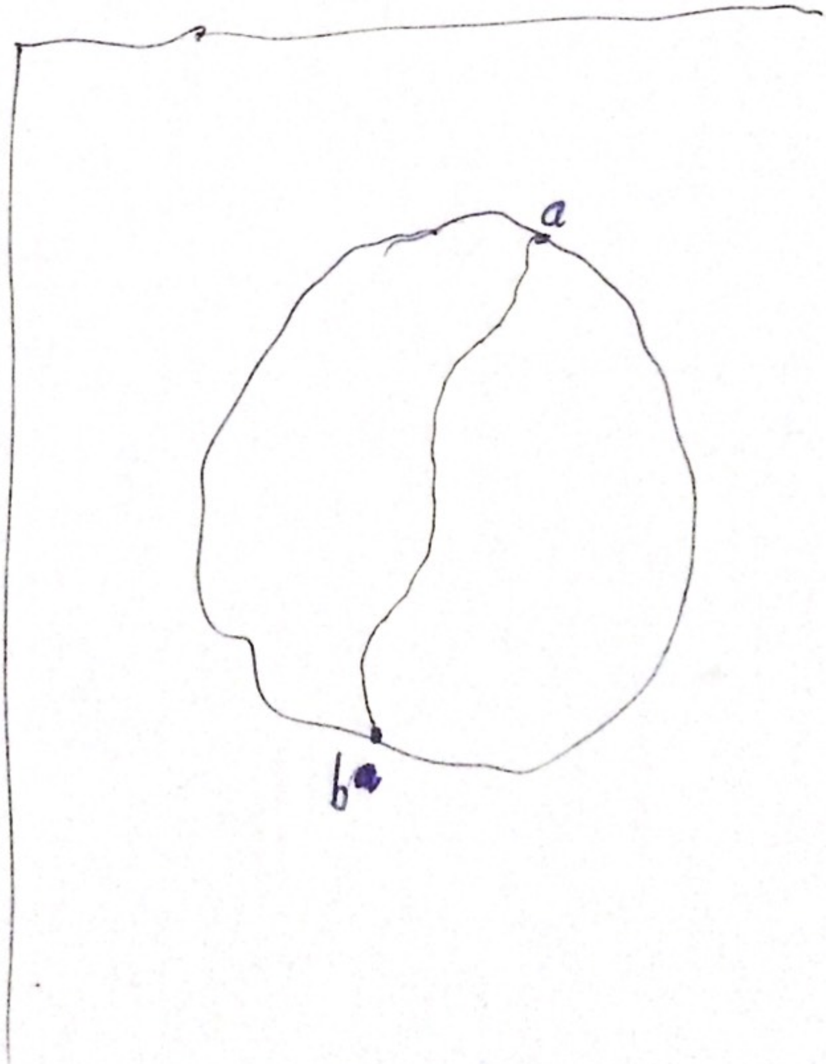
Kapitel 6 : Zusammenkleben von flachen Gebieten.

6.1 Schneiden von flachen Gebieten entlang Wegen.

Definition 6.1.1: Eine Gesellschaft (G, Ω) heißt *flach*, falls es eine Ω-Wiedergabe von G gibt. Sie heißt *Gebiet* in H falls $G \subseteq H$ und Ω G von $H \setminus G$ trennt.

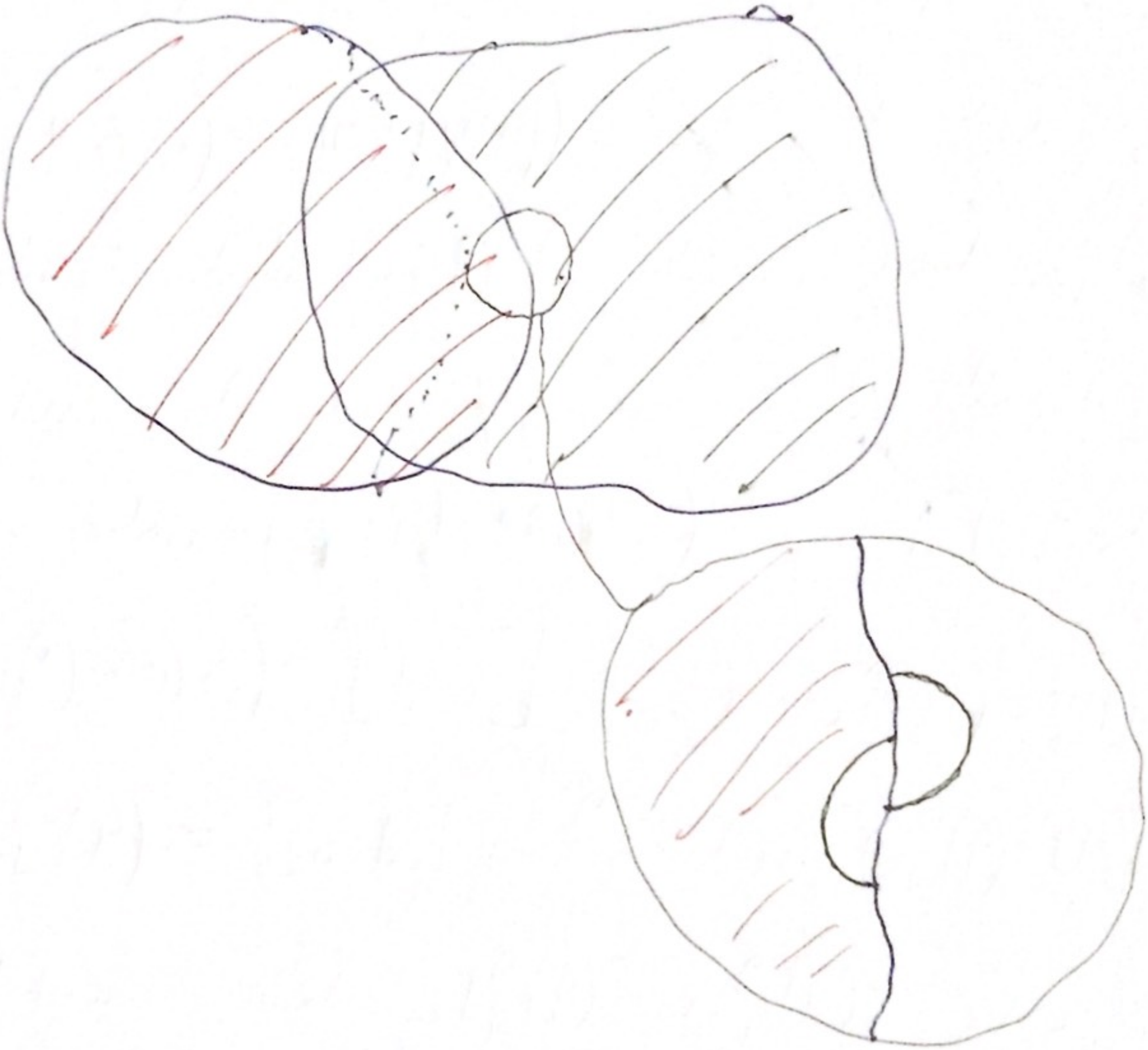
Ein *Gerichteter Weg* in einem Graphen G ist ein Weg mit einer festen Wahl von Anfangs- und Endecken. Sei (G, Ω) eine flache Gesellschaft mit einer Wiedergabe $\rho = (\Gamma, \sigma, \pi)$



und sei P ein gerichteter Ω-Weg in G. ~~Wir~~ Wir legen einen $\partial\Delta$-Bogen $B(P)$ ~~...~~ in Δ fest, mit $B \cap (\bigcup \Gamma \cup \partial\Delta) = \pi^{-1}(V(P))$. Sei a die Anfangsecke und b die Endecke von P. Seien $\Sigma_L^\rho(P)$ und $\Sigma_R^\rho(P)$ die Scheiben die wir kriegen, wenn wir Δ entlang B schneiden, sodass $\pi(\Sigma_L^\rho(P) \cap \partial\Delta) = [a,b]$ und $\pi(\Sigma_R^\rho(P) \cap \partial\Delta) = [b,a]$. Sei $S^\rho(P) = V(P) \cap \mathrm{Im}(\pi)$. sei $\Omega_L^\rho(P) := \overset{\text{in } \Omega}{[a,b]} \cup S^\rho$ und sei $G_L^\rho(P) = \bigcup_{\substack{c \in \Gamma \\ c \subseteq \Sigma_L^\rho(P)}} \sigma(c)$.
~~Wir~~ wir definieren auch $\Omega_R^\rho(P)$, $G_R^\rho(P)$ analog.

<u>Bemerkung 6.1.2</u>: $(G_L^\rho(P), \Omega_L^\rho(P))$ ist wieder eine Flache Gesellschaft. Falls (G,Ω) in H ein Gebiet war, so ist auch $(G_L^\rho(P), \Omega_L^\rho(P))$ in H ein Gebiet. Sei $P_1 \dots P_k$ eine Verbindung in (G,Ω), mit Indices wie in Definition 5.1.1. Dann ist diese Verbindung planar und $P_i \subseteq G_L(P_j)$ für $i<j$.

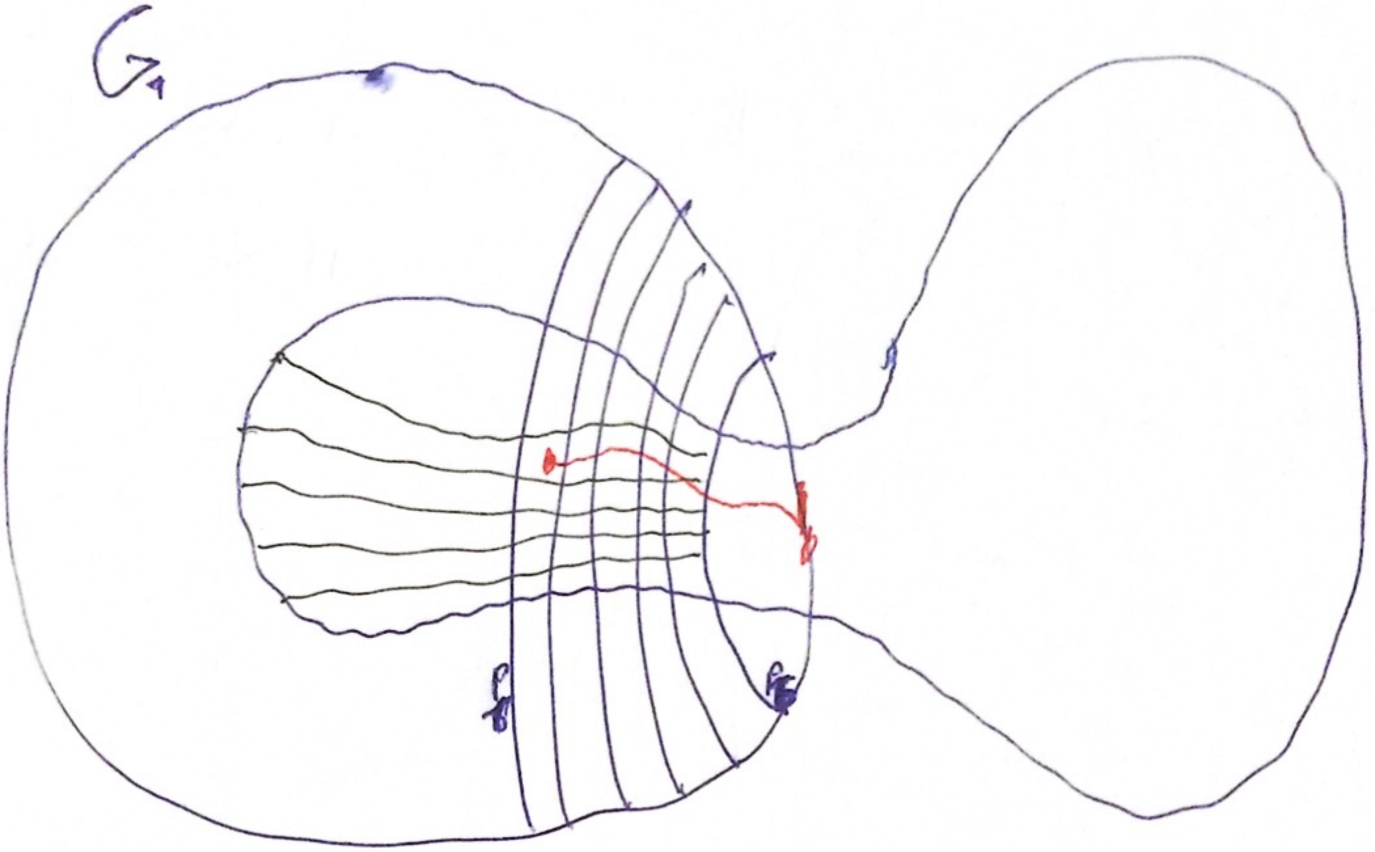
6.2: Grobe Zusammensetzung von flachen Gebieten.



Bemerkung 6.2.3: Sei (G, Ω) eine Gesellschaft und sei (P_1, P_2) ein Ω-Kreuz in G. Sei R ein nicht-trivialer $(\Omega - (P_1 \cup P_2))$-Weg, mit $R \cap P_1 \neq \emptyset$. Dann hat P_1 ein Teilweg Q, sodass auch $(R \cup Q, P_2)$ ein Ω-Kreuz in G ist.

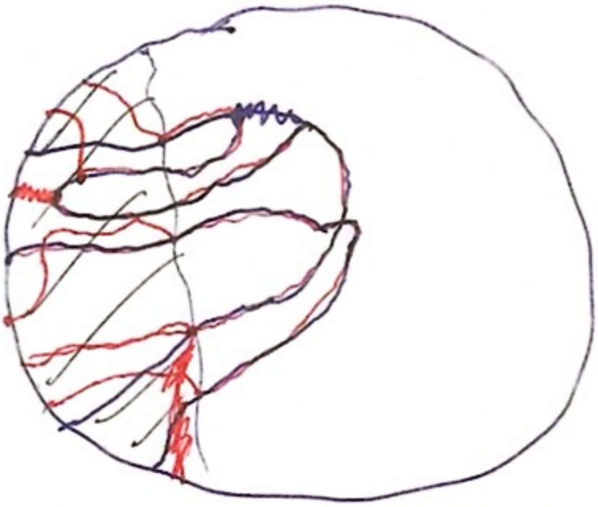
Lemma 6.2.4: Sei (G_1, Ω_1) ein flaches Gebiet in H und sei (G_2, Ω_2) eine flache Gesellschaft mit $G_2 \subseteq H$. Sei $P_1, \dots P_6$ eine (planare) Verbindung in (G_1, Ω_1) mit Indizes wie in Definition 5.1.1., sodass $V(G_2) \cap \Omega_1 \subseteq G_{1,R}(P_6)$. Sei X ein Intervall von Ω_2, die $\Omega_2 \cap G_{1,L}(P_1)$ enthält. Seien $Q_1 \dots Q_5$ disjunkte $((\Omega_2 \cap G_{1,L}(P_1)) - P_6)$-Wegen in $G_1 \cap G_2$, deren Endecken in X in dieser Reihenfolge und deren Schnitte mit P_1 auch in dieser Reihenfolge entlang P_1 liegen, und sodass $Q_j \cap P_1$ vor $Q_j \cap P_2$ auf Q_j kommt. Sei $G_3 = G_2 \setminus (G_1 \setminus G_{1,R}(P_1))$.

Wir bauen Ω_3 aus Ω_2, indem wir X durch $S(P_1) \cap V(G_2)$ ersetzen. Dann ist (G_3, Ω_3) flach.


G_1

Beweis: Sei K der Graph $\left(\bigcup_{i=2}^{6} P_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{5} Q_j\right) \cup \Omega_3$.

Wir müssen beweisen, dass es kein Ω_3-Kreuz in G_3 gibt. Angenommen es gibt ein solches Kreuz (R_1, R_2), und betrachte ein solches, das so wenig Kanten wie möglich außerhalb von K hat.



R_1 und R_2 müssen $G_2 \setminus G_1$ treffen, da $G_{1,R}(P_1)$ flach ist. Also sind sie nicht in K enthalten.

Sei R_i^* ein minimaler Teilweg von R_i, sodass $R_i \subseteq R_i^* \cup K$. Dann treffen auch R_1^* und R_2^* $G_2 \setminus G_1$.

~~und das Blatt [illegible]~~

Fall 1: weder R_1^* noch R_2^* trifft $G_{1,L}(P_2)$.

Dann können wir die R_i mit Teilwege der Q_j zu Ω_2-Wege erweitern, ohne die zyklische Reihenfolge der Endecken zu ändern, also gibt es in (G_2, Ω_2) ein Ω_2-Kreuz

Fall 2: Es gibt ein i, sodass $R_i^* \cap G_{1,L}(P_2) \neq \emptyset$.

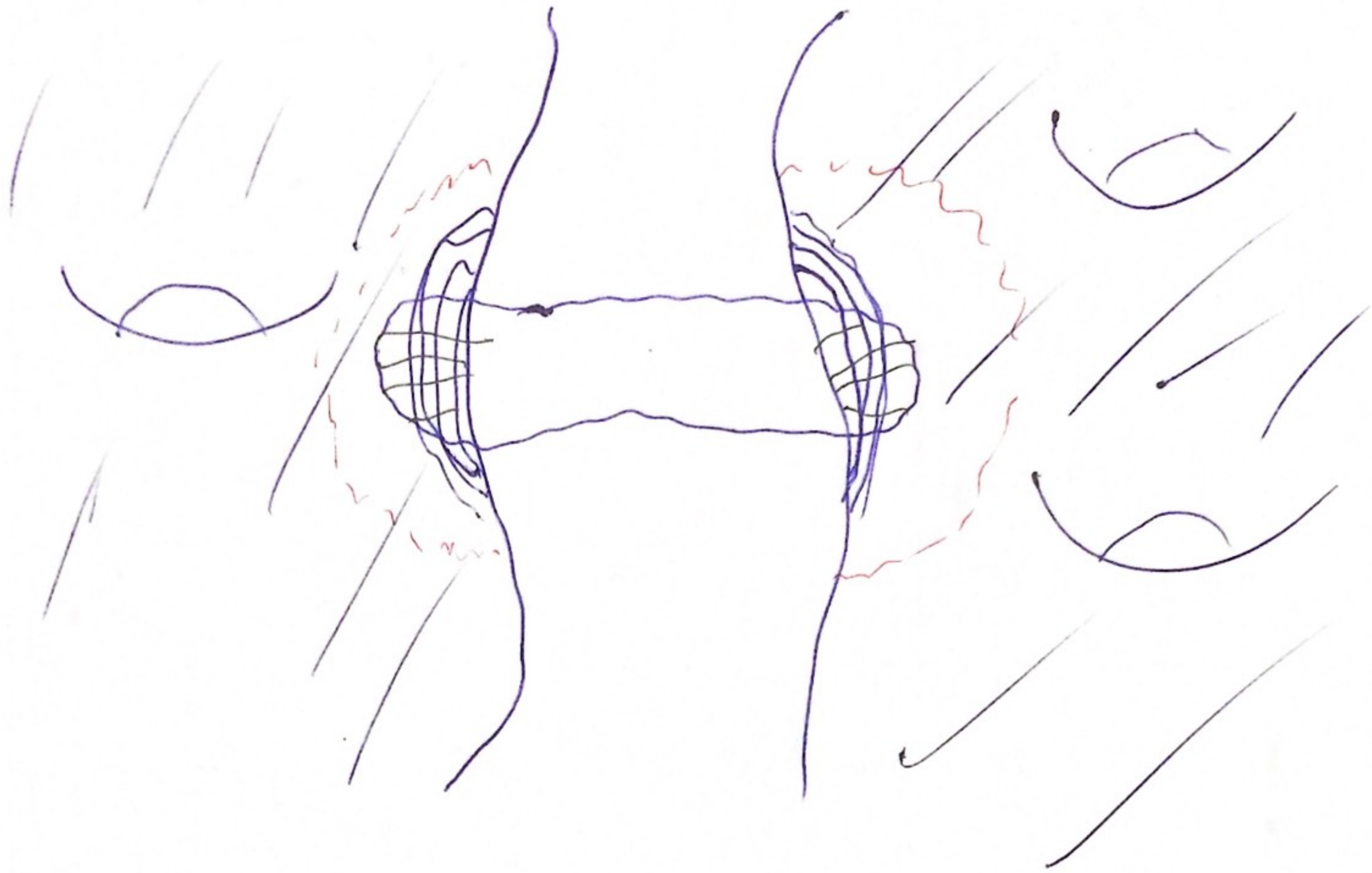
Dieses R_i^* trifft auch $V(G_2) \cap \Omega_1 \subseteq G_{1,R}(P_6)$, also trifft es alle P_i mit $2 \leq i \leq 6$. Nach Lemma 2.6.1 gibt es eine Teilmenge J von $V(R_1^* \cup R_2^*)$ der Göße 5, die Ω_J-Verbindbar aus $V(R_1^* \cup R_2^*)$ in K ist. Auch die Menge I von Endecken der R_j^* ist Ω_J-Verbindbar aus $V(R_1^* \cup R_2^*)$ in K, also gibt es nach Lemma 3.1.5 ein $j \in J \setminus I$ und eine Ω_J-Verbindung für von $I \cup \{j\}$ aus $V(R_1^* \cup R_2^*)$

in K. Für k eine Endecke eines R_j in $S(P_1) \cap G_2$, sei $u(k)$ die nächste Ecke von diesem R_j in $V(G_2) \cap \Omega_1$, $v(k)$ die nächste Ecke von diesem R_j zu k in R_j^*, $L(k)$ der Weg in $\mathcal{L}$ der $v(k)$ enthält und $w(k)$ die andere Endecke von $L(k)$, die dann auch in $S(P_1) \cap G_2$ liegt.

Da $G_{1,R}(P_1)$ flach ist, liegen die $u(k)$ liegen auf $V(G_2) \cap \Omega_1$ in der entgegengesetzten Reihenfolge wie die k auf P_1, also liegen die $w(k)$ in derselben Reihenfolge wie die k auf P_1.

Deshalb bildet die Vereinigung von den R_j^* mit allen $L(k)$ ein Ω_3-Kreuz in G_3, das dieselbe Kanten wie (R_1, R_2) außerhalb von K benutzt. $\mathcal{L}$ enthält aber auch einen Weg in K von Ω_3 zu einer inneren Ecke eines R_j^*, also gibt es nach Bemerkung 6.2.3 ein Ω_3-Kreuz in G_3 mit weniger Kanten außerhalb von K ※ □

Korollar 6.2.5: Im Kontext von Lemma 6.2.4, sei ρ die Ω_1-Wiedergabe von G_1 und sei X' ein Intervall von $\Omega_{1,L}(P_1)$, der $S(P_1) \cap V(G_2)$ enthält. Dann gibt es eine $(\Omega_{1,L}(P_1) \setminus X') \cup (\Omega_2 \setminus X)$-Wiedergabe von $G_{1,L}(P_1) \cup G_2$, die auf $\Sigma_{1,L}(P_1)$ mit ρ übereinstimmt.



6.3: Geschicktes Zusammenkleben von Wiedergaben.

Definition 6.3.1: Sei Σ eine Fläche und G ein Graph. Eine **Σ-Wiedergabe** von G ist ein Tripel $\rho := (\Gamma, \sigma, \pi)$, wo Γ eine Gemälde in Σ ist, σ jeder Zelle c in Γ eine Teilmenge $\sigma(c)$ von $V(G)$ zuordnet und $\pi : N(\Gamma) \to V(G)$ injektiv ist, sodass [illegible] (Γ, σ, π) die Bedingungen (W1)–(W3) aus Definition

3.3.2 erfüllt. Sei nun $\Sigma' \subseteq \Sigma$, sodass $\partial\Sigma' \cap (\bigcup\Gamma) \subseteq N(\Gamma)$. Wir setzen $\Gamma\restriction_{\Sigma'} = \{c \in \Gamma : c \subseteq \Sigma'\}$, $\sigma\restriction_{\Sigma'} := \sigma\restriction_{\Gamma\restriction_{\Sigma'}}$, $\pi\restriction_{\Sigma'} := \pi\restriction_{N(\Gamma\restriction_{\Sigma'})}$ und

$$G\restriction_{\Sigma'} = \bigcup_{c \in \Gamma\restriction_{\Sigma'}} G[\sigma(c)].$$

Dann ist ~~...~~

$$\rho\restriction_{\Sigma'} := (\Gamma\restriction_{\Sigma'}, \sigma\restriction_{\Sigma'}, \pi\restriction_{\Sigma'})$$ eine Σ'-Wiedergabe von $G\restriction_{\Sigma'}$.

Wir nennen (G, ρ) ein Σ-Gebiet in H falls $G \subseteq H$ und für jede Ecke v von G mit einem Nachbarn in $H \setminus G$ der Form $\pi(x)$ ist für ein $x \in \partial\Sigma$.

<u>Bemerkung 6.3.2</u>: Sei (G, ρ) ein Σ-Gebiet in H und $\Sigma' \subseteq \Sigma$ wie in Definition 6.3.1. Dann ist auch $(G\restriction_{\Sigma'}, \rho\restriction_{\Sigma'})$ ein Σ'-Gebiet in H

<u>Lemma 6.3.3</u>: Sei (G,ρ) ein Σ-Gebiet in H, mit $\rho = (\Gamma, \sigma, \pi)$. Seien D_1, D_2 Bögen in Σ, die $\partial\Sigma$ nur in ihren Endecken schneiden, und sodass eine Komponente Δ_i wenn wir Σ entlang D_i schneiden eine Kreisscheibe ist und $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$. Sei D_i' der Teilbogen von $\partial\Sigma$ mit $\partial\Delta_i = D_i \cup D_i'$.

Sei Ω_i die Menge $\pi(N(\Gamma) \cap \partial\Delta_i)$, mit der von $\partial\Delta_i$ induzierten zyklischen Ordnung.

Sei $P_1^i \dots P_6^i$ eine planare Verbindung in der Gesellschaft $(G\restriction_{\Delta_i}, \Omega_i)$, sodass $(G\restriction_{\Delta_i})_R(P_1^i)$ von $\pi(N(\Gamma) \cap D_i)$ disjunkt ist.

Sei (G', Ω') ein flaches Gebiet in H, sodass $G' \cap G \subseteq G\restriction_{\Delta_1} \cup G\restriction_{\Delta_2}$ und ~~$V(G') \cap \Omega_i$~~
$V(G') \cap \Omega_i \subseteq (G_{\Delta_i})_R(P_6^i)$.

Sei X_i ein Intervall von Ω' mit $\Omega' \cap G\restriction_{\Delta_i} \subseteq X_i$ und $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Seien $Q^i_1 \dots Q^i_5$ disjunkte $((\Omega_2 \cap (G_{\Delta_i})_L(P^i_1)) - P^i_6)$-Wege in $G_{\Delta_i} \cap G'$, deren Endecken in X_i in dieser Reihenfolge und deren Schnitte mit P^i_1 auch in dieser Reihenfolge entlang P^i_1 liegen, und sodass $Q^i_j \cap P^i_1$ vor $Q^i_j \cap P^i_2$ auf Q^i_j liegt.

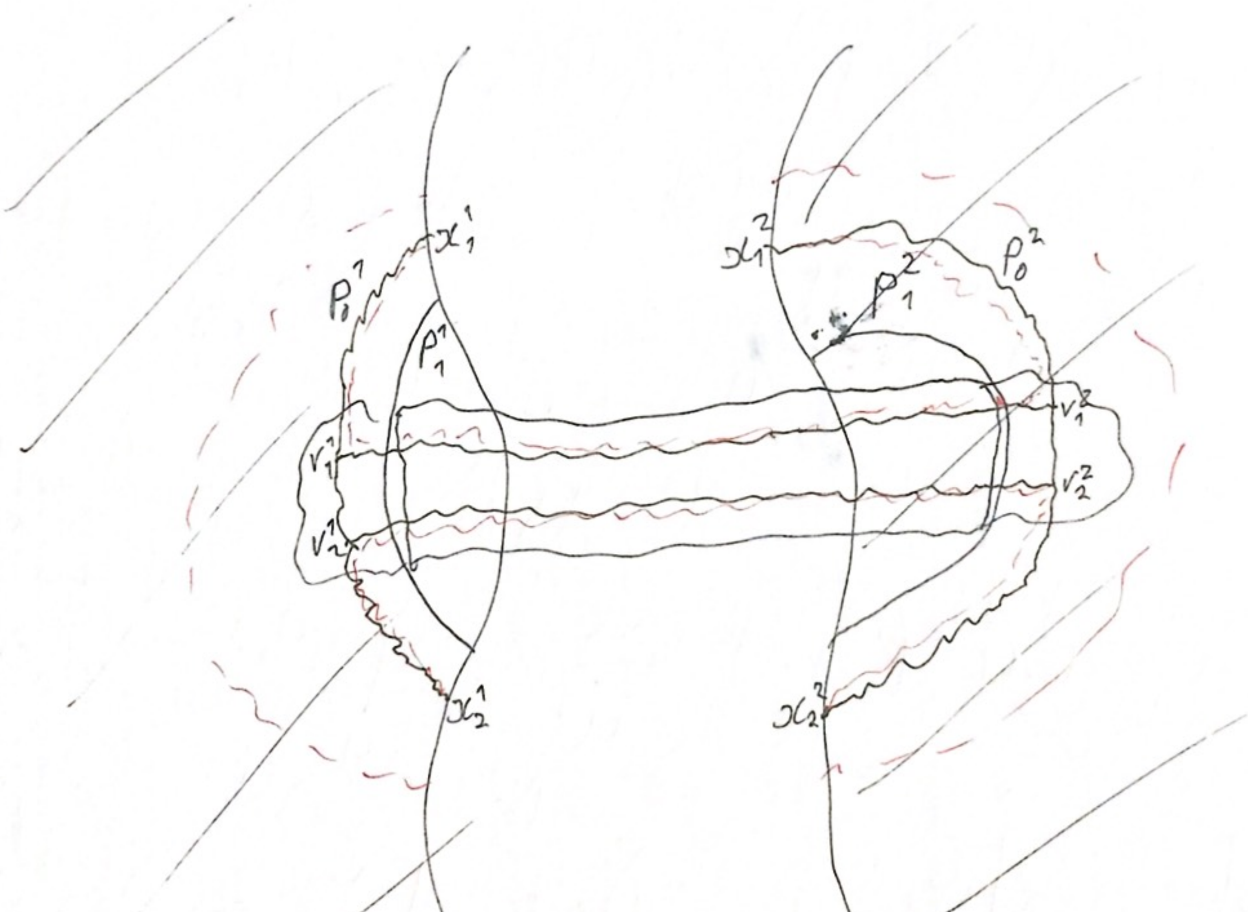
Sei B^i_j der darstellende Bogen für P^i_j wie in Definition 6.1.1, und sei Σ_1 die Vereinigung der Komponenten die entstehen wenn wir Σ entlang B^1_j und B^2_j schneiden und die ~~B^1_j und B~~ D_1 und D_2 enthalten. Sei Σ'' die Fläche die entsteht, indem man 2 gegenüberliegenden Seiten eines Quadrats Q entlang die B^i_1 klebt (mit entsprechender Orientierung). Dann gibt es eine Σ''-Wiedergabe ρ'' von $G'' = G\restriction_{\Sigma_1} \cup G'$, mit $\rho''\restriction_{\Sigma_1} = \rho\restriction_{\Sigma_1}$.

Beweis: Zuerst wenden Lemma 6.2.4 zweimal an, um eine

$$\left(S(P_1^1)\cap G'\right)\cap\left(S(P_1^2)\cap G'\right)\text{-Wiedergabe } \tilde{\rho}^*$$

von $\hat{G} = G' \setminus \bigcup_{i=1}^{2}\left(G_{\Delta i}\setminus (G_{\Delta i})_R(P_1^i)\right)$ zu

finden. Dann kleben wir dieses auf $\rho\restriction_{\Sigma_1}$ entlang die B_1^i. $\square$



<u>Lemma 6.3.4</u>: Im Kontext von Lemma 6.3.3, sei P_0^i ein Ω_i-Weg in $G\restriction_{D_i}$ mit Endecken x_1^i und x_2^i in $\pi(N(\Gamma)\cap D')$, sodass $P_1^i \dots P_6^i$ in $(G\restriction_{\Delta_i})_R(P_0^i)$ liegen und P_0^i in $(G\restriction_{\Delta_i})_L(P_0^i)$ liegt. Seien S_1, S_2 disjunkte $(P_0^1 - P_0^2)$-Wege in G', wobei die Endecken von S_j auf P_0^i v_j^i ist und v_1^i zwischen x_1^i und v_2^i auf P_0^i liegt. Sei

$$S_j' := x_j^1 P_0^1 v_j^1 S_j v_j^2 P_j^2 x_j^2.$$

Sei K ein zusammenhängender Teilgraph von $G' \setminus (S_1' \cup S_2')$, der $v_1^1 P_0^1 v_2^1$ trifft. Dann gibt es eine Teilfläche Σ''' von Σ'', sodass $(G''\restriction_{\Sigma'''}, \rho''\restriction_{\Sigma'''})$ ein Gebiet ist, $\Sigma''' \cong \Sigma''$, $\Sigma_0 \subseteq \Sigma'''$ und $K \subseteq G''\restriction_{\Sigma'''}$.

Beweis: Sei $\overline{B}_j$ ein Bogen ~~in~~ von $\pi^{-1}(x_j^1)$ nach $\pi^{-1}(x_j^2)$

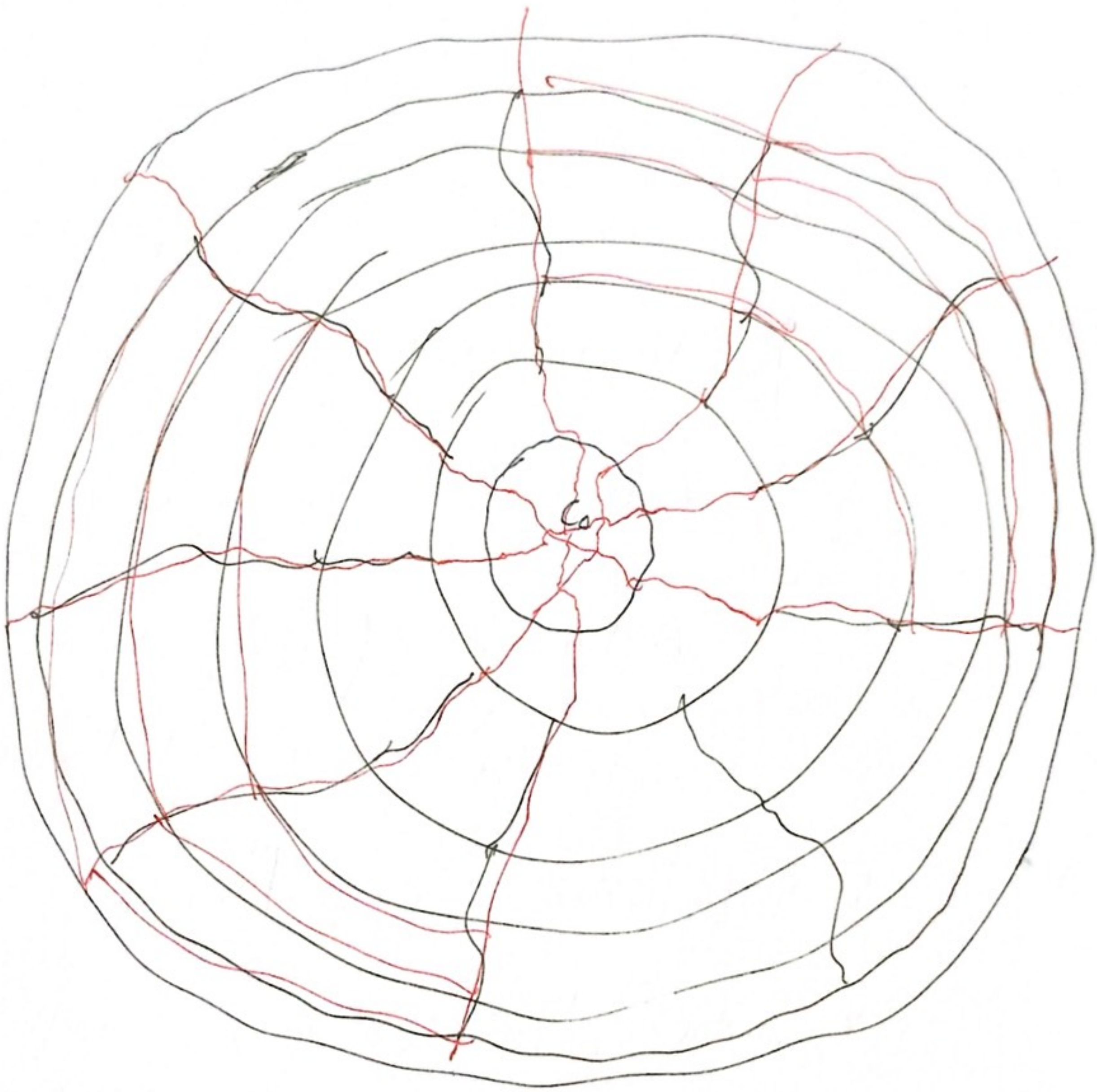
in $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup Q$ und ~~[illegible]~~ $\cup \Gamma$ und der Rand dieser Fläche nur in $\pi^{-1}(S_j')$ ~~trifft~~, und sei $\overline{\Delta}$ die Komponente ~~[illegible]~~ wenn man $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup Q$ entlang $\overline{B}_1$ und $\overline{B}_2$ schneidet, die $\overline{B}_1$ und $\overline{B}_2$ enthält. Sei $\Sigma''' := \Sigma_0 \cup \overline{\Delta}$.

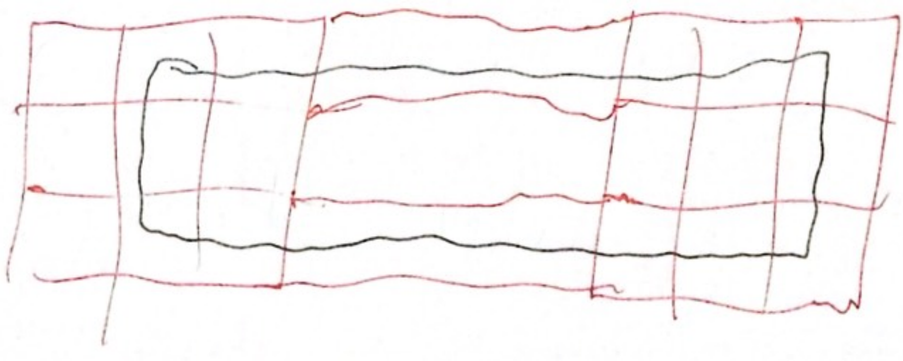
Wir zeigen zuerst, dass $(G''\restriction_{\Sigma'''}, \rho\restriction_{\Sigma'''})$ ein Σ'''-Gebiet in H ist. Sei $v \in V(G''\restriction_{\Sigma'''})$ mit einem Nachbarn w außerhalb von $G''\restriction_{\Sigma'''}$. Also gibt es $x \in N(\Gamma)$ mit $\pi(x) = v$.

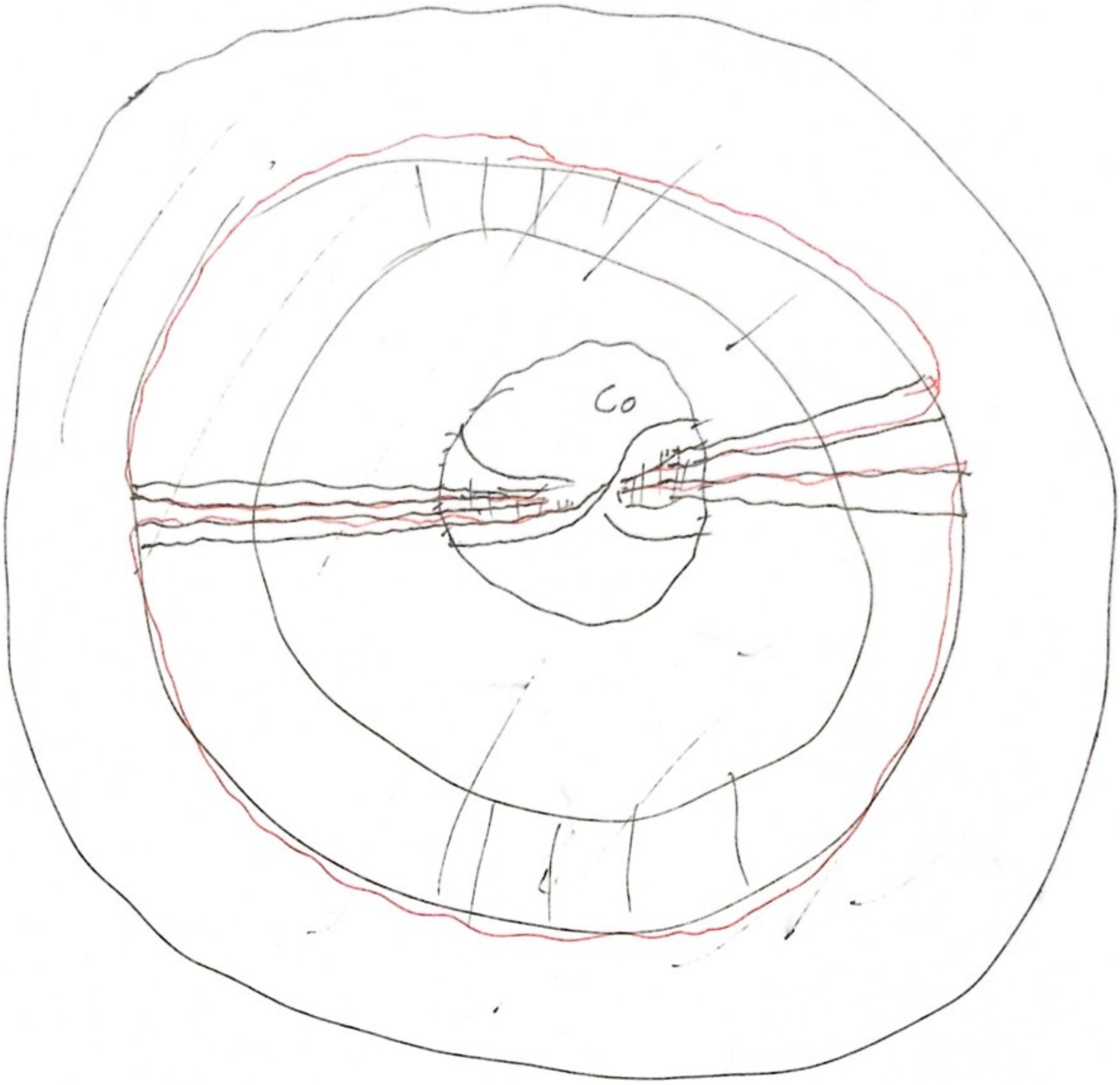
Fall 1: $v \in G' \setminus \Omega'$. Dann $w \in G'$, also $w \in G''\restriction_{\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup Q}$, woraus folgt $x \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 \subseteq \partial\Sigma'''$.

Fall 2: $v \notin G' \setminus \Omega'$. Dann $x \in \Sigma_0$, und deshalb $x \in \partial\Sigma_0$. Also gilt $x \in \partial\Sigma'''$.

Die Ecke von K in $v_1^1 P_0^1 v_2^1$ liegt in $G''\restriction_{\Sigma'''}$, also da K zusammenhängend ist und $\{v \in G''\restriction_{\Sigma'''} : \pi^{-1}(v) \in \partial \Sigma'''\}$ nicht trifft gilt $K \subseteq G''\restriction_{\Sigma'''}$ $\square$







__Bemerkung 6.3.5__: In den Anwendungen werden wir die Wege P_j^i, Q_j^i usw. nicht explizit angeben; es wird immer große Maschen in $G \cup G'$ geben, wo es einfach ist, die entsprechende Wege zu finden.