sprung für  $M'$ .

*Beweis.* Per Induktion nach  $k$ . Der Induktionsanfang  $k = 0$  ist klar.

*Induktionsschritt:* Mit der IH finden wir o.B.d.A. eine  $(k - 1)$ -gute Kontraktion  $M''$  von  $M$  mit einer Länge  $\gg n, k, n'$ . Sei

$$S = \{i \in \mathbb{Z}_n : k < i \text{ und es gibt einen } (k, i)\text{-Sprung für } M''\}.$$

Falls  $|S| \geq n$ , so finden wir eine Kontraktion von  $M''$  wie in (ii). Sonst finden wir nacheinanderfolgende Elemente  $i, j$  von  $S$  mit  $j - i \geq n'$ . Also finden wir eine Kontraktion von  $M''$  wie in (i).  $\square$

In der Behauptung setzen wir nun  $n' = k = (n + 1)^2$ . O.B.d.A. ist die Länge von  $M'$  nun genau  $n'$ . Sei

$$S = \{i \in \mathbb{Z}_n : i < n' \text{ und es gibt einen } (i, n') \text{-Sprung für } M'\}.$$

Falls  $|S| \geq n$ , so finden wir eine Kontraktion der Umkehrung von  $M'$  wie in (ii). Sonst finden wir eine Kontraktion von  $M'$  wie in (i).  $\square$

## 2.4 Langsprunglose Halsketten

**Lemma 2.4.1.** *Sei  $\mathcal{P}$  eine Menge von  $k$  disjunkten  $(X - X')$ -Wegen,  $\mathcal{Q}$  eine Menge von  $k$  disjunkten  $(Y' - Y)$ -Wegen und  $B_1, \dots, B_k$  eine Liste von  $k$  disjunkten zusammenhängenden Mengen, die alle Wege von  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$  treffen. Dann gibt es in  $H = \bigcup \mathcal{P} \cup \bigcup \mathcal{Q} \cup \bigcup_{i=1}^k G[B_i]$   $k$  disjunkte  $(X - Y)$ -Wege.*

*Beweis.* Angenommen. Nach dem Satz von Menger gibt es in  $H$  einen  $(X, Y)$ -Trenner  $S$  der Größe  $< k$ . Dann gibt es  $P \in \mathcal{P}$  und  $Q \in \mathcal{Q}$  und  $i \leq k$  mit  $S \cap (P \cup Q \cup B_i) = \emptyset$ , und es gibt einen  $X - Y$ -Weg in  $\bigcup \mathcal{P} \cup \bigcup \mathcal{Q} \cup G[B_i]$ . Widerspruch.  $\square$

**Lemma 2.4.2.** *Sei  $N = (\mathcal{B}, \{\emptyset\}, \emptyset)$  eine  $(0, 0, n)$ -Halskette ohne lange Sprünge oder  $(1, n)$ -Sprünge, aber sodass es  $k$  disjunkte  $(B_1 - B_n)$ -Wege gibt. Sei  $P_1, \dots, P_k$  eine Folge von  $k$  disjunkten  $(B_1 - B_n)$ -Wegen, die so wenig Kanten außerhalb  $\bigcup_{i=1}^k G[B_i]$  wie möglich benutzt. Sei  $1 \leq i \leq k$  und  $1 \leq a \leq b \leq n$  mit  $b \geq a + k - 1$ . Dann kommt kein Element von  $B_b$  vor einem Element von  $B_a$  auf  $P_i$ .*

*Beweis.* Angenommen schon. O.B.d.A. gilt  $i = k$ . Sei  $x \in P_k \cap B_a$  und  $y \in P_k \cap B_b$  mit  $y$  vor  $x$  auf  $P_k$ . Sei  $e$  eine Kante von  $yP_kx$ , die in keinem  $G[B_i]$  liegt. Sei  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_{k-1}, P_k y\}$  und  $\mathcal{Q} = \{P_1, \dots, P_{k-1}, xP_k\}$ . Nach Lemma 2.4.1 gibt es  $k$  disjunkte Wege von  $B_1$  nach  $B_n$  in  $\left(\bigcup_{i=1}^k P_i \cup \bigcup_{i=1}^k G[B_i]\right) - e$ , was der Minimalität von  $P_1, \dots, P_k$  widerspricht.  $\square$

**Lemma 2.4.3.** *Sei  $N = (\mathcal{B}, \{\emptyset\}, \emptyset)$  eine  $(0, 0, 0, (n-1)(k-1)+1)$ -Halskette ohne lange Sprünge oder  $(1, (n-1)(k-1)+1)$ -Sprünge, aber sodass es  $k$  disjunkte  $(B_1 - B_{(n-1)(k-1)+1})$ -Wege gibt. Dann gibt es eine von  $N$  getragene  $(k, 0, 0, n)$ -Halskette  $N' = (\mathcal{B}', \mathcal{M}', \emptyset)$ , sodass:*

- (i)  $B_{(j-1)(k-1)+1} \subseteq B'_j$ ,
- (ii) Für  $(j-1)(k-1)+1 \leq x \leq j(k-1)+1$  trifft  $B_x$  nur Perlen  $B'_y$  mit  $y \in \{j, j+1\}$ .

*Beweis.* Sei  $P_1, \dots, P_k$  eine Folge von  $k$  disjunkten  $(B_1 - B_{(n-1)(k-1)+1})$ -Wegen, die so wenig Kanten außerhalb von  $\bigcup_{i=1}^{(n-1)(k-1)} G[B_i]$  wie möglich enthalten. Für  $1 \leq i \leq k$  und  $1 \leq j \leq n$  sei  $x_{i,j}$  der erste Punkte von  $P_i$

in  $B_{(j-1)(k-1)+1}$ . Für  $1 \leq j < n$  sei  $B'_j = B_{(j-1)(k-1)+1} \cup \bigcup_{i=1}^k x_{i,j} P_i \dot{x}_{i,j+1}$  (also Teilstück von  $P_i$  bis  $x_{i,j+1}$ , aber ohne diesen Knoten). Nach Lemma 2.4.2 sind die  $B'_j$  disjunkt und sie bilden die Perlen der gewünschten Halskette.  $\square$

**Satz 2.4.4.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Seien  $t, s, z \in \mathbb{N}$ . Sei  $n' = n + 2(s - 1)$ . Sei  $N$  eine langsprunglose  $(t, s, z, 2t(n' - 1))$ -Halskette in  $G$ , sodass es zwischen je zwei Perlen  $t + s + z + 1$  disjunkte Wege gibt. Dann gibt es eine von  $N$  getragene  $(t + 1, s, z, n)$ - oder  $(t, s + 1, z, n)$ -Halskette.*

*Beweis.* Sei  $a := s + 2$  und  $b := a + t(n' - 1)$ . Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $z = 0$  gilt, in dem wir ggf. die Nabe von  $N$  löschen. Sei  $N := (\mathcal{B}, \mathcal{M}, \emptyset)$ . Da  $N$  langsprunglos ist, gibt es eine Separation  $(A, B)$  mit  $A \cap B = B_a \cup B_b$ ,  $B_1, \cup \dots \cup B_a \subseteq A$ ,  $B_a \cup \dots \cup B_b \subseteq B$  und  $B_b \cup \dots \cup B_{2t(n'-1)} \subseteq A$ . Sei  $\mathcal{P}_0$  eine Menge von  $s + t + 1$  disjunkten  $(B_a - B_b)$ -Wegen in  $G$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

1.  $t + 1$  Elemente von  $\mathcal{P}_0$  liegen in  $B$ .

Sei  $N' := (\mathcal{B}', \{\emptyset\}, \emptyset)$  die  $(0, 0, 0, b - a + 1)$ -Halskette in  $G[B]$  mit  $B'_i := B_{i+a-1}$ . Nach Lemma 2.4.3 gibt es eine  $(t + 1, 0, 0, n')$ -Halskette  $N'' = (\mathcal{B}'', \{\emptyset\}, \emptyset)$ , die von  $N'$  getragen wird, sodass:

- (i)  $B'_{(j-1)t+1} \subseteq B''_j$ ,
- (ii) Für  $(j - 1)t + 1 \leq x \leq jt + 1$  trifft  $B_x$  nur Perlen  $B''_y$  mit  $y \in \{j, j + 1\}$ .

Sei  $B'''_1 = \bigcup_{j=1}^s B''_j \cup \bigcup_{i=1}^{a+(s+1)t} B_i$ . Sei  $\mathcal{P}$  eine Menge von  $s$  disjunkten  $(Y''_1 - Y''_s)$ -Wegen in  $\bigcup_{j=1}^s B''_j$  und  $\mathcal{Q}$  eine Menge von  $s$  disjunkten  $(X_1 - Y_{a+(s+1)t})$ -Wegen in  $\bigcup_{i=1}^{a+(s+1)t} B_i$ . Nach Lemma 2.4.1 gibt es in  $G[B'''_1]$  eine Menge von  $s$  disjunkten  $(X_1 - Y''_s)$ -Wegen. Ähnlicherweise gibt es eine Menge von  $s$  disjunkten  $(X''_{n+s-1} - Y_{2t(n'-1)})$ -Wegen in  $B'''_n = \bigcup_{j=n+s-1}^{n'} B''_j \cup \bigcup_{i=a+(n+s-1)t}^{2t(n'-1)} B_i$ . Dann nehmen wir die Halskette:

$$((B'''_1, B''_{s+1}, \dots, B''_{n+s-2}, B'''_n), (M_s, \dots, M''_{n+s-2}, M_{2t(n'-1)}), \emptyset).$$

2.  $s + 1$  Elemente von  $\mathcal{P}_0$  liegen in  $A$ .

Falls  $s = t$ , so können wir dasselbe Argument anwenden mit  $A$  und  $B$  vertauscht. Also angenommen  $s + 1 \leq t$ . Sei  $\mathcal{P}$  eine Menge von  $s + 1$  disjunkten  $(B_{a-1} - B_{b+1})$ -Wegen in  $G \setminus B$ . Sei  $\mathcal{Q}$  eine Menge von  $s + 1$  disjunkten  $(X_1 - Y_{a-1})$ -Wegen in  $G \setminus B$ . Sei  $\mathcal{Q}'$  eine Menge von  $s + 1$  disjunkten  $(X_{b+1} - Y_{b+s})$ -Wegen in  $G \setminus B$ . Nach Lemma 2.4.1 für  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  und  $B_1, \dots, B_{s+1}$  gibt es eine Menge  $\mathcal{P}'$  von  $s + 1$  disjunkten  $(B_b - Y_{a-1})$ -Wegen in  $G \setminus B$ . Nach Lemma 2.4.1 für  $\mathcal{P}', \mathcal{Q}'$  und  $B_{b+1}, \dots, B_{b+s+1}$  gibt es eine Menge  $\mathcal{P}''$  von  $s + 1$  disjunkten  $(X_{b+1} - Y_{a-1})$ -Wegen in  $G \setminus B$ . Also bilden  $B_a, \dots, B_b \cup \bigcup \mathcal{P}''$  die Perlen einer  $(t, s + 1, 0, m)$ -Halskette mit  $m \geq n$ .

□

## 2.5 Viele lange Sprünge

**Lemma 2.5.1.** *Sei  $G$  ein Graph und seien  $t, s, z, n \in \mathbb{N}$  mit  $s > 0$ . Sei  $N$  eine  $(t, s, z, m)$ -Halskette mit  $m \gg n$ , sodass es für  $i \leq m$  einen  $(1, i)$ -Sprung gibt. Dann gibt es in  $G$  eine von  $N$  getragene  $(t + 1, s - 1, z, n)$ - oder  $(t, s - 1, z + 1, n)$ -Halskette.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{P}$  eine Menge von  $s$  disjunkten  $(X_1 - Y_1)$ -Wegen in  $B_1$ . Sei  $Q_i$  ein  $(1, i)$ -Sprung und sei  $v_i$  die Endecke von  $Q_i$  in  $B_i$ . Wir können  $Q_i$  durch  $B_1$  zu einem Weg  $Q'_i$  erweitert, der genau einen Weg aus  $\mathcal{P}$  trifft. Also gibt es  $P \in \mathcal{P}$ , sodass  $S := \{i \in \mathbb{Z}_m : Q'_i \cap P \neq \emptyset\}$   $M$  Elemente hat mit  $M \gg n$ . Sei  $H := P \cup \bigcup_{i \in S} Q'_i$  und sei  $U = \{v_i : i \in S\}$  als linear geordnete Menge betrachtet mit  $v_i \leq v_j$  falls  $i \leq j$ . Nach Lemma 2.2.8 gibt es in  $H$  eine  $(1, 0, 0, n)$ - oder  $(0, 0, 1, n)$ -Halskette  $(\mathcal{B}', \mathcal{M}', Z')$  und eine aufsteigende Folge  $x_1 < \dots < x_n$  in  $S$  mit  $v_{x_i} \in B'_i$ .

Indem wir die erste Perle aus  $N$  löschen und die Wege in  $\mathcal{P} \setminus \{P\}$  in der zweiten hinzufügen, finden wir eine von  $H \setminus U$  disjunkte  $(t, s - 1, z, m - 1)$ -Halskette. Wir nehmen eine Kontraktion  $(\mathcal{B}'', \mathcal{M}'', Z)$  davon mit  $v_{x_i} \in B''_i$ . Dann ist die gewünschte Halskette

$$((B'_i \cup B''_i)_{i \in \mathbb{Z}_n}, (M'_i \cup M''_i)_{i \in \mathbb{Z}_n}, Z \cup Z').$$

□

**Korollar 2.5.2.** *Sei  $G$  ein Graph und seien  $\theta, n \in \mathbb{N}$ . Sei  $m \gg n$ . Sei  $N$  ein  $(\theta; m)$ -Halskette in  $G$ . Dann gibt es eine von  $N$  getragene  $(\theta'; n)$ -Halskette in  $G$  mit  $\theta' \geq \theta$  und langsprunglos falls  $\theta = \theta'$ .*

*Beweis.* Direkt aus Lemma 2.3.2 und Lemma 2.5.1. □

**Korollar 2.5.3.** *Sei  $G$  ein Graph und seien  $\theta, n \in \mathbb{N}$ . Sei  $m \gg \theta, n$ . Sei  $N$  eine aneinandergereihte  $(\theta; m)$ -Halskette in  $G$ , sodass es zwischen je zwei Perlen von  $N$  mindestens  $\theta + 1$  disjunkte Wege gibt. Dann gibt es eine von  $N$  getragene aneinandergereihte  $(\theta + 1; n)$ -Halskette in  $G$ .*

*Beweis.* Direkt aus Satz 2.4.4 und Korollar 2.5.2. □

Der Halskettensatz folgt nun aus Korollar 2.2.6 und Korollar 2.5.3.

## 2.6 Der Gittersatz

**Satz 2.6.1.** *Seien  $\theta, n \in \mathbb{N}$  und sei  $G$  ein Graph von Baumweite  $\geq n + \theta - 1$ . Dann gibt es in  $G$  eine  $\theta$ -zusammenhängende Menge der Größe  $n$ .*

*Beweis.* Sei  $(A, B)$  eine maximale Separation der Ordnung  $\leq n$  in  $G$ , sodass  $G[B]$  keine Baumzerlegung mit Weite  $\leq n + \theta - 2$  enthält, sodass  $A \cap B$  in einem Teil enthalten ist. (Es gibt solche Separationen, z.B.  $(\emptyset, V(G))$ .) Dann gilt  $|A \cap B| = n$ , da sonst für ein beliebiges Element  $v$  von  $B \setminus A$  auch  $(A \cup \{v\}, B)$  die Bedingung erfüllen, was der Maximalität von  $(A, B)$  widerspricht.

Wir beweisen nun, dass  $A \cap B$  sogar in  $G[B]$   $\theta$ -zusammenhängend ist. Angenommen nicht. Dann gibt es Teilmengen  $X, Y$  von  $A \cap B$  mit  $|X| = |Y| \leq \theta$ , sodass es in  $G[B]$  keine Menge von  $|X|$  disjunkten  $(X - Y)$ -Wegen gibt. Nach dem Satz von Menger gibt es eine Separation  $(C, D)$  von  $G[B]$  mit  $X \subseteq C, Y \subseteq D$  und  $|C \cap D| < |X|$ .

Wir betrachten die Separation  $(A', B') = (A \cup C, D) > (A, B)$ . Der Trenner dazu ist  $(A \cap D) \cup (C \cap D)$ , was eine Teilmenge von  $(A \cap B) \setminus X \cup (C \cap D)$  ist. Also ist die Ordnung nicht mehr als  $n - |X| + |C \cap D| < n$ . Also gibt es eine Baumzerlegung  $(T', \mathcal{V}')$  von  $G[D]$  mit Weite  $\leq n + \theta - 2$ , sodass dieser Trenner in einem Teil  $V'_{\nu'}$  enthalten ist. Ähnlicherweise gibt es eine Baumzerlegung  $(T'', \mathcal{V}'')$  von  $G[C]$  mit Weite  $\leq n + \theta - 2$ , sodass  $(A \cup D) \cap C$  in einem Teil  $V''_{\nu''}$  enthalten ist. Dann ist

$$(T' \cup T'' \cup \{t_0\}, \mathcal{V}' \cup \mathcal{V}'' \cup \{(t_0, (A \cap B) \cup (C \cap D))\})$$

eine Baumzerlegung von  $G[B]$ , die die Bedingung doch erfüllt. Widerspruch.  $\square$

**Lemma 2.6.2.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $G$  ein Graph, der eine  $(\theta; m)$ -Halskette enthält mit  $m \gg \theta \gg n$ . Dann hat  $G$  einen  $n \times n$ -Gitter-Minor.*

*Beweis.* Sei  $N = (\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$  eine  $(t, s, z, m)$ -Halskette mit  $t + s + z = \theta$ .

1.  $z \geq n^2$ .

Indem wir  $2n(n-1)$  von den Perlen kontrahieren, kriegen wir einen  $K_{n^2, 2n(n-1)}$ . Dieser enthält eine Unterteilung von dem  $n \times n$ -Gitter.

2.  $t \gg n$  (genauer  $t \geq \frac{n^{(n-1)} - 1}{n-1}$ ).

Sei  $\mathcal{P}$  die Menge von  $t$  disjunkten  $(B_1 - B_m)$ -Wegen, die uns die Halskette  $N$  liefert. Für  $1 \leq i \leq m$  sei  $G_i$  der Graph auf  $\mathcal{P}$  mit einer Kante von  $P$  nach  $P'$ , falls es in  $G[B_i]$  einen  $P - P'$ -Weg gibt, der keinen anderen Weg aus  $\mathcal{P}$  trifft. Jedes  $G_i$  ist zusammenhängend (da die Graphen  $G[B_i]$  zusammenhängend sind). Es gibt nicht mehr als  $2^{\frac{t(t-1)}{2}}$  Möglichkeiten für  $G_i$ , also gibt es  $1 \leq i_1 < \dots < i_{n(n-1)} \leq m$  und einen Graph  $G'$  auf  $\mathcal{P}$  mit  $G_{i_j} = G'$  für  $j \leq n(n-1)$ . Nach Lemma 2.2.1 gibt es in  $G'$  eine Folge  $P_1, \dots, P_n$ , sodass es für  $1 \leq k < n$  einen Weg in  $G'$  von  $P_k$  nach  $P_{k+1}$  gibt, der durch keinen anderen  $P_l$  verläuft.

Für  $1 \leq x \leq n$  und  $1 \leq y < n$  sei  $Q_{xy}$  ein  $(P_y - P_{y+1})$ -Weg in  $G[B_{i_{(x-1)n+y}}]$ , der kein anderes  $P_z$  trifft. Dann enthält

$$\bigcup_{i=1}^n P_i \cup \bigcup_{x=1}^n \bigcup_{y=1}^{n-1} Q_{xy}$$

einen  $(n \times n)$ -Gitter-Minor.

□

### 3 Der Kreuzsatz und Graphenwiedergaben

#### 3.1 $C$ -Kreuze und Dreibeine

**Definition 3.1.1.** Sei  $C$  ein Kreis in einem Graphen  $G$ . Zwei disjunkte Wege  $P_1, P_2$  bilden ein  $C$ -Kreuz, wenn  $C \cup P_1 \cup P_2$  ein  $TK^4$  ist. Gibt es kein  $C$ -Kreuz, so nennen wir  $G$   $C$ -Kreuz-frei.

**Definition 3.1.2.** Sei  $C$  ein Kreis in  $G$ . Dann heißt  $G$   $C$ -reduziert, falls es keine Separation  $(A, B)$  von  $G$  gibt mit  $|A \cap B| \leq 3$ ,  $C \subseteq A$  und  $B \setminus A \neq \emptyset$ .

**Definition 3.1.3.** Ein  $\Theta$  in einem Graphen  $G$  besteht aus drei  $(v - w)$ -Wegen für Ecken  $v$  und  $w$ , die sich nur in ihren Endecken treffen. Sei  $C$  ein Kreis in  $G$ . Ein  $C$ -Dreibein  $T$  in  $G$  ist ein  $\Theta$ , sodass es drei disjunkte  $(T - C)$ -Wege gibt, die in internen Ecken von verschiedenen Wegen von  $T$  anfangen.

**Definition 3.1.4.** Sei  $G$  ein Graph und seien  $E, F \subseteq V(G)$ . Für  $I \subseteq E$  ist eine *Verbindung von  $I$  nach  $F$  aus  $E$*  eine Menge von disjunkten  $(E - F)$ -Wegen, deren Menge von Anfangsecken  $I$  ist.  $I$  heißt  *$F$ -verbindbar aus  $E$* , falls es eine Verbindung von  $I$  nach  $F$  aus  $E$  gibt.

**Lemma 3.1.5.** Sei  $G$  ein Graph und seien  $E, F \subseteq V(G)$ . Seien  $I, J \subseteq E$ ; Die  $F$ -verbindbar aus  $E$  sind mit  $|J| > |I|$ . Dann gibt es  $i \in J \setminus I$ , sodass  $I \cup \{i\}$   $F$ -verbindbar aus  $E$  ist.

*Beweis.* Angenommen nicht. Indem wir  $(E \setminus (I \cup J))$  aus  $G$  löschen, können wir annehmen, dass  $E = I \cup J$  gilt. Wir können auch o.B.d.A. annehmen, dass  $E \cap F = \emptyset$ . Sei  $\mathcal{P}$  eine Verbindung von  $I$  nach  $F$  aus  $E$ . Nach dem Satz von Menger gibt es für jedes  $i \in J \setminus I$  eine Separation  $(A_i, B_i)$  von  $G[(V(G) \setminus E) \cup I \cup \{i\}]$  mit  $I \cup \{i\} \subseteq A_i$ ,  $F \subseteq B_i$  und  $|A_i \cap B_i| \leq |I|$ , sodass  $A_i \cap B_i$  aus einer Ecke von jedem Weg in  $\mathcal{P}$  besteht.

Sei  $A = \bigcup_{i \in J \setminus I} A_i$  und  $B = \bigcap_{i \in J \setminus I} B_i$ . Dann gilt  $A \cup B = V(G)$ . Es gilt  $A \cap B \subseteq \bigcup_{i \in J \setminus I} (A_i \cap B_i) \subseteq \bigcup \mathcal{P}$ . Wir zeigen nun, dass  $A \cap B$  nur ein Element jedes Weges aus  $\mathcal{P}$  enthalten kann. Sei  $P \in \mathcal{P}$  und sei  $\alpha \in A \cap B \cap V(P)$ . Dann gibt es ein  $i \in J \setminus I$  mit  $\alpha \in A_i \cap B_i$ . Dann ist  $P \overset{\alpha}{\cap} \subseteq A_i \setminus B_i \subseteq A \setminus B$ , also liegt keine Ecke vor  $\alpha$  auf  $P$  in  $A \cap B$  (Denn das gilt für alle solche Ecken  $\alpha$ , also insbesondere die letzte, die in  $A \cap B \cap V(P)$  liegt, also kann es nur diese eine geben). Also gilt  $|P \cap A \cap B| \leq 1$  für jeden solchen Weg, und das heißt  $|A \cap B| \leq |\mathcal{P}| = |I| < |J|$ , was der  $F$ -Verbindbarkeit von  $J$  widerspricht.  $\square$

**Lemma 3.1.6.** Sei  $C$  ein Kreis in einem Graphen  $G$ , der  $C$ -Kreuz-frei und  $C$ -reduziert ist. Dann gibt es kein  $C$ -Dreibein in  $G$ .

*Beweis.* Angenommen schon, und sei  $T$  ein  $C$ -Dreibein in  $G$ . Da  $G$   $C$ -reduziert ist, gibt es nach dem Satz von Menger eine Menge  $J$  von vier Ecken in  $T$ , die  $C$ -verbindbar aus  $T$  ist. Nach Definition 3.1.3 gibt es eine



Menge  $I$  von drei internen Ecken, die jeweils aus den drei verschiedenen Wegen von  $T$  kommen, die  $C$ -verbindbar aus  $T$  ist. Nach Lemma 3.1.5 gibt es  $i \in J \setminus I$ , sodass es eine Verbindung  $\mathcal{P}$  von  $I \cup \{i\}$  nach  $C$  aus  $T$  gibt. Dann enthält  $T \cup \bigcup \mathcal{P}$  ein  $C$ -Kreuz (siehe Übung). Widerspruch.  $\square$

### 3.2 Der Kreuzsatz

**Definition 3.2.1.** Sei  $H$  ein Teilgraph eines Graphen  $G$ . Eine  $H$ -Brücke ist ein Teilgraph von einer der folgenden zwei Typen:

1. Eine Kante in  $E(G) \setminus E(H)$  mit beiden Enden in  $H$ .
2. Eine Zusammenhangskomponente  $K$  von  $G \setminus H$ , zusammen mit allen Kanten von  $K$  nach  $H$ .

Die Ecken von  $H$  in der Brücke heißen *Füße* der Brücke.

**Lemma 3.2.2.** Sei  $G$  ein Graph und sei  $C$  ein Kreis in  $G$ , sodass  $G$   $C$ -reduziert ist, aber  $G \neq C$ . Dann gibt es einen nicht-trivialen  $C$ -Weg  $P$  in  $G$ , sodass jede Brücke von  $C \cup P$  einen Fuß in  $C \setminus P$  hat.

*Beweis.* Da  $G$   $C$ -reduziert ist und  $G \neq C$ , gibt es einen nicht-trivialen  $C$ -Weg in  $G$ . Sei  $|G| = n$ . Für einen  $C$ -Weg  $P$  nennen wir eine  $(C \cup P)$ -Brücke  $B$  *schlecht*, falls jeder Fuß von  $B$  auf  $P$  liegt. Für  $i \leq n$ , sei  $b_i(P)$  die Anzahl von schlechten  $(C \cup P)$ -Brücken mit  $i$  internen Ecken. Sei  $g(P)$  die Anzahl von Ecken in  $G \setminus (C \cup P)$ , die in nicht-schlechten Brücken liegen. Sei  $f(P)$  die Folge  $g(P), b_n(P), \dots, b_0(P)$ . Sei  $P$  ein  $C$ -Weg, sodass die Folge  $f(P)$  lexikographisch maximal ist. Angenommen,  $P$  ist nicht solch ein gewünschter Weg. Dann gibt es eine schlechte  $(C \cup P)$ -Brücke  $B$ . Wähle eine solche Brücke  $B$  mit minimal vielen inneren Ecken. Seien  $x, y$  die ersten und letzten Füße von  $B$  auf  $P$ , sei  $Q$  ein  $(x - y)$ -Weg in  $B$  und sei  $P' = PxQyP$ .

Da  $G$   $C$ -reduziert ist, gibt es eine weitere Brücke  $B'$  mit einem Fuß zwischen  $x$  und  $y$  auf  $P$  (Betrachte  $(V(xPy) \cup B, \{x, y\} \cup (V(G) \setminus (V(xPy) \cup B)))$ ). Bemerke, dass  $(C \cup P)$ -Brücken verschieden von  $B$ , die keinen Fuß im Inneren von  $xPy$  haben, auch  $(C \cup P')$ -Brücken sind. Da  $g(P') \leq g(P)$ , ist  $B'$  schlecht. Sei  $B''$  die  $(C \cup P')$ -Brücke, die  $B'$  enthält und sei  $i$  die Anzahl von inneren Ecken von  $B''$ . Dann gilt  $b_i(P') > b_i(P)$ , aber  $b_j(P') \geq b_j(P)$  für  $j > i$ . Also gilt  $f(P') > f(P)$ , was der Maximalität von  $f(P)$  widerspricht.  $\square$

**Bemerkung 3.2.3.** Hier ist ein Fehler in der Nummerierung des Originalskripts - daher dieser Platzhalter.

**Satz 3.2.4** (Der Kreuzsatz). Sei  $G$  ein Graph und  $C$  ein Kreis in  $G$ , sodass  $G$   $C$ -reduziert und  $C$ -Kreuz-frei ist. Dann ist  $G$  auf so eine Art und Weise plättbar, dass  $C$  den äußeren Kreis bildet.

*Beweis.* Induktion nach  $|V(G)| + |E(G)|$ .

*Induktionsanfang:*  $G = C$ .

*Induktionsschritt:* Nach Lemma 3.2.2 gibt es einen  $C$ -Weg  $P$ , sodass jede  $(C \cup P)$ -Brücke einen Fuß in  $C \setminus P$  hat. Seien  $P_1$  und  $P_2$  die 2 Teilwege von  $C$ , die die Endecken von  $P$  verbinden. Sei  $C_1 := P \cup P_1$  und  $C_2 := P \cup P_2$ . Sei  $G_i$  die Vereinigung von  $C_i$  mit allen  $(C \cup P)$ -Brücken in  $G$ , die einen Fuß auf  $P_i \setminus P$  haben. Es gibt keine  $(C \cup P)$ -Brücke mit Füßen in  $P_1 \setminus P$  und  $P_2 \setminus P$ , da  $G$   $C$ -Kreuz-frei ist. Also gilt  $G_1 \cap G_2 = P$  und  $G_1 \cup G_2 = G$ .

Wir zeigen nun, dass  $G_1$   $C_1$ -reduziert und  $C_1$ -Kreuz-frei ist. Gäbe es eine Separation  $(A, B)$  von  $G_1$  mit  $|A \cap B| \leq 3$ ,  $C_1 \subseteq A$  und  $B \setminus A \neq \emptyset$ , so wäre  $(A \cup V(G_2), B)$  eine Separation von  $G$ , die bezeugen würde, dass  $G$  nicht  $C$ -reduziert ist. Also ist  $G_1$   $C_1$ -reduziert.

Angenommen nun es gibt ein  $C_1$ -Kreuz  $P', P''$  in  $G_1$ . Wir wählen  $P'$  und  $P''$  so, dass die Anzahl  $k$  von Endecken von  $P'$  und  $P''$ , die auf  $P$  liegen, minimal ist. Wir machen eine Fallunterscheidung:

1.  $k = 4$ : Die  $(C \cup P)$ -Brücke, die  $P'$  enthält, hat einen Fuß  $x$ , der auf  $P_1 \setminus P$  liegt. Also enthält diese Brücke einen  $x - (P' \cup P'')$ -Weg  $Q$ . Dann enthält  $Q \cup P' \cup P''$  ein  $C$ -Kreuz mit nur 3 Endecken auf  $P$ . Widerspruch.
2.  $k \leq 2$ : Wir argumentieren für  $k = 2$ , da die anderen Fälle analog folgen. Jeweils eine Endecke von  $P'$  und  $P''$  sind auf  $P$ , da die Endecken in der zyklischen Ordnung auf  $C_1$  abwechselnd auftauchen. Nun fügen wir an die jeweiligen Endecken, den kürzesten Teilweg von  $P$  nach  $C$  hinzu. Dies bezeugt, dass  $P \cup P' \cup P''$  ein  $C$ -Kreuz enthält. Widerspruch.
3.  $k = 3$ : Seien o.B.d.A. die Endecken  $s$  und  $t$  von  $P'$  auf  $P$ . Die  $(C \cup P)$ -Brücke  $B$ , die  $P'$  enthält, hat einen Fuß  $x$  auf  $P_1 \setminus P$ . Also enthält  $B$  einen  $(P' - C)$ -Weg  $Q$ . Falls  $Q$  von  $P''$  disjunkt ist, enthält  $P' \cup P'' \cup Q$  ein  $C_1$ -Kreuz mit nur zwei Endecken auf  $P$ . Widerspruch. Also ist  $Q$  nicht disjunkt von  $P''$ . Sei  $y$  die erste Ecke von  $Q$  auf  $P''$ . Sei  $z$  die Endecke von  $Q$  auf  $P'$  und  $v$  die Endecke von  $P''$  auf  $P$ . Dann bilden die drei  $(v - z)$ -Wege  $vPsP'z$ ,  $vPtP'z$  und  $vP''yQz$  ein  $C$ -Dreibein in  $G$ , was Lemma 3.1.6 widerspricht.

Also ist  $G_1$  tatsächlich  $C_1$ -Kreuz-frei. Nach der Induktionshypothese gibt es eine Einbettung von  $G_1$  in der Ebene mit  $C_1$  als äußerem Kreis. Ähnlicherweise gibt es eine Einbettung von  $G_2$  in der Ebene mit  $C_2$  als äußerem Kreis. Wir können nun diese beiden Einbettungen kombinieren, um die gewünschte Einbettung von  $G$  in der Ebene zu finden.  $\square$

### 3.3 Graphwiedergaben

**Definition 3.3.1.** Ein *Gemälde* in einer Fläche  $\Sigma$  ist eine Menge  $\Gamma$  von endlich vielen topologischen abgeschlossenen Scheiben in  $\Sigma$ , sodass für  $c \in \Gamma$  die Menge  $\tilde{c} = c \cap \bigcup_{c' \in \Gamma \setminus \{c\}} c'$  nicht mehr als drei Elemente hat. Wir schreiben  $N(\Gamma)$  für  $\bigcup_{c \in \Gamma} \tilde{c}$ . Die Elemente von  $\Gamma$  heißen *Zellen*.

**Definition 3.3.2.** Sei  $G$  ein Graph und sei  $\Omega$  eine zyklisch geordnete Menge von Ecken in  $G$ . Eine  $\Omega$ -*Wiedergabe* von  $G$  ist ein Tripel  $(\Gamma, \sigma, \pi)$ , wobei

- $\Gamma$  ein Gemälde in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe  $\Delta$  ist,
- $\sigma$  jeder Zelle  $c$  in  $\Gamma$  eine Teilmenge  $\sigma(c)$  von  $V(G)$  zuordnet,
- $\pi : N(\Gamma) \rightarrow V(G)$  injektiv ist,

sodass

$$(W1) \quad G = \bigcup_{c \in \Gamma} G[\sigma(c)]$$

$$(W2) \quad \pi[\tilde{c}] = \sigma(c) \cap \bigcup_{c' \in \Gamma \setminus \{c\}} \sigma(c') \text{ für } c \in \Gamma$$

$$(W3) \quad \bigcup \Gamma \cap \delta\Delta \subseteq N(\Gamma)$$

$$(W4) \quad \pi[\bigcup \Gamma \cap \delta\Delta] = \Omega, \text{ wobei die zyklische Ordnung von } \Omega \text{ der von } \delta\Delta \text{ entspricht.}$$

Jeder Kreis  $C$  von  $G$  induziert eine zyklische Ordnung auf seiner Eckenmenge, also gibt es einen entsprechenden Begriff von  $C$ -Wiedergabe.

**Satz 3.3.3.** *Sei  $G$  ein Graph und sei  $C$  ein Kreis in  $G$ . Dann ist  $G$  genau dann  $C$ -Kreuz-frei, wenn es eine  $C$ -Wiedergabe von  $G$  gibt.*

*Beweis.*  $\Leftarrow$  : Angenommen, es gibt ein  $C$ -Kreuz  $P_1, P_2$  in  $G$ . Jedes  $P_i$  besteht aus Teilwegen in Teilgraphen  $G[\sigma(c)]$  für  $c \in \Gamma$ . Bemerke, dass ein  $c$  nur maximal einen der  $P_i$  schneidet, da es nur drei Ecken im Rand von  $c$  gibt. Vereinigungen von entsprechenden Bögen in den Zellen  $c$  ergeben zwei Bögen  $Q_1$  und  $Q_2$  in  $\Delta$ , sodass  $\delta\Delta \cup Q_1 \cup Q_2$  eine topologische Einbettung von  $K^4$  ist. Dieser, zusammen mit vier Bögen von einem Punkt  $x$  außerhalb von  $\Delta$  bildet eine Einbettung von  $K^5$  in der Ebene. Widerspruch.

$\Rightarrow$  : Per Induktion nach  $|V(G)|$ .

1.  $G$  ist  $C$ -reduziert.

Es gibt nach dem Kreuzsatz 3.2.4 eine Einbettung von  $G$  in  $\Delta$ , sodass nur die Ecken von  $C$  auf  $\Delta$  liegen, und zwar in derselben zyklischen Reihenfolge.

Nun bauen wir daraus eine  $C$ -Wiedergabe, in dem wir das Bild jeder Kante  $e$  zu einer Kreisscheibe  $c_e$  aufdicken, sodass  $c_e$  keine weiteren Ecken von  $G$  enthält und die  $c_e$  einander nur in Ecken treffen.  $\checkmark$

2. *Es gibt eine  $\leq 3$ -Separation  $(A, B)$  mit  $C \subseteq A$  und  $B \setminus A \neq \emptyset$ .*

Sei  $(A, B)$  eine maximale solche Separation. Dann gibt es nach dem Satz von Menger Wege von  $x$  zu allen Ecken von  $A \cap B$ , die sich nur in  $x$  treffen, für ein  $x \in B \setminus A$ . Sei  $G' = G[A] \cup K^{A \cap B}$ . Aus einem  $C$ -Kreuz in  $G'$  könnten wir ein  $C$ -Kreuz in  $G$  bauen, indem wir ggf. eine Kante oder zwei Kanten des Kreuzes durch einen Weg in  $B$  über  $x$  ersetzen.  $G'$  ist also auch  $C$ -Kreuz-frei. Nach der Induktionshypothese gibt es eine  $C$ -Wiedergabe  $(\Gamma, \sigma, \pi)$  von  $G'$ .

2.1 *Es gibt  $c \in \Gamma$  mit  $A \cap B \subseteq \sigma(c)$ .* Dann können wir eine  $C$ -Wiedergabe  $(\Gamma', \sigma', \pi')$  von  $G$  bauen, in dem wir  $\sigma(c)$  durch seine Vereinigung mit  $B$  ersetzen. ✓

2.2 *Es gibt kein solches  $c$ .* Dann  $|A \cap B| = 3$ , da jede Kante und jede Ecke in einem  $\sigma(c)$  vorkommen nach (W1). Für  $i \neq j$  in  $A \cap B$ , sei  $c_{ij} \in \Gamma$  mit  $i, j \in \sigma(c_{ij})$ . Bemerke, dass diese für die drei verschiedenen Paare unterschiedlich sind, da wir ansonsten in Fall 2.1 sind. Dann  $i, j \in c_{ij} \cap \bigcup_{c' \in \Gamma \setminus \{c\}} \sigma(c') = \pi[\tilde{c}_{ij}]$ . Sei also  $A \cap B = \pi[\{p, q, r\}]$ . Es gibt Bögen  $P_{pq}$  von  $p$  nach  $q$ ,  $P_{qr}$  von  $q$  nach  $r$  und  $P_{rp}$  von  $r$  nach  $p$ , die  $\Gamma$  und einander nur in ihren Endecken treffen und sodass  $c_{pqr}$  - die abgeschlossene Kreisscheibe in  $\Delta$  mit Rand  $P_{pq} \cup P_{qr} \cup P_{rp}$  - die drei  $c_{ij}$  enthält. Sei  $\Gamma' = \{c \in \Gamma : c \not\subseteq c_{pqr}\} \cup \{c_{pqr}\}$ . Für  $c \in \Gamma'$ , setze

$$\sigma'(c) := \begin{cases} B \cup \bigcup_{\{c' \in \Gamma : c' \subseteq c_{pqr}\}} \sigma(c') & , \text{für } c = c_{pqr} \\ \sigma(c) & , \text{sonst} \end{cases}.$$

Es gilt  $N(\Gamma') \subseteq N(\Gamma)$ , daher setze  $\pi' := \pi \upharpoonright N(\Gamma')$ . Dann ist  $(\Gamma', \sigma', \pi')$  eine  $C$ -Wiedergabe von  $G$ . ✓

□

### 3.4 Flache Teilgraphen

**Lemma 3.4.1.** *Sei  $G$  ein Graph, sei  $C$  ein Kreis in  $G$  und sei  $(\Gamma, \sigma, \pi)$  eine  $C$ -Wiedergabe von  $G$ . Sei  $H$  ein Teilgraph von  $G$  und  $D$  ein Kreis in  $H$ , sodass  $H \setminus D$  zusammenhängend ist. Seien  $(P_i)_{i \in [4]}$  vier disjunkte  $((H \setminus D) - C)$ -Wege in  $G$ , sodass  $P_i \cap D \neq \emptyset$ . Dann gibt es eine Separation  $(A, B)$  von  $G$ , sodass*

1.  $A \cap B \subseteq D$ ;
2.  $V(H) \subseteq B$ ;
3.  $V(C) \subseteq A$ ;
4. *Es gibt eine  $(A \cap B)$ -Wiedergabe von  $G[B]$ , wobei die zyklische Ordnung auf  $A \cap B$  von  $D$  induziert ist.*

*Beweis.* Die  $P_i$  bezeugen, dass  $D$  in keinem  $\sigma(c)$  enthalten ist. Also ist  $D$  eine Vereinigung von  $\pi[N(\Gamma)]$ -Wegen  $Q_1, \dots, Q_n$ . Für  $i \leq n$  gibt es  $c_i \in \Gamma$  mit  $Q_i \subseteq \sigma(c_i)$ . Seien die Enden von  $Q_i$   $x_i$  und  $y_i$  und sei  $X_i$  ein  $(x_i - y_i)$ -Bogen in  $\delta c_i$ , der kein anderes Element von  $N(\Gamma)$  enthält. Sei  $X := \bigcup_{i=1}^n X_i$ . Also ist  $X$  topologisch ein Kreis. Sei  $\Delta'$  die abgeschlossene Kreisscheibe in  $\Delta$  mit Rand  $X$ . Wir setzen

$$A := \bigcup_{c \in \Gamma, c \notin \Delta'} \sigma(c) \cup (\pi(N(\Gamma)) \cap D) \quad \text{und} \quad B := \bigcup_{c \in \Gamma, c \subseteq \Delta'} \sigma(c) \cup V(D).$$

Dann sind 1. und 3. klar.

Behauptung: Jedes  $P_i$  trifft  $A \cap B$ .

Beweis: Sei  $w$  die erste Ecke von  $P_i$  auf  $D$  und  $v$  der Vorgänger von  $w$  auf  $P_i$ . Angenommen,  $P_i$  trifft  $A \cap B$  nicht. Sei  $c \in \Gamma$  mit  $v, w \in c$ .  $(H \setminus D) \cup P_i v$  ist zusammenhängend und liegt wegen der  $P_j$  in keinem  $\sigma(c')$ , also enthält es eine Ecke in  $\pi[\bar{c}]$ . Ein anderes Element liegt auf  $wP_i$ , und zwei weitere in  $D$  (und deshalb in  $A \cap B$ ). Also enthält  $\pi[\bar{c}]$  mindestens vier Ecken. Widerspruch zur Definition von  $\pi(\bar{c})$ . ✓

Angenommen nun, 2. gilt nicht. Also gilt  $V(H \setminus D) \subseteq A$ . Sei  $v_i$  die erste Ecke von  $P_i$  in  $A \cap B$ ,  $x_i$  die Endecke in  $H \setminus D$  und  $y_i$  die Endecke auf  $C$ . O.B.d.A. liegen die  $y_i$  in der zyklischen Reihenfolge  $y_1, \dots, y_4$  auf  $C$ . Sei  $Q$  ein  $(x_2 - x_4)$ -Weg in  $H \setminus D$ . Sei  $\bar{c}$  eine Kreisscheibe mit  $\bar{c} \subseteq \Delta'$  und  $\delta \bar{c} \cap \delta \Delta' = \{\pi^{-1}(v_1), \pi^{-1}(v_3)\}$ . Dann gibt es eine  $C$ -Wiedergabe  $(\Gamma', \sigma', \pi')$  von  $\bar{G} = G[A] + v_1 v_3$  mit  $\Gamma' = \{c \in \Gamma : c \not\subseteq \Delta'\} \cup \{\bar{c}\}$ , aber  $y_1 P_1 v_1 v_3 P_3 y_3$  und  $y_2 P_2 x_2 Q x_4 P_4 y_4$  bilden in  $\bar{G}$  ein  $C$ -Kreuz.

Also gilt 2., und wir müssen nur noch 4. beweisen. Für  $i \in [n]$  mit  $c_i \not\subseteq \Delta'$  sei  $c'_i \subseteq c_i$  eine abgeschlossene Kreisscheibe mit  $\delta c'_i \cap \delta c_i = \delta c_i \cap X = X_i$ . Sei  $\Delta''$  die abgeschlossene Kreisscheibe  $\Delta' \cup \bigcup_{\{i \in [n] : c_i \not\subseteq \Delta'\}} c'_i$ . Für  $i \in [n]$  mit  $c_i \subseteq \Delta'$  sei  $c''_i \subseteq c_i$  eine abgeschlossene Kreisscheibe mit  $\delta c''_i \cap \delta c_i = Y_i$ , wobei  $X_i \cup Y_i = \delta c_i$  mit  $X_i \cap Y_i = \{x_i, y_i\}$  ist. Für  $i \in [n]$  mit  $c_i \not\subseteq \Delta'$  sei  $c''_i \subseteq c'_i$  eine abgeschlossene Kreisscheibe mit  $\delta c''_i \cap \delta c'_i = X_i$ . Dann gibt es eine  $(A \cap B)$ -Wiedergabe  $(\Gamma'', \sigma'', \pi'')$  von  $G[B]$  in  $\Delta''$  mit  $\Gamma'' = \{c \in \Gamma : c \subseteq \Delta', c \neq c_i\} \cup \{c''_i : i \in [n]\}$ . □

## 4 Der Fläche-Maschen-Satz

### 4.1 Fläche Maschen

**Definition 4.1.1.** Eine  $r \times s$ -Masche in einem Graphen  $G$  ist ein kantenminimaler  $r \times s$ -Gitter-Minor, sodass die Verzweigungsmengen der Ecken  $(1, 1)$ ,  $(1, s)$ ,  $(r, 1)$  und  $(r, s)$  des Gitters Singeltons sind. (Aus der Kantenminimalität folgt, dass die Verzweigungsmengen Bäume sind.)

In einem  $r \times s$ -Gitter  $H_{r \times s}$  sind die *senkrechten Wege* die Wege  $Q_i$  mit Eckenmengen  $\{i\} \times [1, s]$  und die *waagerechten Wege* die Wege  $P_j$  mit Eckenmengen  $[1, r] \times \{j\}$ .

In einer  $r \times s$ -Masche  $M$  mit Verzweigungsmengen  $X_{i,j}$ , nehmen wir als  $P_1$  bzw.  $P_s$  die eindeutigen Wege von  $X_{1,1}$  nach  $X_{1,r}$  durch die  $X_{1,i}$  bzw. von  $X_{s,1}$  nach  $X_{s,r}$  durch die  $X_{s,i}$ .

Als *senkrechten Weg*  $Q_i$  nehmen wir den  $(P_1 - P_s)$ -Weg durch die  $X_{i,j}$  mit  $1 \leq j \leq s$ . Als *waagerechten Weg*  $P_i$ , nehmen wir den  $(Q_1 - Q_r)$ -Weg durch die  $X_{j,i}$  mit  $1 \leq j \leq r$ . Bemerke, dass  $P_1$  und  $P_s$  wohldefiniert sind.

Eine Masche  $M'$  heißt *Teilmasche* von  $M$ , falls die senkrechten bzw. waagerechten Wege von  $M'$  Teilwege der senkrechten bzw. waagerechten Wege von  $M$  sind.

Der äußere Kreis einer solchen Masche  $M$  ist  $P_1 \cup P_s \cup Q_1 \cup Q_r$ . Eine *r-Masche* ist eine  $r \times r$ -Masche.

**Bemerkung 4.1.2.** Verzweigungsmengen in Maschen sind Teilmengen von einem  $P_i$  und einem  $Q_j$ .

**Definition 4.1.3.** Eine Masche *greift* einen  $K^t$ -Minor, falls es für jede Verzweigungsmenge  $X$  dieses Minors verschiedene  $i_1, \dots, i_t$  und  $j_1, \dots, j_t$  gibt mit  $P_{i_l} \cap Q_{j_l} \subseteq X$  für alle  $l \leq t$ .

**Definition 4.1.4.** Sei  $D$  der äußere Kreis einer Masche  $M$ .  $M$  heißt *flach* in  $G$ , falls es eine Separation  $(A, B)$  gibt mit  $A \cap B \subseteq V(D)$  und  $M \subseteq G[B]$ , sodass es eine  $A \cap B$ -Wiedergabe von  $G[B]$  gibt, wobei die zyklische Ordnung auf  $A \cap B$  von  $D$  induziert ist, und sodass jede Verzweigungsmenge von  $M$ , die  $D$  trifft, auch  $A \cap B$  trifft.

**Satz 4.1.5** (Der Flache-Maschen-Satz). *Seien  $r, t \in \mathbb{N}$  und sei  $T \gg t$ . Sei  $G$  ein Graph und sei  $M$  eine  $R$ -Masche in  $G$  mit  $R \gg r, t$ . Dann gibt es eins von:*

- *Einen von  $M$  gegriffenen  $K^t$ -Minor;*
- *Eine Menge  $A \subseteq V(G)$  mit  $|A| \leq T$  und eine  $r$ -Teilmasche  $M'$  von  $M$ , die von  $A$  disjunkt und in  $G \setminus A$  flach ist.*

## 4.2 Disjunkte lange Sprünge

**Definition 4.2.1.** Sei  $G$  ein Graph,  $M$  ein Teilgraph von  $G$  und  $R$  eine reflexive symmetrische Relation auf  $V(M)$ . Disjunkte  $M$ -Wege  $P_1, \dots, P_k$  sind *R-halbverstreut*, falls wir die Endecken von  $P_i$  als  $x_i, y_i$  so wählen können, dass  $(x_i, y_i) \notin R$  für  $i \leq k$  und  $(x_i, x_j) \notin R$  für  $i, j \leq k$ .

Für  $x \in M$  sei  $R(x) := \{y \in V(M) : R(x, y)\}$ .

**Lemma 4.2.2.** *Seien  $G, M$  und  $R$  wie in Definition 4.2.1. Falls es keine Menge von  $k$   $R$ -halbverstreuten Wegen gibt, dann gibt es Mengen  $A \subseteq V(G)$*

und  $Z \subseteq V(M)$  mit  $|A| \leq k - 1$  und  $|Z| \leq 3k - 3$ , sodass jeder  $M$ -Weg  $P$  in  $G - A$  mit Endecken  $x, y$  entweder  $(x, y) \in R$  oder  $x, y \in \bigcup_{z \in Z} R(z)$  erfüllt.

*Beweis.* Sei  $\{P_1, \dots, P_s\}$  eine größtmögliche  $R$ -halbverstreute Menge von Wegen mit Endecken  $x_i, y_i$  wie in Definition 4.2.1. Dann  $s \leq k - 1$ . Sei  $X = \{x_i : i \leq s\} \cup \{y_i : i \leq s\}$ .

Ein *Ausgangsweg* von  $P_i$  ist ein  $((\bigcup_{i=1}^s P_i) - M)$ -Weg mit einer Endecke in  $P_i$ , dessen Endecke in  $M$  nicht in  $\bigcup_{x \in X} R(x)$  liegt. Indem wir die  $P_i$  umsortieren, können wir annehmen, dass  $P_1, \dots, P_p$  Ausgangswege haben, aber  $P_{p+1}, \dots, P_s$  keine Ausgangswege haben. Für  $i \leq p$ , sei  $Q_i$  ein Ausgangsweg von  $P_i$  mit Endecken  $a_i$  bzw.  $z_i$  in  $P_i$  bzw.  $M$ . Sei  $A := \{a_i : i \leq p\}$  und  $Z := X \cup \{z_i : i \leq p\}$ .

Angenommen, es gibt einen  $M$ -Weg  $S$  in  $G - A$  mit Startecke  $x$  und Endecke  $y$ , sodass  $(x, y) \notin R$  und  $y \notin \bigcup_{z \in Z} R(z)$ . Also trifft  $S$  wegen der Maximalität von  $\{P_1, \dots, P_s\}$  mindestens ein  $P_i$ . Sei  $v$  die letzte Ecke von  $S$  in  $\bigcup_{i=1}^s P_i$ ; angenommen  $v \in P_i$ . Bemerke, dass  $v \neq y$  ist, da  $y \notin \bigcup_{i=1}^s P_i$ . Da  $vS$  ein Ausgangsweg von  $P_i$  ist, gilt  $i \leq p$ . Falls  $vS$  disjunkt zu  $Q_i$  ist, können wir eine größere Menge von  $R$ -halbverstreuten Wegen finden. Andernfalls sei  $w$  die letzte Ecke von  $vS$  in  $Q_i$ . Da  $w \neq a_i$ , besteht  $P_i \cup Q_i \cup S$  aus zwei  $M$ -Wegen  $P, P'$ , zusammen mit einem  $(P - P')$ -Weg.

Dann erhalten wir eine größere Menge von  $R$ -halbverstreuten Wegen, indem wir  $P_i$  durch  $P$  und  $P'$  ersetzen.  $\square$

### 4.3 Viele lange $M$ -Wege

**Definition 4.3.1.**  $H_{2r}^X$  besteht aus dem  $2r \times 2r$ -Gitter zusammen mit neuen Kanten von  $(i, r)$  nach  $(i+1, r+1)$  und von  $(i, r+1)$  nach  $(i+1, r)$  für  $i < 2r$ .

**Lemma 4.3.2.** Sei  $t \geq 2$ . Dann hat  $H_{t(t-1)}^X$  einen  $K^t$ -Minor, der vom unterliegenden Gitter gegriffen wird, und sodass jede Verzweigungsmenge eine Ecke der Form  $(x, t(t-1))$  enthält.

*Beweis.* Induktion nach  $t$ . Der Induktionsanfang mit  $t = 2$  ist klar.

*Induktionsschritt:* Sei  $A = [1, (t-1)(t-2)] \times [t, (t-1)^2]$ . Dann ist  $(x, y) \mapsto (x, (t-1)^2 + 1 - y)$  ein Isomorphismus von  $H_{(t-1)(t-2)}^X$  nach  $H_{t(t-1)}^X[A]$ . Also finden wir nach der Induktionshypothese einen  $K^{t-1}$ -Minor von  $H_{t(t-1)}^X[A]$  mit Verzweigungsmengen  $(X_i)_{i \leq t-1}$ , die Ecken der Form  $(x_i, t)$  enthalten. Sei

$$\begin{aligned} X'_t := & \{((t-1)(t-2) + 2i + 1, t(t-1)/2) \mid i \leq \lfloor t/2 \rfloor\} \\ & \cup \{((t-1)(t-2) + 2i, t(t-1)/2 + 1) \mid i \leq \lceil t/2 \rceil\} \\ & \cup \{(t-1)(t-2) + 1\} \times [t(t-1)/2 + 1, t(t-1)] \\ & \cup [1, (t-1)(t-2)] \times [(t-1)^2 + 1, t(t-1)]. \end{aligned}$$

Sei  $\mathcal{P} = \{\{x_i\} \times [1, t-1] : i \leq t-1\}$  und sei  $\mathcal{Q}$  eine Menge von  $t-1$  disjunkten  $P_1 - P_{t(t-1)}$ -Wegen, die von  $A$  und  $X'_t$  disjunkt sind. Lemma 2.4.1 für  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  und  $P_1, \dots, P_{t-1}$  impliziert, dass wir disjunkte Wege  $R_i$  von  $(x_i, t-1)$  nach  $P_{t(t-1)}$  finden in  $H_{t(t-1)}^X \setminus (A \cup X'_t)$  für  $i \leq t-1$ . Sei  $X'_i = X_i \cup R_i$  für  $i \leq t-1$ . Dann bilden  $X'_1, \dots, X'_t$  die Verzweigungsmengen eines passenden  $K^t$ -Minors.  $\square$

**Definition 4.3.3.** Der  $d$ -Rand eines  $r \times s$ -Gitters besteht aus allen Ecken  $(i, j)$  mit  $i \leq d, j \leq d, i \geq r+1-d$  oder  $j \geq s+1-d$ .

**Lemma 4.3.4.** Sei  $G$  ein Graph und sei  $H \subseteq G$  ein Gitter. Seien  $R_1, \dots, R_{t(t-1)}$  disjunkte  $H$ -Wege von  $G$ , wobei die Endecken  $(u_i, v_i)$  und  $(w_i, z_i)$  von  $R_i$  nicht im  $(t(t-1)/2 + 1)$ -Rand von  $H$  liegen und  $u_i + 2 \leq w_i \leq u_{i+1}$  für  $i \leq t(t-1)$ . Dann hat  $G$  einen  $K^t$ -Minor, der von  $H$  gegriffen wird.

*Beweis.* Sei  $H$  ein  $r \times s$ -Gitter. Für  $i \leq t(t-1)$  enthält  $H[[u_i, w_i] \times [t(t-1)/2 + 1, s-1-t(t-1)/2]] \cup R_i$  disjunkte Wege von  $(u_i, t(t-1)/2 + 1)$  nach  $(w_i, s-1-t(t-1)/2)$  und von  $(u_i, s-1-t(t-1)/2)$  nach  $(w_i, t(t-1)/2 + 1)$ . Also enthält  $G$  einen  $H_{i(t-1)}^X$ -Minor, dessen unterliegendes Gitter ein Teilgitter von  $H$  ist. Wir wenden Lemma 4.3.2 in diesem Minor an.  $\square$

**Lemma 4.3.5.** Sei  $G$  ein Graph und seien  $H, H' \subseteq G$  disjunkte Gitter. Sei  $(P_i)_{i \in I}$  eine Familie von disjunkten  $H - H'$ -Wegen in  $G$  mit  $|I| \gg t$ , die vom  $(t(t-1)/2 + 1)$ -Rand von  $H$  disjunkt sind. Dann hat  $G$  einen  $K^t$ -Minor, der von  $H$  gegriffen wird.

*Beweis.* Da  $H'$  einen Hamiltonweg besitzt, ist es o.B.d.A. ein Weg. Wir definieren eine totale Ordnung auf  $I$  mit  $i < j$ , falls  $P_i$   $H'$  vor  $P_j$  trifft. Sei  $x_i = (u_i, v_i)$  die Ecke von  $P_i$  in  $H$  und  $y_i$  die Ecke von  $P_i$  in  $H'$ . Dann gibt es o.B.d.A.  $i_1, \dots, i_n \in I$  mit  $n \gg t$ , sodass  $u_{i_1} < \dots < u_{i_n}$ . Nach dem Satz 2.2.7 von Erdős-Szekerés gibt es o.B.d.A. eine aufsteigende Teilfolge  $j_1 < j_2 < \dots < j_{3t(t-1)}$ . Sei  $Q_i := P_{j_{3i-2}} y_{j_{3i-2}} H' y_{j_{3i}} P_{j_{3i}}$ . Dann können wir Lemma 4.3.4 für  $H$  und diese  $Q_i$  anwenden.  $\square$

**Lemma 4.3.6.** Sei  $G$  ein Graph und sei  $H \subseteq G$  ein Gitter. Sei  $(P_i)_{i \in I}$  eine Familie von disjunkten  $H$ -Wegen in  $G$  mit Endecken  $x_i, y_i$ , sodass:

- (i)  $|I| \gg t$ ;
- (ii) kein  $x_i$  liegt im  $t(t-1) + 2$ -Rand von  $H$ ;
- (iii)  $d_H(x_i, y_i) \geq 2t(t-1) + 3$  für  $i \in I$ .

Dann hat  $G$  einen  $K^t$ -Minor, der von  $H$  gegriffen wird.

*Beweis.* Der  $(t(t-1)/2 + 1)$ -Rand von  $H$  ist eine Vereinigung von vier Gittern. Falls also

$$|\{i \in I : y_i \text{ ist im } t(t-1)/2 + 1\text{-Rand von } H\}| \gg t,$$



so können wir Lemma 4.3.5 anwenden. Also können wir annehmen, dass

$$|\{i \in I : y_i \text{ ist nicht im } (t(t-1)/2 + 1)\text{-Rand von } H\}| \gg t.$$

Sei  $x_i := (u_i, v_i)$  und  $y_i := (w_i, z_i)$ . O.B.d.A. gibt es  $I' \subseteq I$  mit  $|I'| \gg t$  mit  $y_i$  nicht im  $(t(t-1)/2 + 1)$ -Rand und  $|u_i - w_i| \geq t(t-1) + 2$  für  $i \in I'$ . O.B.d.A. gibt es  $I'' \subseteq I'$  mit  $|I''| \gg t$  und  $w_i > u_i$  für  $i \in I''$ .

Sei  $K$  der Graph auf  $I''$  mit einer Kante von  $i$  nach  $j$ , falls  $[u_i, w_i] \cap [u_j, w_j] \neq \emptyset$ . Nach dem Satz von Ramsey gibt es in  $K$  eine große vollständige oder eine große unabhängige Menge.

*Fall 1:* Es gibt eine vollständige Menge  $J \subseteq I''$  mit  $|J| \gg t$ . Sei  $u = \max_{i \in J} u_i$

*Fall 1.1:* Es gibt  $J' \subseteq J$  mit  $|J'| \gg t$  und  $u - u_i \geq t(t-1)/2 + 1$  für  $i \in J'$ . Dann wenden wir Lemma 4.3.5 für  $H[\{(p, q) | p < u\}]$  und  $H[\{(p, q) | p \geq u\}]$  an.

*Fall 1.2:* Es gibt  $J' \subseteq J$  mit  $|J'| \gg t$  und  $u - u_i < t(t-1)/2 + 1$  für  $i \in J'$ . Dann gilt  $w_i \geq u + t(t-1)/2 + 1$  für  $i \in J'$ , und wir wenden Lemma 4.3.5 für  $H[\{(p, q) | p < u + t(t-1)/2 + 1\}]$  und  $H[\{(p, q) | p \geq u + t(t-1)/2 + 1\}]$  an.

*Fall 2:* Es gibt eine unabhängige Menge  $J \subseteq I''$  mit  $|J| \gg t$ . Dann wenden wir Lemma 4.3.4 für die  $R_i$  mit  $i \in J$  an.  $\square$

#### 4.4 Beweis des Fläche-Maschen-Satzes

**Definition 4.4.1.** Sei  $M$  eine Masche und sei  $f$  eine Abbildung von  $V(M)$  in die Eckenmenge des entsprechenden Gitters, die die Elemente von  $V_{x,y}$  auf  $(x, y)$  schickt. Der  $d$ -Rand von  $M$  ist die Menge von Ecken, die  $f$  auf den  $d$ -Rand des Gitters schickt. Das  $d$ -Innere von  $M$  ist die größte Teilmasche, die den  $d$ -Rand nicht trifft.

Die  $M$ -Länge eines  $M$ -Weges  $P$  von  $x$  nach  $y$  ist der Abstand im Gitter von  $f(x)$  nach  $f(y)$ . Für ein Intervall  $[a, b]$  ist die *Teilmasche auf diesem Intervall* die größte Teilmasche, deren vertikale Wege die  $Q_i$  mit  $a \leq i \leq b$  ist. Die *Weite* davon ist  $b - a$ .

**Satz 4.4.2.** Seien  $r, t, \in \mathbb{N}$  und sei  $T \gg t$ . Sei  $G$  ein Graph und sei  $M$  eine  $s$ -Masche in  $G$  mit  $s \gg r, t$ . Falls es keinen von  $M$  gegriffenen  $K^t$ -Minor gibt, so gibt es eine Menge  $A \subseteq V(G)$  mit  $|A| \leq T$  und eine Teilmasche  $M'$  auf einem Intervall der Weite  $r$ , sodass  $V(M') \cap A = \emptyset$  und jeder  $M'$ -Weg von  $M$ -Länge mehr als  $2t(t-1) + 3$  beide Endecken im  $2t(t-1) + 3$ -Rand von  $M'$  hat.

*Beweis.* Sei  $H$  das  $s \times s$ -Gitter und sei  $f : V(M) \rightarrow V(H)$  wie in Definition 4.4.1. Sei  $H'$  der Graph, der aus  $H$  entsteht, indem wir alle Ecken im äußeren Kreis miteinander verbinden. Sei

$$R := \{(v, w) \in V(M)^2 \mid d_{H'}(f(v), f(w)) < 2t(t-1) + 3\}.$$

Angenommen, es gibt eine  $R$ -halbverstreute Familie  $(P_i)_{i \in I}$  von  $M$ -Wegen mit  $|I| > T$ , wobei die Endecken  $x_i$  und  $y_i$  wie in Definition 4.2.1 gewählt sind. Dann gibt es nicht mehr als ein  $i \in I$  mit  $x_i$  im  $(t(t-1)+2)$ -Rand von  $M$ .

*Fall 1: Es gibt  $I' \subseteq I$  mit  $|I'| \gg t$ , sodass alle  $y_i$  mit  $i \in I'$  in derselben Verzweigungsmenge liegen.*

Da diese Verzweigungsmenge eine Vereinigung von zwei Wegen ist und der Rest des Gitters eine Vereinigung von vier Gittern ist, können wir Lemma 4.3.5 in dem Graphen anwenden, wo wir alle anderen Verzweigungsmengen kontrahieren und bekommen einen Widerspruch.

*Fall 2: Es gibt  $I' \subseteq I$  mit  $|I'| \gg t$ , sodass alle  $y_i$  mit  $i \in I'$  in verschiedenen Verzweigungsmenge liegen.*

Dann gibt es  $I'' \subseteq I'$  mit  $|I''| \gg t$  mit allen  $x_i, y_i$  in verschiedenen Verzweigungsmengen für  $i \in I''$ , also kriegen wir einen Widerspruch zu Lemma 4.3.6 in dem Graphen, wo wir alle Verzweigungsmengen kontrahieren.

Also gibt es keine solche Familie. Nach Lemma 4.2.2 gibt es  $A \subseteq V(G)$  und  $Z \subseteq V(M)$  mit  $|A| \leq T$ ,  $|Z| \leq 3T$ , sodass jeder  $M$ -Weg  $P$  in  $G - A$  mit Endecken  $x, y$  eins von  $(x, y) \in R$  oder  $x, y \in \bigcup_{z \in Z} R(z)$  erfüllt. Sei nun  $M'$  eine Teilmasche von  $M$  auf einem Intervall der Weite  $r$ , die  $A$  und  $Z$  vermeidet. Dann ist jeder  $M'$ -Weg in  $G - A$  mit einer Endecke außerhalb des  $(2t(t-1)+3)$ -Rand von  $M'$  auch ein  $M$ -Weg und erfüllt nicht, dass beide Endecken in  $\bigcup_{z \in Z} R(z)$ , also ist die  $M'$ -Länge davon nicht mehr als  $2t(t-1)+2$ .  $\square$

Nun folgt der Fläche-Maschen-Satz 4.1.5 aus Satz 4.4.2 und dem folgenden Satz:

**Satz 4.4.3.** *Seien  $r, d, t \in \mathbb{N}$  und sei  $R \gg r, d, t$ . Sei  $G$  ein Graph und sei  $M$  eine  $R$ -Masche in  $G$ , sodass jeder  $M$ -Weg von  $M$ -Länge  $> d$  in  $G$  beide Endecken im  $d$ -Rand von  $M$  hat. Dann gibt es eins von:*

- (i) *Einen von  $M$  gegriffenen  $K^t$ -Minor von  $G$ .*
- (ii) *Eine Teilmasche  $M'$  von  $M$  auf einem Intervall der Weite  $r$ , deren  $(d + t(t-1)/2)$ -Inneres in  $G$  flach ist.*

*Beweis.* Für  $i = 1, \dots, t(t-1)$  sei  $M_i$  die Teilmasche auf dem Intervall  $[r(i-1), ri]$  und sei  $M'_i$  das  $(t(t-1)/2)$ -Innere von  $M_i$ . Sei  $G_i$  die Vereinigung von  $M'_i$  mit allen  $M$ -Brücken, die nur Füße in  $M'_i$  haben. Seien die Endecken  $s_i^1, s_i^2, t_i^1, t_i^2$  von  $M'_i$  auf dem äußeren Kreis, in dieser zyklischen Reihenfolge.

Sei  $C_i$  der Kreis  $s_i^1 s_i^2 t_i^1 t_i^2$  [eventuell kein Teilgraph von  $G$ ] und sei  $G'_i := G_i \cup C_i$ . Falls es in jedem  $G'_i$  ein  $C_i$ -Kreuz gibt, dann finden wir einen passenden  $H_{t(t-1)}^X$ -Minor, wo wir Lemma 4.3.2 anwenden können, um einen  $K^t$ -Minor wie in (i) zu finden.

Also können wir annehmen, dass es ein  $i \leq t(t-1)$  gibt, sodass  $G'_i$   $C_i$ -kreuzfrei ist. Nach Satz 3.3.3 gibt es eine  $C_i$ -Wiedergabe von  $G'_i$ . Sei  $M''_i$  das  $d$ -Innere von  $M'_i$ , also das  $(d + t(t-1)/2)$ -Innere von  $M_i$ . Sei  $D$  der äußere Kreis von  $M''_i$ . Nach Lemma 3.4.1 gibt es eine Separation  $(A, B)$  von  $G'_i$  mit:

1.  $A \cap B \subseteq V(D)$ ;
2.  $V(M''_i) \subseteq B$ ;
3.  $V(C_i) \subseteq A$ ;
4. Es gibt eine  $(A \cap B)$ -Wiedergabe von  $G'_i[B]$ , wobei die zyklische Ordnung auf  $A \cap B$  von  $D$  induziert ist.

Bemerke, dass  $(M'_i \setminus M''_i) \cap B = \emptyset$  ist. Sei  $A' = A \cup (V(G) \setminus B)$ . Da  $G[B] = G'_i[B]$ , reicht es für (ii) zu zeigen, dass  $(A', B)$  eine Separation von  $G$  ist.

Sei also  $xy \in E(G)$  mit  $x \in A'$  und  $y \in B$ . Sei  $P$  ein  $(y - M'_i)$ -Weg in  $G_i$ . Da  $A \cap B \subseteq V(M''_i)$ , ist die Endecke von  $P$  in  $M'_i$  sogar in  $M''_i$ . Also haben die  $M$ -Brücken in  $B$  nur Füße in  $M''_i$ . Also gilt  $x \in V(G_i)$  und deshalb  $x \in A$ , woraus folgt  $\{x, y\} \cap (A' \cap B) \neq \emptyset$ .  $\square$

## 5 Gesellschaften und wirbelnde Wiedergaben

### 5.1 Schiefe Verbindungen

**Definition 5.1.1.** Eine *Gesellschaft* besteht aus einem Graphen  $G$  und einer zyklisch geordneten Menge  $\Omega$  von Ecken in  $G$ . Für disjunkte Intervalle  $A, B \subseteq \Omega$  ist eine  $(A - B)$ -*Verbindung* eine Menge von disjunkten  $\Omega$ -Wegen, die Endecken sowohl in  $A$  als auch in  $B$  haben. Eine *Verbindung* in  $(G, \Omega)$  ist eine  $(A, B)$ -Verbindung für disjunkte Intervalle  $A$  und  $B$ . Die *Tiefe* von  $(G, \Omega)$  ist die Größe einer maximalen Verbindung.

Für eine  $(A, B)$ -Verbindung  $\mathcal{P}$  seien die Endecken der Wege aus  $\mathcal{P}$   $a_1, \dots, a_n$  in der Reihenfolge, wie sie in  $A$  liegen. Sei  $P_i \in \mathcal{P}$  der Weg von  $a_i$  nach  $B$  mit Endecke  $b_i \in B$ . Deren Reihenfolge in  $B$  schreiben wir  $b_{\tau(n)}, \dots, b_{\tau(1)}$ . Wir nennen  $\tau := \tau_{\mathcal{P}}$  die *entsprechende Permutation* zu  $\mathcal{P}$ . Falls  $\tau$  die Identität ist, nennen wir  $\mathcal{P}$  *planar*. Falls  $\tau(1) \neq 1$  und  $\tau(n) \neq n$ , so heißt  $\mathcal{P}$  *schief*. Ein Weg  $P \in \mathcal{P}$  heißt *peripher* in  $\mathcal{P}$  genau dann, wenn es ein Intervall von  $\Omega$  gibt, das die Endecken von  $P$ , aber keine weiteren Endecken aus  $\mathcal{P}$  enthält.

**Bemerkung 5.1.2.** Eine Verbindung ist genau dann schief, wenn sie keine peripheren Wege enthält. Sei  $\mathcal{P}$  eine schiefe Verbindung und sei  $P_i \in \mathcal{P}$  ein Weg mit  $i \neq 1, \tau(i) \neq 1, i \neq n$  und  $\tau(i) \neq n$ . Dann ist auch  $\mathcal{P} - P_i$  schief. Insbesondere gibt es in einer Verbindung mit mehr als fünf Elementen einen Weg, den wir löschen können, ohne Schiefheit zu verlieren.

**Lemma 5.1.3.** Sei  $(G, \Omega)$  eine Gesellschaft und seien  $p, q \in \mathbb{N}$ . Sei  $\mathcal{P}$  eine Verbindung von  $(G, \Omega)$  der Größe  $p+q-2$ . Dann gibt es  $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ , die planar und der Größe  $p$  oder die schief und der Größe  $q$  ist.

*Beweis.* Per Induktion nach  $p + q - 2$ . Der Induktionsanfang  $p + q - 2 = 1$  ist klar.

*Induktionsschritt:* Falls  $\mathcal{P}$  schief ist, so sind wir schon fertig. Falls nicht, so finden wir einen peripheren Weg  $P$ . Sei  $\mathcal{P}' := \mathcal{P} - P$ . Nach der Induktionshypothese gibt es in  $\mathcal{P}'$  eine schiefe Verbindung der Größe  $q$  (dann sind wir fertig) oder eine planare Verbindung der Größe  $p - 1$ , die dann zusammen mit  $P$  eine planare Verbindung der Größe  $p$  bildet.  $\square$

**Lemma 5.1.4.** *Sei  $(G, \Omega)$  eine Gesellschaft und sei  $\mathcal{P}$  eine schiefe Verbindung in  $G$ . Sei  $Q$  ein  $\Omega \cup \mathcal{P}$ -Weg mit der Eigenschaft, dass es keinen Teilweg  $R \subseteq P$  gibt, wobei  $P$  der von  $Q$  getroffene Weg ist, für den  $(\mathcal{P} \setminus \{P\}) \cup \{Q \cup R\}$  eine schiefe Verbindung ist. Dann können wir bezeugende Intervalle  $A, B$  zu  $\mathcal{P}$  wählen, sodass  $P = P_1, \tau_{\mathcal{P}}(1) = n, \tau_{\mathcal{P}}(2) = 1, \tau_{\mathcal{P}}(n) = n - 1$  und die Endecke von  $Q$  in  $\Omega$  in  $B$  zwischen  $b_{\tau_{\mathcal{P}}(1)}, \dots, b_{\tau_{\mathcal{P}}(n-1)}$  liegt.*

*Beweis.* Sei  $u$  die Endecke von  $Q$  auf  $P$ , seien  $A, B$  bezeugende Intervalle zu  $\mathcal{P}$ , und sei  $P = P_i$  für ein  $i \in [n]$ . Setze  $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{QuPa_i\}$  und  $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{QuPb_i\}$ . Da  $\mathcal{P}', \mathcal{P}''$  keine schiefen Verbindungen sind,  $\mathcal{P}$  jedoch schief ist, ist  $\mathcal{P}', \mathcal{P}'' \neq \mathcal{P}$ . Also ist  $u$  keine Endecke von  $\mathcal{P}$ . (Anmerkung: Dies folgt auch aus der Definition von  $\Omega \cup \mathcal{P}$ -Weg.) O.B.d.A. liegt die Endecke  $v$  von  $Q$  in  $\Omega$  nicht in  $A$  (Wähle  $A$  und  $B$  so, dass sie  $\Omega$  überdecken. Dann folgt dies durch potentiell Vertauschen von  $A$  und  $B$ ). Also ist  $\mathcal{P}'$  eine Verbindung. Da sie nicht schief ist, gilt o.B.d.A.  $\tau_{\mathcal{P}'}(n) = n$  (wobei  $n = |\mathcal{P}| = |\mathcal{P}'|$ ).

*Fall 1:*  $i = n$ .

Dann liegt  $v$  im Intervall  $[a_n, b_n]$ , welches kein  $a_i$  für  $i \leq n - 1$  enthält. Also ist  $\mathcal{P}''$  eine schiefe Verbindung - Widerspruch.

*Fall 2:*  $i \neq n$ .

Dann gilt  $\tau_{\mathcal{P}}(i) = n, \tau_{\mathcal{P}}(n) = n - 1$  und  $v \notin [a_n, b_{\tau_{\mathcal{P}}(n-1)}]$  (da wir sonst in Fall 1 wären), welches kein  $a_i$  für  $i \leq n - 2$  enthält. Durch Anpassen der Intervalle, ist also auch  $\mathcal{P}''$  eine Verbindung. Da  $\tau_{\mathcal{P}''}(n) \neq n$  und  $\mathcal{P}''$  nicht schief ist, gilt  $\tau_{\mathcal{P}''}(1) = 1$ .

Also gilt  $i = 1, \tau_{\mathcal{P}}(2) = 1$  und  $v \notin [b_{\tau_{\mathcal{P}}(1)}, a_1]$  - das Intervall, welches nicht  $b_{\tau_{\mathcal{P}}(j)}$  für  $j \geq 2$  enthält.  $\square$

**Lemma 5.1.5.** *Sei  $(G, \Omega)$  eine Gesellschaft und sei  $\mathcal{P}$  eine schiefe Verbindung in  $G$ . Seien  $Q, Q'$  disjunkte  $\cup \mathcal{P}$ - $\Omega$ -Wege. Dann gibt es  $P \in \mathcal{P}$  und Teilwege  $R, R'$  von  $P$ , sodass eins der Folgenden eine schiefe Verbindung ist:*

1.  $\mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{Q \cup R\}$ ,
2.  $\mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{Q' \cup R'\}$ , oder
3.  $\mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{Q \cup R, Q' \cup R'\}$ .

*Beweis.* Angenommen 1. und 2. gilt nicht. Seien  $v, v'$  die Endecken von  $Q, Q'$  in  $\Omega$  und  $u, u'$  die Endecken in  $\cup \mathcal{P}$ . Nach Lemma 5.1.4 können wir

bezeugende Intervalle  $A$  und  $B$  finden, sodass  $\tau_{\mathcal{P}}(1) = n$ ,  $\tau_{\mathcal{P}}(2) = 1$ ,  $\tau_{\mathcal{P}}(n) = n - 1$ ,  $u$  liegt auf  $P_1$  und  $v$  liegt in  $[b_{\tau_{\mathcal{P}}(n-1)}, b_{\tau_{\mathcal{P}}(1)}]$ .

Wenden wir Lemma 5.1.4 auf  $\mathcal{P}$ , und  $Q'$  an, so erhalten wir einen Weg  $P'$  der ebenso alle anderen Wege kreuzt (Für die erhaltenden Intervalle  $A'$  und  $B'$ , aber kreuzen ist unabhängig von der Intervallwahl). Da  $\tau_{\mathcal{P}}(2) = 1$  und  $\tau_{\mathcal{P}}(n) = n - 1$ , kreuzen diese Wege sich nicht. Also muss  $P'_1 \neq P_2$  und  $P'_1 \neq P_n$  gelten, insbesondere kreuzt  $P'_1$  also  $P_2$  und  $P_n$ . Aber aus dieser Tatsache zusammen mit  $\tau_{\mathcal{P}}(2) = 1$  und  $\tau_{\mathcal{P}}(n) = n - 1$  folgt  $P'_1 = P_1$ .

O.B.d.A. liegt  $u$  zwischen  $a_1$  und  $u'$  auf  $P_1$ . Sei  $\mathcal{P}'$  die Verbindung  $\mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{a_1 P_1 u Q, Q' u' P_1 b_1\}$ . Dann gilt  $\tau_{\mathcal{P}'}(2) = 1$  und  $\tau_{\mathcal{P}'}(n) = n - 1$  (falls  $v' \in [a_2, a_n]$ ) oder  $\tau_{\mathcal{P}'}(n - 1) = n$  (falls  $v' \in [b_{\tau_{\mathcal{P}}(n-1)}, b_{\tau_{\mathcal{P}}(1)}]$ ), also ist  $\mathcal{P}'$  schief.  $\square$

## 5.2 Zylindrische Wiedergaben

**Definition 5.2.1.** Ein *wirbelndes Gemälde* in einer Fläche  $\Sigma$  ist eine Menge  $\Gamma$  von endlich vielen abgeschlossenen topologischen Scheiben in  $\Sigma$ , sodass für  $c \in \Gamma$  die Menge  $\tilde{c} = c \cap \bigcup_{c' \in \Gamma \setminus c} c'$  endlich ist. Wir schreiben  $N(\Gamma)$  für  $\bigcup_{c \in \Gamma} \tilde{c}$ . Die Elemente von  $\Gamma$  heißen *Zellen*. Zellen mit  $|\tilde{c}| > 3$  heißen *Wirbel*.

**Definition 5.2.2.** Sei  $(G, \Omega)$  eine Gesellschaft und sei  $\Sigma$  eine Fläche mit nur einer Komponente  $K$  im Rand. Eine *wirbelnde Wiedergabe* von  $(G, \Omega)$  ist ein Tripel  $(\Gamma, \sigma, \pi)$ , wobei

- $\Gamma$  ein wirbelndes Gemälde in  $\Sigma$  ist,
- $\sigma$  jeder Zelle  $c$  in  $\Gamma$  eine Teilmenge  $\sigma(c)$  von  $V(G)$  zuordnet,
- $\pi : N(\Gamma) \rightarrow V(G)$  injektiv ist,

sodass dieses Tripel (W1) - (W4) aus Definition 3.3.2 erfüllt.

Für  $c \in \Gamma$  ist die *entsprechende Gesellschaft*  $(\sigma(c), \pi^{-1}(\tilde{c}))$ . Die *Tiefe* von  $c$  ist die Tiefe dieser Gesellschaft.

**Definition 5.2.3.** Eine *zylindrische Wiedergabe* von  $(G, \Omega)$  besteht aus einer wirbelnden Wiedergabe in der Einheitskreisscheibe und einer Zelle  $c_0$  davon, sodass keine andere Zelle ein Wirbel ist. Die *Tiefe* dieser Wiedergabe ist die Tiefe von  $c_0$ .

**Satz 5.2.4.** Sei  $k \geq 4$ . Sei  $(G, \Omega)$  eine Gesellschaft, die keine schiefe Verbindung der Größe  $\geq k$  hat. Dann gibt es eine zylindrische Wiedergabe von  $G$  der Tiefe  $\leq 8k - 5$ .

*Beweis.* Per (starker) Induktion nach  $|V(G)|$ . O.B.d.A. füge den entsprechenden Kreis auf  $\Omega$  hinzu. Dies hat keinen Einfluss auf die Existenz von Verbindungen, da diese  $\Omega$ -Wege sind. Falls  $(G, \Omega)$  selber Tiefe  $\leq 8k - 5$  hat, so sind wir fertig. Also können wir annehmen, dass es eine Verbindung

der Größe  $\geq 8k - 4$  gibt. Nach Lemma 5.1.3 hat diese eine planare Teilverbindung  $\mathcal{P}$  der Größe  $\geq 7k - 2$ . Seien  $A, B, P_1, \dots, P_{7k-1}, a_1, \dots, a_{7k-1}, b_1, \dots, b_{7k-1}$  wie in Definition 5.1.1. Sei

$$X_1 = \left( \bigcup_{i=1}^{2k+2} P_i \right) \cup [b_{2k+2}, a_{2k+2}]$$

und

$$X_2 = \left( \bigcup_{i=5k-3}^{7k-2} P_i \right) \cup [a_{5k-3}, b_{5k-3}].$$

Sei  $G_i$  die Vereinigung von  $X_i$  mit allen  $(\Omega \cup \mathcal{P})$ -Brücken, die mindestens einen Fuß in  $X_i$  haben. Also trifft  $G_1$  kein  $P_i$  mit  $i \geq 3k + 2$ , da wir sonst eine schiefe Verbindung der Größe  $\geq k$  finden würden. Ähnlicherweise trifft  $G_2$  kein  $P_i$  mit  $i \leq 4k - 3$ , und  $G_1$  und  $G_2$  sind disjunkt.

Gäbe es in  $G_1$  ein  $[b_{2k+2}, a_{2k+2}]$ -Kreuz und in  $G_2$  ein  $[a_{5k-3}, b_{5k-3}]$ -Kreuz, so würden diese zusammen mit  $P_{3k+2}, \dots, P_{4k-3}$  eine schiefe Verbindung der Größe  $k$  bilden.

Wir können also annehmen, dass es in  $G_1$  kein  $[b_{2k+2}, a_{2k+2}]$ -Kreuz gibt, und deshalb gibt es nach Satz 3.3.3 eine  $[b_{2k+1}, a_{2k+1}]$ -Wiedergabe  $(\Gamma, \sigma, \pi)$  von  $G_1$ . Für  $i \leq k + 3$  sei  $S_i := V(P_i) \cap \pi[N(\Gamma)]$  und sei  $L_i$  ein Bogen von  $\pi^{-1}(a_i)$  nach  $\pi^{-1}(b_i)$  in  $\Delta$ , der  $\bigcup \Gamma \cup \delta\Delta$  nur in  $\pi^{-1}(S_i)$  trifft. Sei  $L'_i$  der Teilbogen in  $\delta\Delta$  von  $\pi^{-1}(a_i)$  nach  $\pi^{-1}(b_i)$ , der  $\pi^{-1}(a_{k+4})$  nicht enthält. Sei  $\Delta_i$  die Kreisscheibe in  $\Delta$  mit  $\delta\Delta_i = L_i \cup L'_i$ . Sei  $A_i := \bigcup_{c \in \Gamma, c \subseteq \Delta_i} \sigma(c)$  und  $B_i := \bigcup_{c \in \Gamma, c \not\subseteq \Delta_i} \sigma(c)$ . Also ist  $(A_i, B_i)$  eine Separation von  $G_1$  mit  $A_i \cap B_i = S_i$ . Sei also  $B'_i = B_i \cup (V(G) \setminus V(G_1))$ . Da kein Nachbar von  $V(G) \setminus V(G_1)$  in  $A_i$  liegt, ist auch  $(A_i, B'_i)$  eine Separation von  $G$  mit  $A_i \cap B'_i = S_i$ . Es gibt dann eine Wiedergabe von  $(G[A_i], [b_i, a_i] \cup S_i)$ .

Nach der Induktionshypothese reicht es nun, zu zeigen, dass  $(G[B'_2], [a_2, b_2] \cup S_2)$  keine schiefe Verbindung der Größe  $\geq k$  hat, da wir die dadurch erhaltene zylindrische Wiedergabe der Tiefe  $\leq 8k - 5$  mit der Wiedergabe von  $(G[A_2], [b_2, a_2] \cup S_2)$  zusammenkleben können.

Angenommen also, es gibt eine schiefe Verbindung  $\mathcal{P}'$  der Größe  $\geq k$  von dieser Gesellschaft. Wir wählen eine solche Verbindung, die so wenig Kanten außerhalb von  $\bigcup_{i=3}^{k+3} P_i$  wie möglich hat. Wir zeigen zuerst, dass kein Weg  $P$  aus  $\mathcal{P}'$  in einem  $A_i$  enthalten ist. Gäbe es ein solches  $P$ , so wäre das  $P \in \mathcal{P}'$  mit  $P \subseteq A_i$  mit minimalem Abstand zwischen seinen Endecken in  $[b_i, a_i]$  peripher (ansonsten finden wir ein  $[b_i, a_i] \cup S_i$ -Kreuz).

Falls es zwei oder weniger Wege gibt, die  $S_2$  treffen, so könnten wir diese entlang von  $S_2$  umleiten und erhalten so direkt ein Kreuz in der ursprünglichen Wiedergabe. Es gibt also mindestens drei Wege  $P \in \mathcal{P}'$ , die  $S_2$  treffen. Jeder solche Weg muss jedes  $S_i$  mit  $3 \leq i \leq k + 3$  treffen, um aus  $A_i$  herauszukommen.  $\mathcal{P}'$  enthält nur  $k$  Wege, da wir ansonsten einen

Löschen können und so die Anzahl an Kanten außerhalb von  $\bigcup_{i=3}^{k+3} P_i$  reduziert hätten.

Seien  $x, y \in \{a_3, \dots, a_{3k+3}, b_3, \dots, b_{3k+3}\} \setminus \bigcup \mathcal{P}'$ . Seien  $P_x, P_y$  die in  $\mathcal{P}$  enthaltenen Wege, die  $x, y$  enthalten, sei  $Q_x$  der in  $P_x$  enthaltene  $x$ - $\bigcup \mathcal{P}'$ -Weg und sei  $Q_y$  ähnlich definiert. Da  $P_x$  und  $P_y$  mindestens drei Wege, denn  $S_i \subseteq P_i$ , und daher insbesondere zwei Wege aus  $\mathcal{P}'$  treffen gilt  $Q_x \neq P_x, Q_y \neq P_y$  und  $Q_x \cap Q_y = \emptyset$ . Also gibt es nach Lemma 5.1.5 eine schiefe Verbindung, die weniger Kanten außerhalb von  $\bigcup_{i=3}^{k+3} P_i$  hat, was ein Widerspruch zur Wahl von  $\mathcal{P}'$  ist.  $\square$

## 6 Zusammenkleben von flachen Gebieten

### 6.1 Schneiden von flachen Gebieten entlang Wegen

**Definition 6.1.1.** Eine Gesellschaft  $(G, \Omega)$  heißt *flach*, falls es eine  $\Omega$ -Wiedergabe von  $G$  gibt. Sie heißt *Gebiet* in  $H$ , falls  $G \subseteq H$  und  $\Omega$   $G$  von  $H \setminus G$  trennt. Ein *gerichteter Weg* in einem Graphen  $G$  ist ein Weg mit einer festen Wahl von von Anfangs- und Endstücken. Sei  $(G, \Omega)$  eine flache Gesellschaft mit einer Wiedergabe  $\rho = (\Gamma, \sigma, \pi)$  und sei  $P$  ein gerichteter  $\Omega$ -Weg in  $G$ . Wir legen einen  $\delta\Delta$ -Bogen  $B(P)$  in  $\Delta$  fest, mit

$$B \cap \left( \bigcup \Gamma \cup \delta\Delta \right) = \pi^{-1}(V(P)).$$

Sei  $a$  die Anfangsecke und  $b$  die Edecke von  $P$ . Seien  $\sum_L^\rho(P)$  und  $\sum_R^\rho(P)$  die Scheiben die wir bekommen. Wenn wir  $\Delta$  entlang  $B$  schneiden, sodass  $\pi(\sum_R^\rho(P) \cap \delta\Delta) = [a, b]$  und  $\pi(\sum_L^\rho(P) \cap \delta\Delta) = [b, a]$ . Sei  $S^\rho(P) = V(P) \cap \text{Im}(\pi)$  und sei  $\Omega_L^\rho(P) := [a, b] \cup S^\rho$  und sei  $G_L^\rho(P) = \bigcup_{c \subseteq \Gamma, c \subseteq \sum_L^\rho(P)} \sigma(c)$ . Wir definieren auch  $\Omega_R^\rho(P), \Omega_L^\rho(P)$  analog.

**Bemerkung 6.1.2.**  $(G_L^\rho(P), \Omega_L^\rho(P))$  ist wieder eine flache Gesellschaft. Falls  $(G_L^\rho(L), \Omega_L^\rho(P))$  in  $H$  ein Gebiet. Sei  $P_1, \dots, P_k$  eine Verbindung in  $(G, \Omega)$ . Mit Idices wie in Definition 5.1.1. Dann ist diese Verbindung planar und  $P_i \subseteq G_L(P_j)$  für  $i < j$ .

### 6.2 Grobe Zusammensetzung von flachen Gebieten

**Bemerkung 6.2.1.** Diese Bemerkung ist hier, um die Nummerierung der Nummerierung aus der Vorlesung anzupassen.

**Bemerkung 6.2.2.** Diese Bemerkung ist hier, um die Nummerierung der Nummerierung aus der Vorlesung anzupassen.

**Bemerkung 6.2.3.** Sei  $(G, \Omega)$  eine Gesellschaft und sei  $(P_1, P_2)$  ein  $\Omega$ -Kreuz in  $G$ . Sei  $R$  ein nicht-trivialer  $\Omega$ - $(P_1 \cup P_2)$ -Weg mit  $R \cap P_1 \neq \emptyset$ . Dann hat  $P_1$  ein Teilweg  $Q$ , sodass  $(R \cup Q, P_2)$  ein  $\Omega$ -Kreuz in  $G$  ist.

**Lemma 6.2.4.** Sei  $(G_1, \Omega_1)$  ein flaches Gebiet in  $H$  und sei  $(G_2, \Omega_2)$  eine flache Gesellschaft mit  $G_2 \subseteq H$ . Sei  $P_1, \dots, P_6$  eine (planare) Verbindung in  $(G_1, \Omega_1)$  mit Indizes wie in Definition 5.1.1, sodass  $V(G_2) \cap \Omega_1 \subseteq G_{1,R}(P_6)$ . Sei  $X$  ein Interall von  $\Omega_2$ , die  $\Omega_2 \cap G_{1,L}(P_1)$  enthält.

Seien  $Q_1, \dots, Q_5$  disjunkte  $(\Omega_2 \cap G_{1,L}(P_1))$ - $P_6$ -Wege in  $G_1 \cap G_2$ , deren Endecken in  $X$  in dieser Reihenfolge und deren Schnitte mit  $P_1$  auch in dieser Reihenfolge entlang  $P_1$  liegen, und sodass  $Q_j \cap P_1$  vor  $Q_j \cap P_2$  auf  $Q_j$  kommt. Sei  $G_3 = G_2 \setminus (G_1 \setminus G_{1,R}(P_1))$ .

Wir bauen  $\Omega_3$  aus  $\Omega_2$ , indem wir  $X$  durch  $S(P_1) \cap V(G_2)$  ersetzen. Dann ist  $(G_3, \Omega_3)$  flach.

*Beweis.* Sei  $K$  der Graph  $\left(\bigcup_{i=2}^6 P_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^5 Q_j\right) \cup \Omega_3$ . Wir müssen beweisen, dass es kein  $\Omega_3$ -Kreuz in  $G_3$  gibt. Angenommen es gibt ein solches Kreuz  $(R_1, R_2)$ . Betrachte ein solches, dass so wenig Kanten wie möglich außerhalb von  $K$  enthält.  $R_1$  und  $R_2$  müssen  $G_2 \setminus G_1$  treffen, da  $G_{1,R}(P_1)$  flach ist. Also sind sie nicht in  $K$  enthalten. Sei  $R_i^*$  ein minimaler Teilweg von  $R_i$ , sodass  $R_i \subseteq R_i^* \cup K$ . Dann wird auch  $G_2 \setminus G_1$  von  $R_i^*$  und  $R_2^*$  getroffen.

*Fall 1:* Weder  $R_1^*$  noch  $R_2^*$  trifft  $G_{1,L}(P_2)$ . Dann können wir die  $R_i$  mit Teilwegen der  $Q_j$  zu  $\Omega_2$ -Wege erweitern, ohne die zyklische Reihenfolge der Endecken zu ändern, also gibt es in  $(G_2, \Omega_2)$  ein  $\Omega_2$ -Kreuz. Dies ist ein Widerspruch.

*Fall 2:* Es gibt ein  $i$ , sodass  $R_i^* \cap G_{1,L}(P_2) \neq \emptyset$ . Dieses  $R_i^*$  trifft auch  $V(G_2) \cap \Omega_1 \subseteq G_{1,R}(P_6)$ , also trifft es alle  $P_i$  mit  $2 \leq i \leq 6$ . Nach Lemma 2.4.1 gibt es eine Teilmenge  $J$  von  $V(R_1^* \cup R_2^*)$  der Größe fünf, die  $\Omega_3$ -verbindbar aus  $V(R_1^* \cup R_2^*)$  in  $K$  ist. Auch die Menge  $I$  von Endecken der  $R_j^*$  ist  $\Omega_3$ -verbindbar aus  $V(R_1^* \cup R_2^*)$  in  $K$ , also gibt es nach Lemma 3.1.5 ein  $j \in J \setminus I$  und eine  $\Omega_3$ -Verbindung  $\mathcal{L}$  von  $I \cup \{j\}$  aus  $V(R_1^* \cup R_2^*)$  in  $K$ . Für  $k$  eine Endecke eines  $R_j$  in  $S(P_1) \cap G_2$ , sei  $u(k)$  die nächste Ecke von diesem  $R_j$  in  $V(G_2) \cap \Omega_1$ ,  $v(k)$  die nächste Ecke von diesem  $R_j$  zu  $k$  in  $R_j^*$ ,  $L(k)$  der Weg in  $\mathcal{L}$  der  $v(k)$  enthält und  $w(k)$  die andere Endecke von  $L(k)$ , die dann auch in  $S(P_1) \cap G_2$  liegt. Da  $G_{1,R}(P_1)$  flach ist, liegen die  $u(k)$  liegen auf  $V(G_2) \cap \Omega_1$  in der entgegengesetzten Reihenfolge wie die  $k$  auf  $P_1$ , also liegen die  $w(k)$  in derselben Reihenfolge wie die  $k$  auf  $P_1$ .

Deshalb bildet die Vereinigung von den  $R_j^*$  mit allen  $L(k)$  ein  $\Omega_3$ -Kreuz in  $G_3$ , das dieselben Kanten wie  $(R_1, R_2)$  außerhalb von  $K$  benutzt.  $\mathcal{L}$  enthält aber auch einen Weg in  $K$  von  $\Omega_3$  zu einer inneren Ecke eines  $R_j^*$ , also gibt es nach Bemerkung 6.2.3 ein  $\Omega_3$ -Kreuz in  $G_3$  mit weniger Kanten außerhalb von  $K$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

**Korollar 6.2.5.** Im Kontext von Lemma 6.2.4, sei  $\rho$  die  $\Omega$ -Wiedergabe von  $G_1$  und sei  $X'$  ein Intervall von  $(\Omega_{1,L}(P_1) \setminus X') \cup (\Omega_2 \setminus X)$ -Wiedergabe von  $G_{1,L}(P_1) \cup G_2$ , die auf  $\Sigma_{1,L}(P_1)$  mit  $\rho$  übereinstimmt.



### 6.3 Geschicktes Zusammenkleben von Wiedergaben

**Definition 6.3.1.** Sei  $\Sigma$  eine Fläche und  $G$  ein Graph. Eine  $\Sigma$ -Wiedergabe von  $G$  ist ein Tripel  $\rho := (\Gamma, \sigma, \pi)$ , wo  $\Gamma$  ein Gemälde in  $\Sigma$  ist,  $\sigma$  jeder Zelle  $c$  in  $\Gamma$  eine Teilmenge  $\sigma(c)$  von  $V(G)$  zuordnet und  $\pi : N(\Gamma) \rightarrow V(G)$  injektiv ist, sodass  $(\Gamma, \sigma, \pi)$  die Bedingungen  $(W_1) - (W_3)$  aus Definition 3.3.2 erfüllt. Sei nun  $\Sigma' \subseteq \Sigma$ , sodass  $\delta\Sigma' \cap (\bigcup \Gamma) \subseteq N(\Gamma)$ . Wir setzen

- $\Gamma \upharpoonright_{\Sigma'} = \{c \in \Gamma : c \subseteq \Sigma'\}$ ,
- $\sigma \upharpoonright_{\Sigma'} := \sigma \upharpoonright_{\Gamma \upharpoonright_{\Sigma'}}$ ,
- $\pi \upharpoonright_{\Sigma'} := \pi \upharpoonright_{N(\Gamma \upharpoonright_{\Sigma'})}$  und
- $G \upharpoonright_{\Sigma'} = \bigcup_{c \in \Gamma \upharpoonright_{\Sigma'}} G[\sigma(c)]$ .

Dann ist  $\rho \upharpoonright_{\Sigma'} := (\Gamma \upharpoonright_{\Sigma'}, \sigma \upharpoonright_{\Sigma'}, \pi \upharpoonright_{\Sigma'})$  eine  $\Sigma'$ -Wiedergabe von  $G \upharpoonright_{\Sigma'}$ .

Wir nennen  $(G, \rho)$  ein  $\Sigma$ -Gebiet in  $H$ , falls  $G \subseteq H$  und für jede Ecke  $v$  von  $G$  mit einem Nachbarn in  $H \setminus G$  der Form  $\pi(x)$  ist für ein  $x \in \delta\Sigma$ .

**Bemerkung 6.3.2.** Sei  $(G, \rho)$  ein  $\Sigma$ -Gebiet in  $H$  und  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  wie in Definition 6.3.1. Dann ist auch  $(G \upharpoonright_{\Sigma'}, \rho \upharpoonright_{\Sigma'})$  ein  $\Sigma'$ -Gebiet in  $H$ .

**Lemma 6.3.3.** Sei  $(G, \rho)$  ein  $\Sigma$ -Gebiet in  $H$  mit  $\rho = (\Gamma, \sigma, \pi)$ . Seien  $D_1, D_2$  Bögen in  $\Sigma$ , die  $\delta\Sigma$  nur in ihren Endecken schneiden, und sodass eine Komponente  $\Delta_i$  wenn wir  $\Sigma$  entlang  $D_i$  schneiden eine Kreisscheibe ist und  $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ . Sei  $D'_i$  der Teilbogen von  $\delta\Sigma$  mit  $\delta\Delta_i = D_i \cup D'_i$ . Sei  $\Omega_i$  die Menge  $\pi(N(\Gamma) \cap \delta\Delta_i)$ , mit der von  $\delta\Delta_i$  induzierten zyklischen Ordnung. Sei  $P_1^i, \dots, P_6^i$  eine planare Verbindung in der Gesellschaft  $(G \upharpoonright_{\Delta_i}, \Omega_i)$ , sodass  $(G \upharpoonright_{\Delta_i})_R(P_1^i)$  von  $\pi(N(\Gamma) \cap D_i)$  disjunkt ist.

Sei  $(G', \Omega')$  ein flaches Gebiet in  $H$ , sodass  $G' \cap G \subseteq G \upharpoonright_{\Delta_1} \cup G \upharpoonright_{\Delta_2}$  und  $V(G') \cap \Omega_i \subseteq (G_{\Delta_i})_R(P_6^i)$ . Sei  $X_i$  ein Intervall von  $\Omega'$  mit  $\Omega' \cap G \upharpoonright_{\Delta_i} \subseteq X_i$  und  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ . Seien  $Q_1^i, \dots, Q_5^i$  disjunkte  $(\Omega_2 \cap (G \upharpoonright_{\Delta_i})_L(P_1^i))$ - $P_6^i$ -Wege in  $G \upharpoonright_{\Delta_1} \cap G'_i$  deren Endecken in  $X_i$  in dieser Reihenfolge und deren Schnitte mit  $P_1^i$  auch in dieser Reihenfolge entlang  $P_1^i$  liegen, und sodass  $Q_j^i \cap P_1^i$  vor  $Q_j^i \cap P_2^i$  auf  $Q_j^i$  liegt.

Sei  $B_j^i$  der darstellende Bogen für  $P_j^i$  wie in Definition 6.3.1 und sei  $\Sigma_j$  die Vereinigung der Komponenten, die entstehen, wenn wir  $\Sigma$  entlang  $G_j^1$  und  $B_j^2$  schneiden und die  $D_1$  und  $D_2$  enthalten. Seid  $\Sigma''$  die Flächen die entsteht, indem man zwei gegenüberliegende Seiten eines Quadrats  $Q$  entlang die  $B_1^i$  klebt (mit entsprechender Orientierung). Dann gibt es eine  $\Sigma''$ -Wiedergabe  $\rho''$  von  $G'' = G \upharpoonright_{\Sigma_1} \cup G'$ , mit  $\rho'' \upharpoonright_{\Sigma_1} = \rho \upharpoonright_{\Sigma_1}$

*Beweis.* Zuerst wenden wir Lemma 6.2.4 zweimal an, um eine  $(S(P_1^1) \cap G') \cap (S(P_1^2) \cap G')$ -Wiedergabe  $\hat{\rho}$  von  $\hat{G} = G' \setminus \left( \bigcup_{i=1}^2 (G_{\Delta_i} \setminus (G_{\Delta_i})_R(P_1^i)) \right)$  zu finden. Dann kleben wir dieses auf  $\rho \upharpoonright_{\Sigma_1}$  entlang der  $B_1^i$  □

**Lemma 6.3.4.** *Im Kontext von Lemma 6.3.3, sei  $P_0^i$  ein  $\Omega_i$ -Weg in  $G \upharpoonright_{\Delta_i}$  mit Endecken  $x_1^i$  und  $x_2^i$  in  $\pi(N(\Gamma) \cap D')$ , sodass  $P_1^i, \dots, P_6^i$  in  $(G \upharpoonright_{\Delta_i})_R(P_0^i)$  liegen und  $P_0^i$  in  $(G \upharpoonright_{\Delta_i})_L(P_0^i)$  liegt. Seien  $S_1, S_2$  disjunkte  $P_0^1$ - $P_0^2$ -Wege in  $G'$ , wobei die Endecke von  $S_j$  auf  $P_0^i v_j^i$  ist und  $v_1^i$  zwischen  $x_1^i$  und  $v_2^i$  auf  $P_0^i$  liegt. Sei  $S_j' := x_j^1 P_0^1 v_j^1 S_j v_j^2 P_j^2 x_j^2$ . Sei  $K$  ein zusammenhängender Teilgraph von  $G' \setminus (S_1' \cup S_2')$ , der  $v_1^1 P_0^1 v_2^1$  trifft. Dann gibt es eine Teilfläche  $\Sigma'''$  von  $\Sigma''$ , sodass  $(G'' \upharpoonright_{\Sigma'''}, \rho'' \upharpoonright_{\Sigma'''})$  ein Gebiet ist,  $\Sigma''' \cong \Sigma''$ ,  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma'''$  und  $K \subseteq G'' \upharpoonright_{\Sigma'''}$ .*

*Beweis.* Sei  $\bar{B}_j$  ein Bogen von  $\pi^{-1}(x_j^1)$  nach  $\pi^{-1}(x_j^2)$  in  $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup Q$  und  $\bigcup \Gamma$  und der Rand dieser Fläche nur in  $\pi^{-1}(S_j')$  trifft, und sei  $\bar{\Delta}$  die Komponente, wenn man  $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup Q$  entlang  $\bar{B}_1$  und  $\bar{B}_2$  schneidet, die  $\bar{B}_1$  und  $\bar{B}_2$  enthält. Sei  $\Sigma''' := \Sigma_0 \cup \bar{\Delta}$ . Wir zeigen zuerst, dass  $(G'' \upharpoonright_{\Sigma'''}, \rho \upharpoonright_{\Sigma'''})$  ein  $\Sigma'''$ -Gebiet von  $H$  ist. Sei  $v \in V(G'' \upharpoonright_{\Sigma'''})$  mit einem Nachbarn  $w$  außerhalb von  $G'' \upharpoonright_{\Sigma'''}$ . Also gibt es  $x \in N(\Gamma)$  mit  $\pi(x) = v$ .

*Fall 1:*  $v \in G' \setminus \Omega'$ . Dann  $w \in G'$ , also  $w \in G'' \upharpoonright_{\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup Q}$ , woraus folgt  $x \in \bar{B}_1 \cup \bar{B}_2 \subseteq \delta \Sigma'''$ .

*Fall 2:*  $v \notin G' \setminus \Omega'$ . Dann  $x \in \Sigma_0$ , und deshalb  $x \in \delta \Sigma_0$ . Also gilt  $x \in \delta \Sigma'''$ . Die Ecke von  $K$  in  $v_1^1 P_0^1 v_2^1$  liegt in  $G'' \upharpoonright_{\Sigma'''}$ , also da  $K$  zusammenhängend ist und  $\{v \in G'' \upharpoonright_{\Sigma'''} : \pi^{-1}(v) \in \delta \Sigma'''\}$  nicht trifft gilt  $K \subseteq G'' \upharpoonright_{\Sigma'''}$ .  $\square$

**Bemerkung 6.3.5.** In den Anwendungen werden wir die Wege  $P_j^i, Q_j^i$  usw. nicht explizit angeben; es wird immer große Maschen in  $G \cup G'$  geben, wo es einfach ist, die entsprechenden Wege zu finden.

## 7 Aktenschränke

### 7.1 Definitionen

**Definition 7.1.1.** Sei  $A_{r,n}$  der Teilgraph von dem  $(2n+1)r \times 3r$ -Gitter, der entsteht, indem man für  $1 \leq a \leq n$  alle Ecken  $(p, q)$  mit  $(2a-1)r < p \leq 2ar$  und  $r < q \leq 2r$  löscht. Für  $a \leq n$  ist  $r, b$  der kürzeste Kreis in  $A_{r,n}$  durch  $((2a-1)r+1-b, r+1-b)$ ,  $((2a-1)r+1-b, 2r+b)$ ,  $(2ar+b, r+1-b)$  und  $(2ar+b, 2r+b)$ . Ein  $r, n$ -Aktenschrank in einem Graphen  $G$  ist ein kantenminimaler  $A_{r,n}$ -Minor  $A$  von  $G$ . wir schreiben dann  $C_{a,b}(A)$  für den eindeutigen Kreis  $A$ , der genau die Verzweigungsmengen für Ecken auf  $C_{a,b}$  enthält. Der *äußere Kreis* von  $A$  ist der eindeutige Kreis  $A$ , der genau die Verzweigungsmengen für Ecken auf dem äußeren Kreis des  $(2n+1)r \times 3r$ -Gitters enthält. Sei die Verzweigungsmenge für  $(p, q)$   $X_{p,q}(A)$ . Für  $d_{A_{r,n}}(p, q)$  sei  $K_{p,q}(A)$  der maximale Weg in  $X_{p,q}(A)$ , dessen Endecken Grad  $\geq 3$  in  $A$  haben.  $A$  überlagert eine Masche  $M$ , falls es injektive Abbildungen  $\phi$  von  $[(2n+1)r]$  nach der Menge von senkrechten Wegen von  $M$  und  $\psi$  von  $[3r]$  nach der Menge von waagerechten Wegen von  $M$ , sodass für  $1 \leq p \leq (2n+1)r$  und  $1 \leq q \leq 3r$ ;  $K_{p,q}(A) \supseteq \phi(p) \cap \psi(q)$ .

**Definition 7.1.2.** Für eine wirbelnde Wiedergabe  $\rho = (\Gamma, \sigma, \pi)$  einer Gesellschaft  $(G, \Omega)$  und einen Kreis  $C$  in  $G$ , der in keiner Zelle von  $\Gamma$  enthalten ist, legen wir einen Kreis  $D(C, p)$  in  $\Delta$  fest, dessen Schnitt mit  $\bigcup \Gamma \cup \delta \Delta$  genau  $\pi^{-1}(V(C))$  ist. Sei  $G(C, p)$  der Graph  $\bigcup_{c \in \Gamma, c \subseteq D(C, p)} G[c]$  und sei  $\Omega(C, p) = V(C) \cap \text{Im}(\pi)$ , mit zyklischer Ordnung von der von  $D(C, p)$  induziert. Wir nennen  $(G(C, p), \Omega(C, p))$  die *innere Gesellschaft* von  $C$ .

**Definition 7.1.3.** Sei  $G$  ein Graph. Ein  $r, T$ -Abheften von  $G$  mit  $n$  Schubladen ist ein Tupel  $\lambda = (X, \rho, A, (c_a)_{a \leq n})$ , sodass

- (A1)  $X \subseteq V(G)$  mit  $|X| \leq T$ ,
- (A2)  $\rho$  ist eine wirbelnde Wiedergabe von  $(G \setminus X, \emptyset)$ ,
- (A3)  $A$  ist ein  $r, n$ -Aktenschrank in  $G \setminus X$ ,
- (A4)  $c_a \in \Gamma$  mit  $c_a \subseteq \Delta(c)_{a,1}(A, \rho)$ ,
- (A5) Jeder Wirbel ist ein  $c_a$ , und
- (A6) Die  $\Delta(c_{a,1}(A), \rho)$  sind disjunkt.

Die *Schubladen* von  $\lambda$  sind die Zahlen  $1, 2, \dots, n$ . Die Schublade  $a$  heißt:

**flach**, falls die Gesellschaft  $(G(c_{c_a,10,\rho}), \Omega(c_{c_a,10,\rho}))$  flach ist,

**toroidal**, falls sie nicht flach ist, aber  $(G(c_{c_a,1,\rho}), \Omega(c_{c_a,1,\rho}))$  eine Wiedergabe in dem Torus mit einem Loch hat,

**kreuzheubal**, falls sie nicht flach ist, aber  $(G(c_{c_a,10,\rho}), \Omega(c_{c_a,10,\rho}))$  eine Wiedergabe in der Kreuzheube mit einem Loch hat,

**ordentlich**, falls sie toroidal oder kreuzhaubal ist, und

**$\leq d$ -wirbelig**, falls  $(G(c_{c_a,\rho}), \Omega(c_{c_a,\rho}))$  eine zyklische Wiedergabe der Tiefe  $\leq d$  hat.

**Satz 7.1.4.** Seien  $r, t \in \mathbb{N}$  und seien  $U, d, T, R \gg r, t$ . Sei  $G$  ein Graph und sei  $M$  eine  $R$ -Masche in  $G$ . Dann gibt es eins von:

- (a) einen von  $M$  gegriffenen  $K^t$ -Minor von  $G$ , oder
- (b) ein  $M$ -überlagerndes  $r, T$ -Abheften von  $G$ , wo alle Schubladen bis auf  $\leq U$  flach sind und jede Schublade  $\leq d$ -wirbelig oder ordentlich ist.

Wir beweisen diesen Satz noch nicht.

**Lemma 7.1.5.** Seien  $r, t \in \mathbb{N}$  und seien  $T, R \gg r, t$ . Sei  $G$  ein Graph und sei  $M$  eine  $R$ -Masche in  $G$ . Dann gibt es eins von:

- (a) einen von  $M$  gegriffenen  $K^t$ -Minor von  $G$ , oder

(b) ein  $M$ -überlagerndes  $r, T$ -Abheften.

*Beweis.* Nach dem Flachemaschensatz gibt es entweder einen von  $M$  gegriffenen  $K^t$ -Minor von  $G$  wie in (a) oder  $X \subseteq V(G)$  mit  $|X| \leq T$  und eine Teilmasche  $M'$  von  $M$ , die in  $G \setminus X$  flach ist. Im zweiten Falle sei  $(A, B)$  eine Separation wie in Definition 4.1.4 und sei  $\rho = (\Gamma, \sigma, \pi)$  die  $A \cap B$ -Wiedergabe von  $(G \setminus A)[B]$ . Sei  $\Sigma \cong S^2$  die Fläche, die entsteht, wenn man die Grenze von  $\Delta$  entlang der Grenze einer anderen Kreisscheibe  $C_1$  klebt. Sei  $\rho' = (\Gamma \cup \{C_1\}, \sigma \cup \{(C_1, A)\}, \pi)$ . Wir finden  $(r \times r)$ -Teilmaschen von  $M'$  und Wegesysteme dazwischen nach folgendem Muster, die zusammen einen  $1, r$ -Aktenschrank in  $G \setminus X$  bilden. Dann ist  $(X, \rho', A, (C_1))$  das gewünschte Abheften.  $\square$

## 7.2 Sprungbretter

**Definition 7.2.1.** Sei  $\lambda = (X, \rho, A, (c_a)_{a \leq n})$  ein  $r, T$ -Abheften eines Graphen  $G$  mit  $n$  Schubladen. Ein  $q$ -Sprungbrett in  $\lambda$  ist ein Tripel  $(a, Y, H)$ , sodass:

- $a$  ist eine flache Schublade von  $\lambda$ ,
- $H$  ist eine Vereinigung von Zusammenhangskomponente von  $G \setminus X$ , die  $A$  nicht treffen,
- $Z \setminus X$  mit  $G[Z \cup H]$  zusammenhängend,
- Es gibt ein  $(N(Z) \cap G(c_{1,a,\rho}))$ - $A$ -Weg in  $G \setminus X$  und
- es gibt  $q$  disjunkte  $(N(Z) \setminus G(c_{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor, a, \rho}))$ - $A$ -Wege in  $G \setminus X$ .

Zwei Sprungbretter  $(a, Z, H)$  und  $(a', Z', H')$  heißen *disjunkt*, falls  $a \neq a'$ ,  $Z \cap Z' = \emptyset$  und  $H \cap H' = \emptyset$ . Die  $q$ -Sprungkraft  $S_q(\lambda)$  ist die maximale Anzahl von paarweise disjunkte  $q$ -Sprungbrette.

**Lemma 7.2.2.** Seien  $N_1, \dots, N_q \setminus V(G)$  und sei  $A \setminus G$ , sodass es  $q$  disjunkte  $N_i$ - $A$ -Wege in  $G$  gibt für alle  $i \leq q$ . Dann gibt es disjunkte Wege  $P_1, \dots, P_q$  in  $G$ , wobei  $P_i$  ein  $N_i$ - $A$ -Weg ist.

*Beweis.* Übung.  $\square$

**Korollar 7.2.3.** Sei  $M$  eine Masche in  $G$  und sei  $\lambda$  ein  $M$ -überlagerndes  $r, T$ -Abheften von  $G$  mit  $n$  Schubladen. Sei  $t \in \mathbb{N}$  und sei  $q \gg t$ . Falls  $S_q(\lambda) \geq q$ , so hat  $G$  einen von  $M$  gegriffenen  $K^t$ -Minor.

*Beweis.* Sei  $\lambda = (X, \rho, A, (c_a)_{a \leq n})$ . Seien  $(a_i, Y_i, H_i)_{i \leq q}$  die disjunkte  $q$ -Sprungbretter in  $\lambda$ . Nach Lemma 7.2.2 finden wir disjunkte Wege  $P_1, \dots, P_q$  in  $G \setminus X$ . Wobei  $P_i$  ein  $(N(Y_i) \setminus G(c_{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor, a_i, \rho}))$ - $A$ -Weg ist. Wir können  $P_i$

durch  $Z_i \cup H_i$  zu einem  $A$ -Weg erweitern, mit der anderen Endecke in  $G(c_{1,a}, \rho)$ . So finden wir viele disjunkte lange Sprünge, und damit wie in Abschnitt 4.4 den gewünschten  $K^t$ -Minor.  $\square$

**Definition 7.2.4.** Sei  $\lambda$  ein Abheften. Die *Ordentlichkeit*  $O(\lambda)$  von  $\lambda$  ist die Anzahl von ordentlichen Schubladen und die *Unebenheit*  $U(\lambda)$  ist die Anzahl von nicht-flachen Schubladen.

**Lemma 7.2.5.** *Seien  $r, t, T, q \in \mathbb{N}$  und seien  $R, T', Q, d \gg r, t, T, q$ . Sei  $\lambda$  ein  $M$ -überlagerndes  $R, T$ -Abheften von einem Graphen  $G$  in dem es eine Schublade  $a$  gibt, die weder  $\leq d$ -wirblig noch ordentlich ist. Dann gibt es eins von:*

- (a) *Einen von  $M$  gegriffenen  $K^t$ -Minor von  $G$ ,*
- (b) *Ein  $M$ -überlagerndes  $r, T'$ -Abheften  $\lambda'$  von  $G$ , sodass*

$$O(\lambda') + U(\lambda') + S_q(\lambda') > O(\lambda) + U(\lambda) + S_Q(\lambda)$$

Dieses Lemma werden wir im Abschnitt 7.3 beweisen. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, wie man Satz 7.1.4 daraus folgern kann. Zunächst wenden wir dieses Lemma induktiv an, um folgendes zu beweisen:

**Korollar 7.2.6.** *Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $q, r, t \in \mathbb{N}$ . Seien  $d, T, R \gg r, t, k, q$ . Sei  $G$  ein Graph und  $M$  eine  $R$ -Masche in  $G$ . Dann gibt es eins der folgenden Sachen:*

- (a) *Einen von  $M$  gegriffenen  $K^t$ -Minor von  $G$ .*
- (b) *Ein  $M$ -überlagerndes  $r, T$ -Abheften  $\lambda$  von  $G$  mit  $U(\lambda) < k$ , in dem jede Schublade ordentlich oder  $d$ -wirbelig ist.*
- (c) *Ein  $M$ -überlagerndes  $r, T$ -Abheften  $\lambda$  von  $G$  mit  $O(\lambda) + U(\lambda) + S_q(\lambda) \geq k$ .*

*Beweis.* Per Induktion nach  $k$ . Der Induktionsanfang folgt aus Lemma 7.1.5, und der Induktionsschritt folgt aus Lemma 7.2.5.  $\square$

**Lemma 7.2.7.** *Sei  $a$  eine nicht-flache Schublade in einem Abheften  $(X, \rho, A, (c_a)_{a \leq n})$ . Dann gibt es ein  $\Omega(c_{a,10}, \rho)$ -Kreuz in  $G(c_{a,10}, \rho)$ , dessen vier Ecken in verschiedenen Verzweigungsmengen von  $A$  liegen.*

*Beweis.* Übung.  $\square$

*Beweis von Satz 7.1.4.* Wir können o.B.d.A annehmen, dass  $r \geq \frac{t(t-1)}{2} + 20$ . Wir wenden Korollar 7.2.6 an mit  $k = U$  und  $U \gg q \gg t$ . Mit den Ergebnissen (a) oder (b) wären wir schon zufrieden. Also nehmen wir an, dass es ein  $M$ -überlagerndes  $r, T$ -Abheften  $\lambda$  von  $G$  gibt mit  $O(\lambda) + U(\lambda) +$

$S_q(\lambda) \geq k = U$ . Da  $U(\lambda) \geq O(\lambda)$ , folgt  $2U(\lambda) + S_q(\lambda) \geq U$ .

*Fall 1:*  $U(\lambda) \geq t(t-1)$ . Dann finden wir nach Lemma 7.2.7 und Lemma 4.3.2 einen  $K^t$ -Minor wie in (a).

*Fall 2:*  $S_q(\lambda) \geq q$ . Dann finden wir nach Korollar 7.2.3 einen  $K^t$ -Minor wie in (a).  $\square$

### 7.3 Verbessern eines Abheftens

In diesem Abschnitt beweisen wir Lemma 7.2.5. Seien  $r, t, T, q \in \mathbb{N}$  und seien  $R, T', Q, d \gg r, t, T, q$ . Sei  $\lambda$  ein  $M$ -überlagerndes  $R, T$ -Abheften von einem Graphen  $G$ . Sei  $a_0$  eine Schublade in  $\lambda$ , die weder  $\leq d$ -wirbelig noch ordentlich ist. Sei  $\lambda = (X, \rho, A, (c_a)_{a \leq n})$ . Sei  $(a_i, Z_i, H_i)_{i \leq S_Q(\lambda)}$  eine maximale Familie von disjunkten  $Q$ -Sprungbrettern in  $\lambda$ . Sei  $G' = G \setminus \left( \left( \bigcup_{i \leq S_Q(\lambda)} H_i \right) \right)$ , und  $\rho' = (\Gamma, \sigma', \pi')$  die von  $\rho$  induzierte wirbelnde Wiedergabe von  $(G', \phi)$ . Sei  $G_{a_0} := G' \left( C_{a_0, \lfloor \frac{R}{T} \rfloor}(A), \rho' \right)$  und  $\Omega_{a_0} := \Omega \left( C_{a_0, \lfloor \frac{R}{T} \rfloor}(A), \rho' \right)$ . Da  $a_0$  nicht  $d$ -wirbelig ist, gibt es nach Satz 5.2.4 eine schiefe Verbindung  $\mathcal{P}$  von  $(G_{a_0}, \Omega_{a_0})$  der Größe  $\lfloor \frac{d+5}{8} \rfloor$ . Sei  $N$  die größte Masche in  $A \left[ \bigcup_{1 \leq p \leq r, 1 \leq q \leq r} X_{p+(2a_0-1)r, q} \right]$  und seien  $\mathcal{S} := \{S_1, S_2, \dots, S_r\}$  und  $\mathcal{W} = \{W_1, W_2, \dots, W_r\}$  die Mengen von Senkrechten und waagerechten Wegen in  $N$ . O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $\mathcal{P}$  außerhalb von  $G'(C_{a_0, d}(A), \rho')$  nur Kanten der Wege aus  $\mathcal{S}$  benutzen (Übung 4, Blatt 8). Nach dem Satz von Erdős und Szekeres 2.2.7 gibt es entweder viele Wege aus  $\mathcal{P}$ , die einander kreuzen, oder viele, die einander nicht kreuzen.

*Fall 1:* Es gibt  $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$  mit  $|\mathcal{P}'| = 2s$ , wobei  $s \gg r, t$ , sodass die Wege in  $\mathcal{P}'$  alle einander kreuzen. Seien  $S'_1, \dots, S'_{ks}$  die Wege aus  $\mathcal{S}$ , die Wege aus  $\mathcal{P}'$  außerhalb von  $G(C_{a_0, d}(A), \rho')$  treffen in dieser Reihenfolge von links nach rechts in  $N$ . Sei  $P_i \in \mathcal{P}'$  der Weg, der auf dieser Weise  $S'_i$  trifft. Also ist ein Anfangsstück von  $P_i$  ein Teilweg von  $S'_i$  und ein Endstück von  $P_i$  ein Teilweg von  $S'_{i+2s}$ .

Sei  $W'_i$  der eindeutige  $S'_1$ - $S'_{2s}$ -Weg in  $W_{d+s+1-i}$  für  $1 \leq i \leq s$  und der eindeutige  $S_{2s+1}$ - $S_{ks}$ -Weg in  $W_{d+i}$  für  $s < i \leq 2s$ . Sei  $N'$  die  $2s \times 2s$ -Masche, deren waagerechte Wege die  $W'_i$  sind und deren senkrechte Wege Teilmenge der  $P_i$  sind. Nach Satz 4.4.2 und Satz 4.4.3 gibt es Ergebnis (a) oder ein  $y \ll R, T', Q, d$ , eine Menge  $Y \subseteq V(G_{a_0})$  mit  $|Y| \leq y$  und eine Teilmasche  $N''$  von  $N'$  auf einem Intervall der Weite  $s' \gg r$ , deren  $y$ -Inneres in  $G_{a_0} \setminus Y$  flach ist. Sei  $\Sigma$  die Fläche, die entsteht, indem wir beide Enden eines verdrehten Streifens entlang disjunkter Segmente von  $\delta\Delta(C_{a_0, d+10}(A), \rho')$  zu  $\Delta^- := \Delta \setminus \overset{\circ}{\Delta}(C_{a_0, d+10}(A), \rho')$  kleben. Nach Lemma 6.3.4 gibt es ein  $\Sigma$ -Gebiet  $(G''.\bar{\rho})$  in  $G' \setminus Y$ , sodass:

- $(G' \setminus Y) \setminus G'(C_{a_0, d+10}(A), \rho') \subseteq G''$ ,
- $G''$  enthält  $s' - 10$  senkrechte Wege von  $N'$ , und

- $\bar{\rho}$  stimmt auf  $\Delta^-$  mit  $\rho'$  überein.

Nun finden wir nach folgendem Muster ein  $lr, n + 1$ -Aktenschrank  $A'$  in  $G'$ , sodass es ein darin passendes  $r, T + y$ -Abheften  $(X \cup Y, A', \rho''(c'_a)_{a \leq n+1})$  von  $G$  gibt mit einer weiteren kreuzheubalen Schublade.

*Fall 2:* Es gibt eine planare Verbindung  $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$  mit  $|\mathcal{P}'| = 4s$ , wobei  $s \gg r, t$ . Seien  $S'_1, \dots, S'_{8s}$  die Wege aus  $\mathcal{S}$ , die Wege aus  $\mathcal{P}'$  außerhalb von  $G'$  ( $G_{a_0, d}(A), \rho'$ ) treffen, in dieser Reihenfolge in  $\mathbb{N}$ , und sei  $P_i \in \mathcal{P}'$  der Weg, er auf dieser Weise  $S_i$  trifft. Also gibt es ein eindeutiges  $i_\sigma \leq 4s$ , sodass  $\mathcal{P} = \{P_{i_0+j} : j \leq 4s\}$ . Falls  $i_0 < 2s$ , so setzen wir  $P'_j := P_{i_0-2s+j}$ . Seien  $S''_1, \dots, S''_{4s}$  die Wege aus  $\mathcal{S}$ , die diese Wege  $P'_i$  außerhalb von  $G'(c_{a_0, d}(A), \rho')$  treffen, in dieser Reihenfolge in  $N$ . Also ist ein Anfangsstück von  $P'_i$  ein Teilweg  $S''_i$  und ein Endstück von  $P'_i$  ein Teilweg von  $S''_{4s+1-i}$ . Sei  $W'_i$  der eindeutige  $S''_1$ - $S''_{2s}$ -Weg in  $W_{d+s+1-i}$  für  $i \leq s$  und der eindeutige  $S''_{2s+1}$ - $S''_{4s}$ -Weg in  $W_{d+i}$  für  $s < i \leq 2s$ . Sei  $N'$  die Masche, deren waagrechte Wege die  $W'_i$  sind und deren Senkrechte Wege Teilwege der  $P'_i$  sind. Nach Satz 4.4.2 und Satz 4.4.3 gibt es Ergebnis (a) oder ein  $y \ll R, T', Q, d$  eine Teilmenge  $Y \subseteq V(G_{a_0})$  mit  $|Y| \leq y$ , und eine Teilmasche  $N''$  von  $N'$  auf einem Intervall der Weite  $s' \gg r, y$ , deren  $y$ -Inneres in  $G_{a_0} \setminus Y$  flach ist. Sei  $(\hat{A}, \hat{B})$  eine entsprechende Separation von  $G_{a_0}$  und  $\hat{\rho}$  eine entsprechende Wiedergabe von  $G_{a_0}[\hat{B}]$  wie in Definition 4.1.4.

In  $N'$  gibt es  $2y + 1$  disjunkte Intervalle  $(N_i)_{i \leq 2y+1}$  der Weite  $\lfloor \frac{s'}{2y+1} \rfloor$  in dieser Reihenfolge von links nach rechts. Für  $i \leq 2y + 1$  sei  $D_i$  der äußere Kreis des  $y$ -Inneren von  $N_i$ .

Für  $x \in Y$  sei  $i_x$  das maximale  $i$  und  $j_x$  das minimale  $i$ , sodass  $x$  einen Nachbarn in  $(G_{a_0} \setminus Y)[\hat{B}](D_i, \hat{\rho})$  hat, falls es ein solches  $i$  gibt und sei  $i_x = j_x = 0$  sonst. Sei  $i_0 \in [2y + 1] \setminus \bigcup_{x \in Y} \{i_x, j_x\}$ .

$$Y' = \left\{ x \in Y : x \text{ hat einen Nachbarn in } (G_{a_0} \setminus Y)[\hat{B}](D_{i_0}, \hat{\rho}) \right\}.$$

Also ist  $G'_{a_0} := (G_{a_0} \setminus Y)[\hat{B}](D_{i_0}, \hat{\rho})$  flach in  $G_{a_0} \setminus Y'$  und jede Ecke  $x \in Y'$  hat Nachbarn links und rechts davon.

Sei  $\Sigma$  die Fläche die entsteht, indem wir beide Enden eines nicht-verdrehten Streifen entlang disjunkt Segmenten von  $\delta\Delta(C_{a_0, d+2s+10}(A), \rho')$  zu  $\Delta^- := \Delta \setminus \hat{\Delta}(c_{a_0, d+2s+10}(A), \rho')$  kleben. Nach Lemma 6.3.4 gibt es ein  $\Sigma$ -Gebiet  $(G'', \bar{\rho})$  in  $G' \setminus Y'$ , sodass:

- $G' \setminus Y' \setminus (G'(c_{a, d+2s+10}(A), \rho')) \subseteq G''$
- $G''$  enthält  $\lfloor \frac{s'}{2y+1} \rfloor - 10$  senkrechte Wege von  $N_{i_0}$ .
- $\bar{\rho}$  stimmt auf  $\Delta^-$  mit  $\rho'$  überein.

Sei  $H$  die Vereinigung aller  $G''$ -Brücken in  $G_{a_0} \setminus Y'$  und sei

$$G''' := \left( G' \setminus G' \left( c_{a_0, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1, \rho'} \right) \right) \cup G''_{a_0}.$$

Also finden wir nach folgendem Muster ein  $r', n + 1$ -Aktenschrank  $A'$  mit  $r'' \gg r$  in  $G'''$ , sodass es ein dazu passendes  $r', T + y$ -Abheften von  $G'''$  gibt, sodass  $V(H) \cap V(G''') \subseteq \sigma(c'_{a_0}) \cup \sigma(c'_{a_0+1})$ : Wir wählen  $s''$  mit  $r \ll s'' \ll s'$

$$H^+ := G'''(c_{a_0, s''}(A'), \bar{\rho}) \cup H \cup G'''(c_{a_0+1, s''}(A'), \bar{\rho}). (???)$$

*Fall 2.1:* Es gibt  $s''$  disjunkte Wege von  $c_{a_0, s''}(A')$  nach  $c_{a_0+1, s''}(A')$  in  $H^+$ . Übung (ähnlich wie vorherige Argumente).

*Fall 2.2:* Es gibt eine Separation  $(\bar{A}, \bar{B})$  von  $H^+$  mit  $V(C_{a_0, s''}(A')) \subseteq \bar{A}$ ,  $V(C_{a_0+1, s''}(A')) \subseteq \bar{B}$  und  $|\bar{A} \cap \bar{B}| < B$ . Wir nehmen eine solche mit  $|\bar{A} \cap \bar{B}|$  minimal.

Also finden wir ein  $r', n+1$ -Abheften  $(X \cup Y' \cup (\bar{A} \cap \bar{B}), \bar{\rho}, A'', (c'_a)_{a \leq n+1})$  von  $G$ . Falls weder  $C_{a_0, 10}(A'')$  noch  $C_{a_0+1, 10}(A'')$  flach ist, so sind wir fertig. Angenommen also O.B.d.A.  $C_{a_0+1, 10}(A'')$  ist flach. Dann kann  $Y' \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$  nicht leer sein, da dann auch  $(G_{a_0})_R(P)$  flach gewesen wäre für ein  $P \in \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ , was die Schiefheit von  $\mathcal{P}$  widerspricht. Sei also  $x \in Y' \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ . Nach der Konstruktion gibt es  $N(x)$ - $A''$ -Wege in  $G'(C_{a_0, 1}(A''), \bar{\rho})$  und  $G'(C_{a_0+1}(A''), \bar{\rho})$ .

Sei nun  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  eine maximale Separation von  $G'(C_{a_0, q+2}(A'), \bar{\rho})$  mit folgenden Eigenschaften:

- Jede Komponente von  $\tilde{A}$  trifft  $N(x)$ ,
- $C_{a_0, q+2}(A'') \subseteq \tilde{B}$ , oder
- $|\tilde{A} \cap \tilde{B}| \leq q$ .

Dann gibt es ein  $i \leq q + 1$  mit  $V(C_{a_0, i}(A'')) \cap \tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset$ , und deshalb  $C_{a_0, i}(A'') \subseteq \tilde{A} \setminus \tilde{B}$  oder  $C_{a_0, i}(A'') \subseteq \tilde{B} \setminus \tilde{A}$ . Ersteres ist nicht möglich, da es mehr als  $q$  disjunkte  $(C_{a_0, i} - C_{a_0, q+2})$ -Wege gibt. Also gilt  $C_{a_0, i}(A'') \subseteq \tilde{B} \setminus \tilde{A}$ , woraus folgt  $\tilde{A} \subseteq G'(C_{a_0, i}(A''), \rho)$ .

Gäbe es einen  $\tilde{A}$ - $C_{a_0, q+2}$ -Trenner  $S$  mit  $|S| < q$ , so können wir  $\tilde{A}'$  als die Vereinigung von  $S$  mit allen Komponenten von  $G' \setminus S$ , die  $\tilde{A}$  treffen und  $\tilde{B}'$  als die Vereinigung von  $S$  mit allen anderen Komponenten definieren, und  $(\tilde{A}', \tilde{B}')$  wäre echt größer als  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  (als Separation), was die Maximalität von  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  widersprechen würde.

Also gibt es nach dem Satz von Menger  $q$  disjunkte  $\tilde{A}$ - $C_{a_0, q+2}$ -Wege. Dann können wir  $(a_0 + 1, (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup \{x\}, G'[\tilde{A} \setminus \tilde{B}])$  als weiteres Sprungbrett in einem passenden Abheften nehmen.