Kapitel 4: Der Flachenmaschensatz

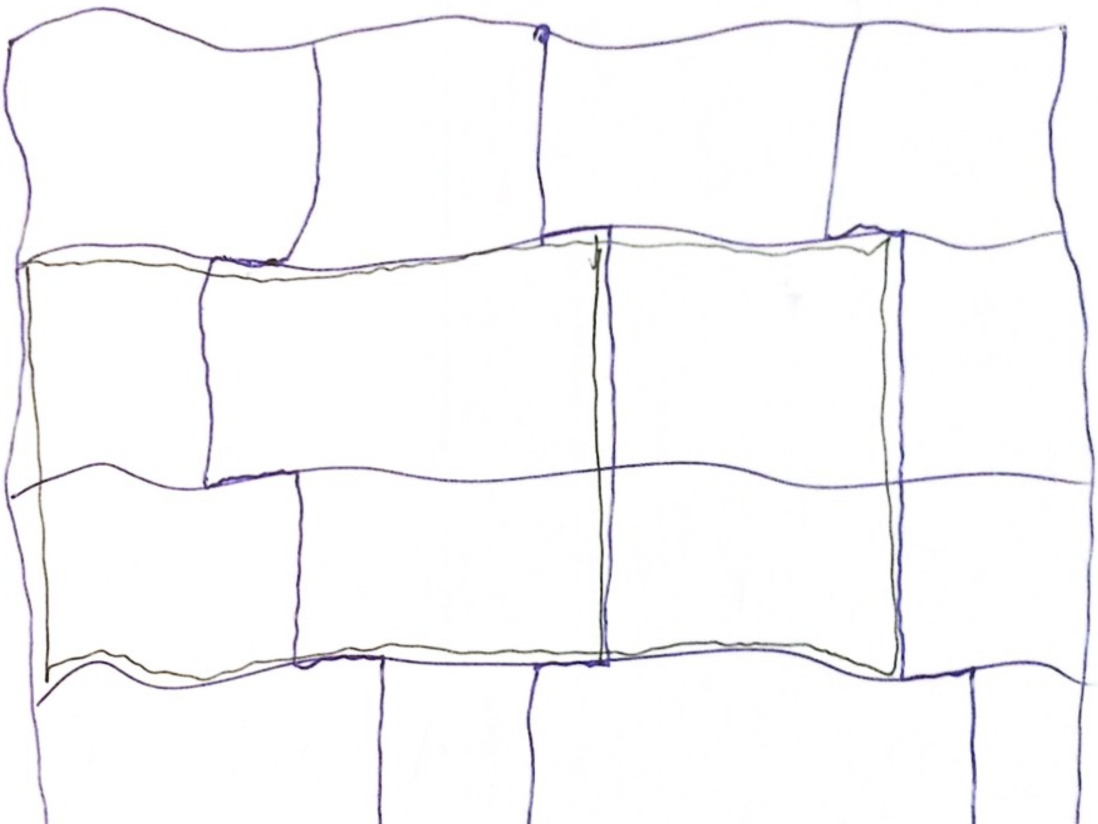
4.1: Flache Maschen

<u>Definition 4.1.1:</u> Eine $r \times s$-<u>Masche</u> in einem Graphen G ist ein $r \times s$-Gitter-Minor, der kantenminimal mit dieser Eigenschaft ist, und sodass die Verzweigungsmengen der Ecken $(1,1)$, $(1,s)$, $(r,1)$ und (r,s) des Gitters Singletons sind.

In einem $r \times s$-Gitter $H_{r \times s}$ sind die <u>senkrechte Wege</u> die Wege Q_i mit Eckenmengen $\{i\} \times [1,s]$ und die <u>waagerechte Wege</u> die Wege P_i mit Eckenmengen $[1,r] \times \{i\}$.

In einer $r \times s$-Masche M mit Verzweigungsmengen $X_{i,j}$, nehmen wir als P_1 bzw. P_s die eindeutige Wege von $X_{1,1}$ nach $X_{1,r}$ durch die $X_{1,i}$ bzw von $X_{s,1}$ nach $X_{s,r}$ durch die $X_{s,i}$

Als <u>senkrechter Weg</u> Q_i nehmen wir den $(P_1 - P_s)$-Weg durch die $X_{i,j}$ mit $1 \leq j \leq s$. Als <u>waagerechter Weg</u> P_i nehmen wir den $(Q_1 - Q_r)$-Weg durch die $X_{j,i}$ mit $1 \leq j \leq r$.



Eine Masche M' heißt <u>Teilmasche</u> von M, falls die senkrechte ~~Wege~~ bzw. waagerechte Wege von M' Teilwege der senkrechten bzw. waagerechten Wegen von M sind.

Der äußere Kreis einer solchen Masche M ist $P_1 \cup P_s \cup Q_1 \cup Q_r$. Eine r-Masche ist eine $r \times r$-Masche.

Bemerkung 4.1.2: Verzweigungsmengen in Maschen sind Vereinigungen von 2 Wegen.

Definition 4.1.3: Eine Masche greift ein K^t-Minor falls es für jede Verzweigungsmenge X dieses Minors es verschiedene $i_1 \dots i_t$ und $j_1 \dots j_t$ gibt mit $P_{i_l} \cap Q_{j_l} \subseteq X$ für alle $l \leq t$.

Definition 4.1.4: Sei D der äußere Kreis einer Masche M. M heißt *flach* in G falls es eine Separation (A,B) von G gibt, mit $A \cap B \subseteq V(D)$ und $M \subseteq G[B]$, sodass es eine $A \cap B$-Wiedergabe von $G[B]$ gibt, wobei die zyklische Ordnung auf $A \cap B$ von D induziert wird, und sodass jede ~~Verzweigung~~ Verzweigungsmenge, die D trifft, auch $A \cap B$ trifft.

Satz 4.1.5 (Der Flachenmaschensatz)

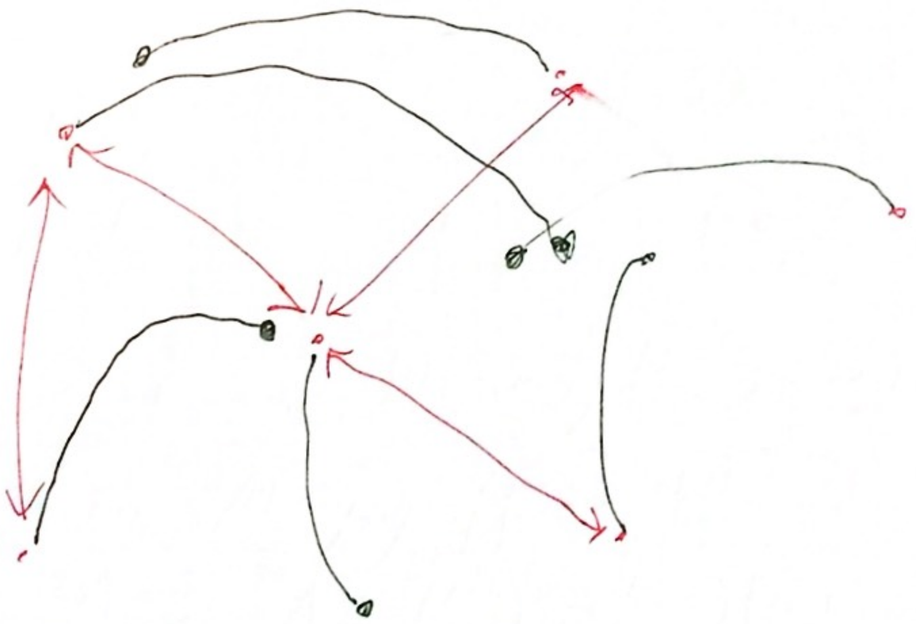
Seien $r, t \in \mathbb{N}$ und sei $T \gg t$. Sei G ein Graph und sei M eine R-Masche in G mit $R \gg r, t$. Dann gibt es eins von:

→ Einen von M gegriffenen K^t-Minor

→ Eine Menge $A \subseteq V(G)$ mit $|A| \leq T$ und eine r-Teilmasche M' von M, die von A disjunt und in $G \setminus A$ flach ist.

4.2 Disjunkte lange Sprünge

<u>Definition 4.2.1</u>: Sei G ein Graph, M ein Teilgraph von G und R eine reflexive symmetrische Relation auf $V(M)$. Disjunkte M-Wege $P_1 \dots P_k$ sind <u>R-halbverstreut</u>, falls wir die Endecken von P_i als x_i, y_i so wählen können, dass $(x_i, y_i) \notin R$ für $i \leq k$ und $(x_i, x_j) \notin R$ für $i, j \leq k$.



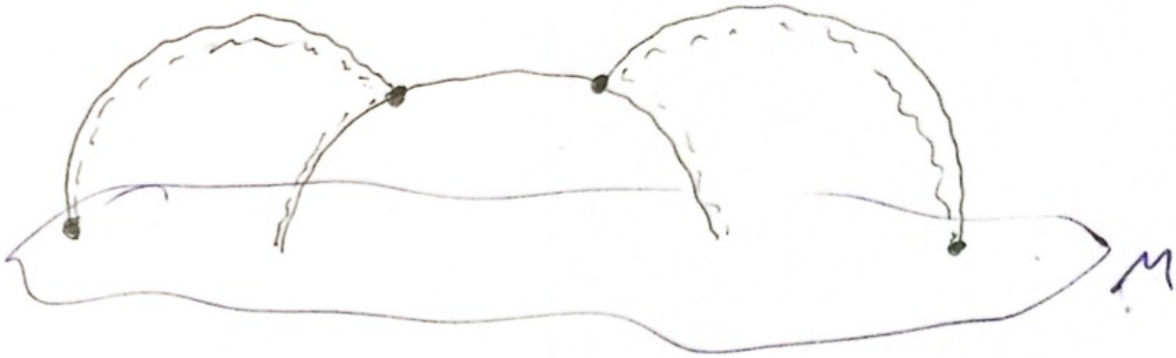
Für $x \in M$ sei $R(x)$ die Menge $\{y \in V(M) : R(x,y)\}$.

<u>Lemma 4.2.2</u>: Seien G, M und R wie in Definition 4.2.1. Falls es keine Menge von k R-halbverstreuten Wegen gibt, dann gibt es Mengen $A \subseteq V(G)$ und $Z \subseteq V(M)$ mit $|A| \leq k-1$ und $|Z| \leq 3k-3$, sodass

- jeder M-Weg P in $G-A$ mit Endecken x, y eins von $(x,y) \in R$ oder $x, y \in \bigcup_{z \in Z} R(z)$ erfüllt.

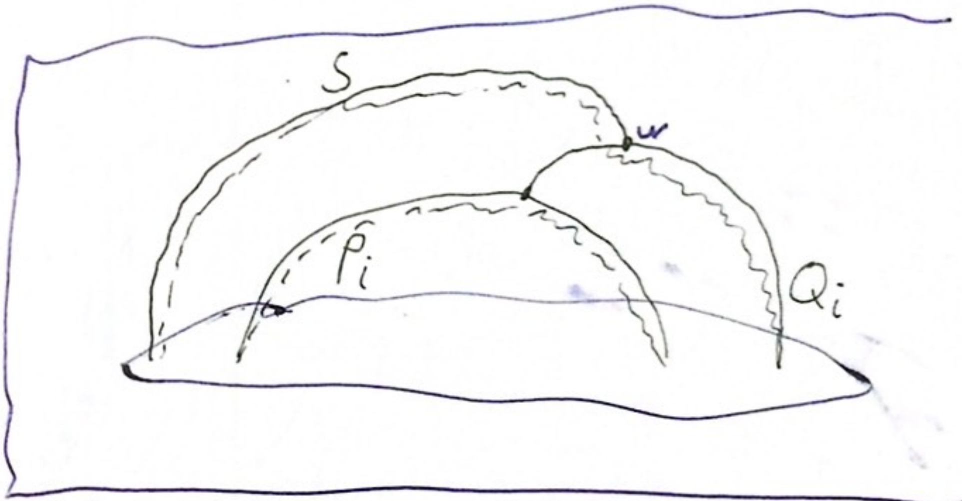
<u>Beweis</u>: Sei $\{P_1 \dots P_s\}$ eine größtmögliche R-halbverstreute Menge von Wegen mit Endecken x_i, y_i wie in Definition 4.2.1. Dann $s \leq k-1$.

Sei $X = \{x_i \mid i \leq s\} \cup \{y_i \mid i \leq s\}$.



Ein <u>Ausgangsweg</u> von P_i ist ein $\left(\left(\bigcup_{i=1}^{s} P_i\right) - M\right)$- Weg mit einer Endecke in P_i, dessen Endecke in M nicht in $\bigcup_{x \in X} R(x)$ liegt. Indem wir die P_i umsortieren, können wir annehmen, dass $P_1 \dots P_p$ Ausgangswege haben, aber $P_{p+1} \dots P_s$ keine Ausgangswege haben. Für $i \leq p$, sei Q_i ein Ausgangsweg von P_i mit Endecken a_i bzw. z_i in P_i bzw. M. Sei $A := \{a_i | i \leq p\}$ und $Z = X \cup \{z_i | i \leq p\}$.

Angenommen es gibt einen M-Weg S in $G-A$ mit Endecken x, y. sodass $(x,y) \notin R$ und $y \notin \bigcup_{z \in Z} R(z)$. Also trifft S wegen der Maximalität von $\{P_1 .. P_s\}$ mindestens ein P_i. Sei v die letzte Ecke von S in $\bigcup_{i=1}^{s} P_i$; angenommen $v \in P_i$. Da vS ein Ausgangsweg von P_i ist, gilt $i \leq p$. Sei w die letzte Ecke von S in $P_i \cup Q_i$. Da $w \neq a_i$, besteht $P_i \cup Q_i \cup S$



aus 2 M-Wegen P, P', zusammen mit einem $(P-P')$-Weg.

Dann erhalten wir eine größee Menge von R-halbverstreuten Wegen, indem wir P_i durch P und P' ersetzen. $\divideontimes$

$\square$

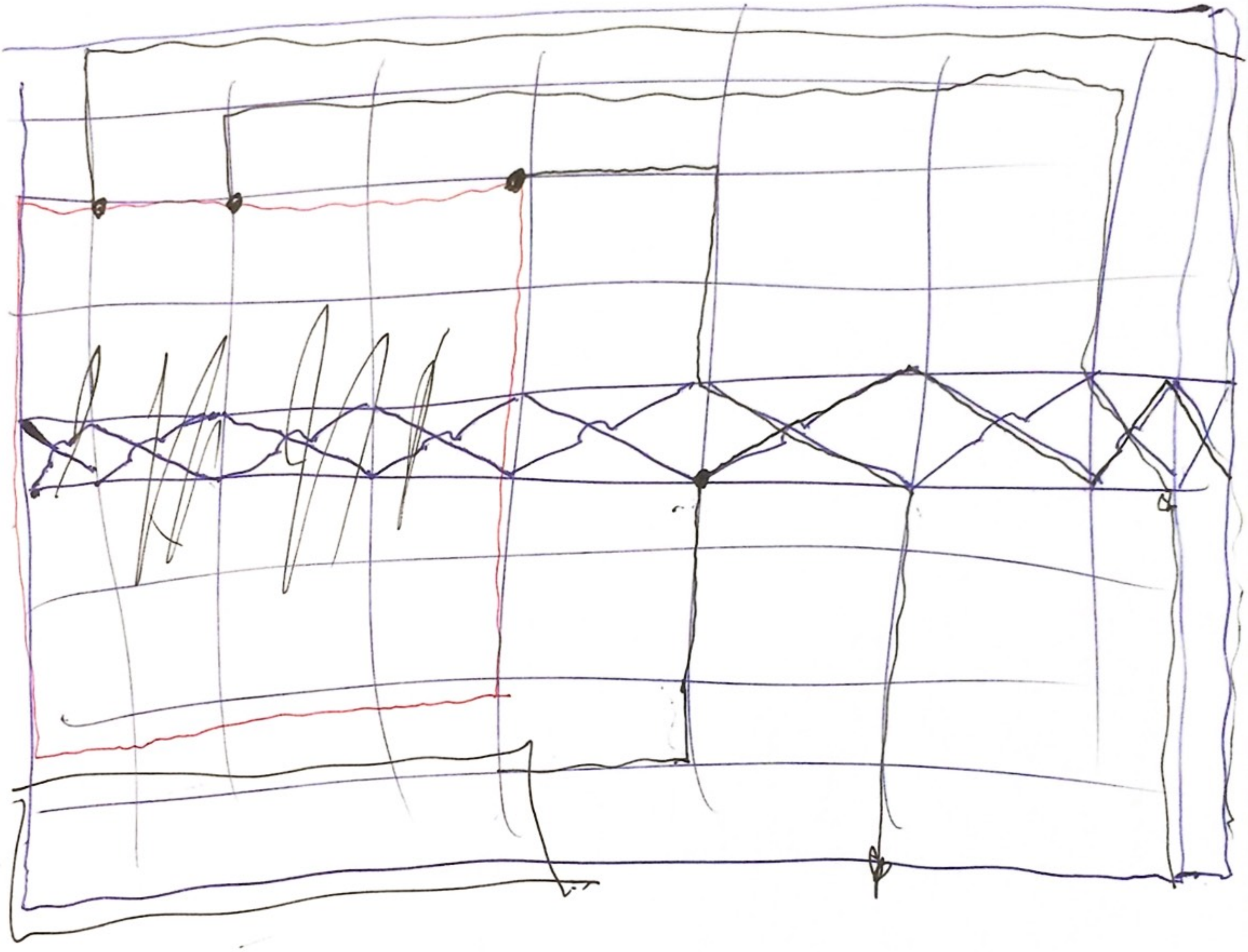
4.3: Viele lange M-Wege.

Definition 4.3.1: $H^{\times}_{2r}$ besteht aus dem $2r \times 2r$-Gitter zusammen mit neuen Kanten von (i,r) nach $(i+1,r+1)$ und von $(i,r+1)$ nach $(i+1,r)$ für $i < 2r$.

Lemma 4.3.2: Sei $t \geq 2$. Dann hat $H^{\times}_{t(t-1)}$ einen K^t-Minor, der vom unterliegenden Gitter gegriffen wird, und sodass jede Verzweigungsmenge eine Ecke der Form $(x, t(t-1))$ enthält.

Beweis: Induktion nach t. Der IA $t=2$ ist klar.

Induktionsschritt: Sei $A = [1,(t-1)(t-2)] \times [t,(t-1)^2]$. Dann ist $(x,y) \longmapsto (x, (t-1)^2+1-y)$ ein Isomorphismus von $H^{\times}_{(t-1)(t-2)}$ nach $H^{\times}_{t(t-1)}[A]$, also 66



finden wir nach der Induktionshypothese einen K_{t-1}-Minor von $H^{x}_{t(t-1)}[A]$ mit Verzweigungsmengen, ~~die Ecken der Form~~ $(X_i)_{i \leq t-1}$, die Ecken der Form (x_i, t) enthalten. Sei

$$X_t' := \left\{\left((t-1)(t-2)+2i+1, \frac{t(t-1)}{2}\right) : i \leq \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor\right\}$$

$$\cup \left\{\left((t-1)(t-2)+2i, \frac{t(t-1)}{2}+1\right) : i \leq \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil\right\}$$

$$\cup \left\{(t-1)(t-2)+1\right\} \times \left[\frac{t(t-1)}{2}+1, t(t-1)\right]$$

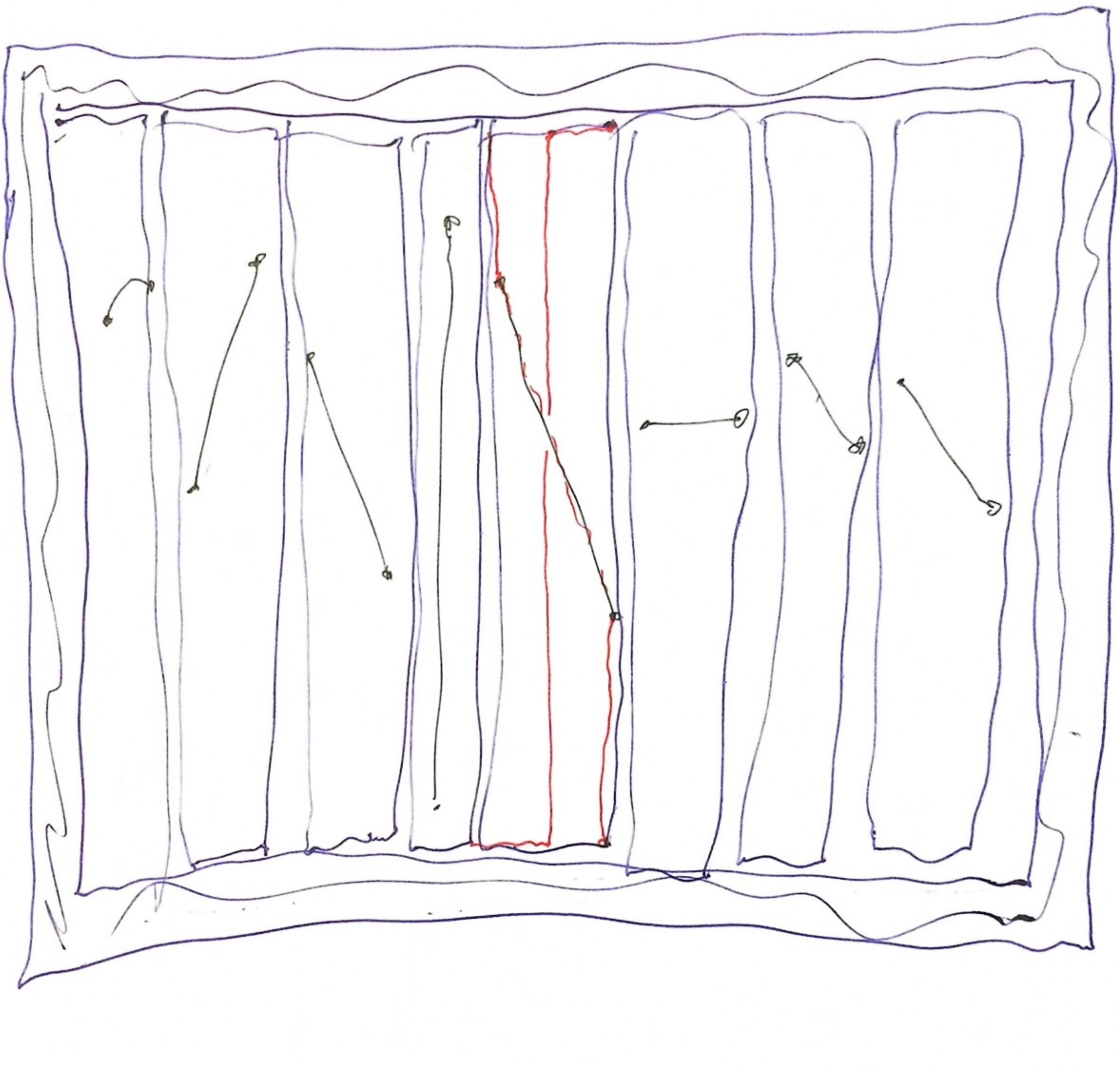
$$\dot{\cup} \left[1, (t-1)(t-2)\right] \times \left[(t-1)^2+1, t(t-1)\right]$$

Sei $\mathcal{P} = \{\{x_i\} \times [1, t-1] : i \leq t-1\}$ und sei $\mathcal{Q}$ eine Menge von $t-1$ disjunkten $(P_1 - P_{t(t-1)})$-Wegen, die von A und X_t' disjunkt sind. Lemma 2.4.1 für $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ und $P_1 \dots P_{t-1}$ impliziert, dass wir disjunkte Wege R_i von $(x_i, t-1)$

nach $P_{t(t-1)}$ finden in $H^{x}_{t(t-1)} \setminus (A \cup X_t')$ für $i \leq t-1$.
Sei $X_i' = X_i \cup R_i$ für $i \leq t-1$. Dann bilden $X_1', \dots X_t'$ die Verzweigungsmengen eines passenden K^t-Minors. □

<u>Definition 4.3.3</u>: Der d-Rand des $r \times s$-Gitters besteht aus allen Ecken (i,j) mit $i \leq d$, $j \leq d$, $i \geq r+1-d$ oder $j \geq s+1-d$.

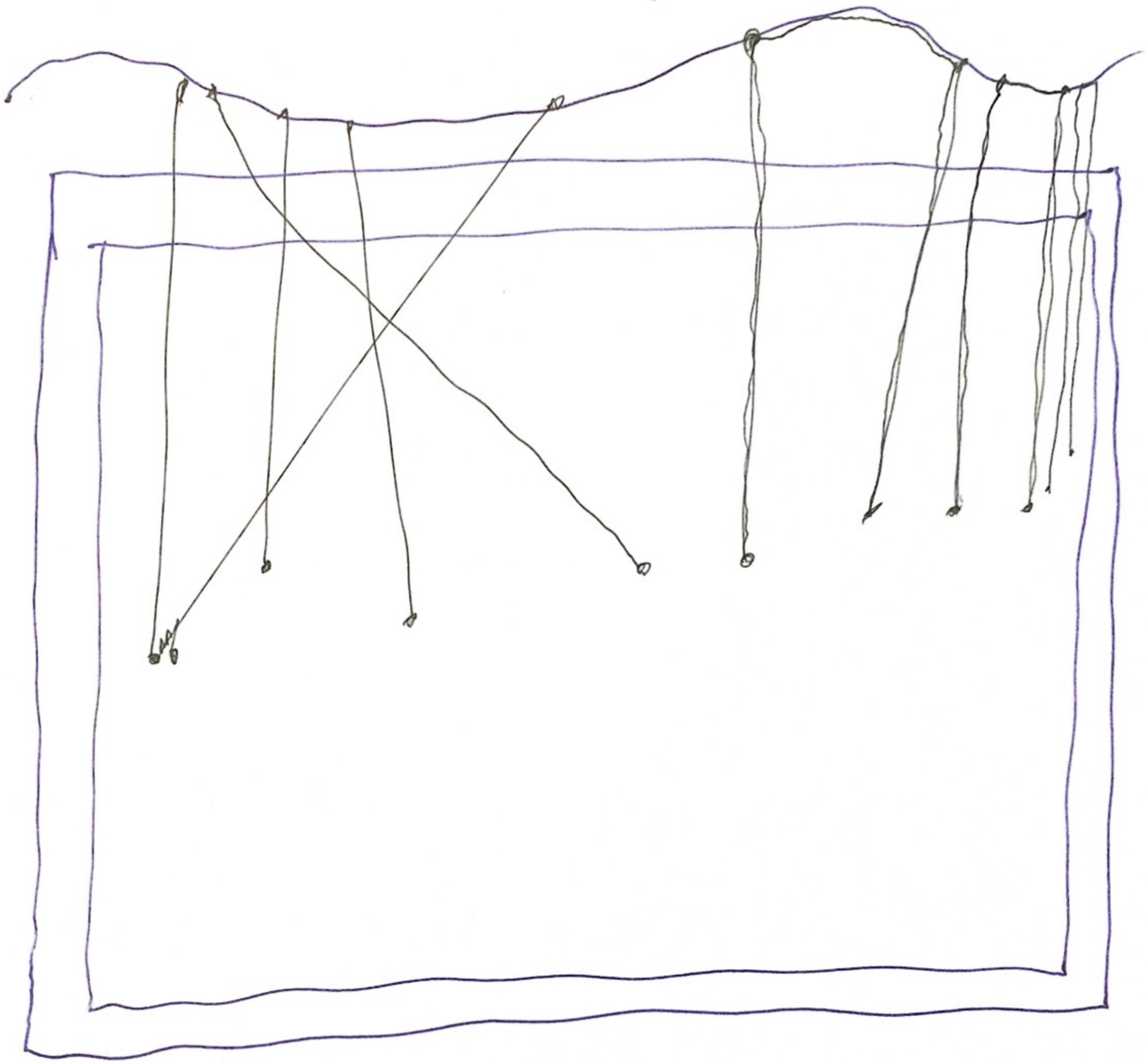
<u>Lemma 4.3.4</u>: Sei G ein Graph und sei $H \subseteq G$ ein Gitter. Seien $R_1, \dots R_{t(t-1)}$ H-Wege von G, wobei die Endecken (u_i, v_i) und (w_i, z_i) von R_i nicht im $\left(\frac{t(t-1)}{2}+1\right)$-Rand von H liegen und $u_i + 2 \leq w_i \leq u_{i+1}$ für $i \leq t(t-1)$. Dann hat G einen K^t-Minor, der von H gegriffen wird



Beweis: Sei H ein $r \times s$-Gitter. Für $i \leq t(t-1)$ enthält $H\left[\left[u_i, w_i\right] \times \left[\frac{t(t-1)}{2}, s+1-\frac{t(t-1)}{2}\right]\right] \cup R_i$ disjunkte Wege von $\left(u_i, \frac{t(t-1)}{2}\right)$ nach $\left(w_i, s+1-\frac{t(t-1)}{2}\right)$ und von $\left(u_i, s+1-\frac{t(t-1)}{2}\right)$ nach $\left(w_i, \frac{t(t-1)}{2}\right)$, also enthält G einen $H^{\times}_{t(t-1)}$-Minor, dessen unterliegendes Gitter ein Teilgitter von H ist. Wir wenden Lemma 4.3.2 in diesem Minor an. $\square$

Lemma 4.3.5: Sei G ein Graph und seien $H, H' \subseteq G$ disjunkte Gitter. Sei $(P_i : i \in I)$ eine Familie von disjunkten $(H-H')$-Wegen in G mit $|I| \gg t$, die vom $\left(\frac{t(t-1)}{2}+1\right)$-Rand von H disjunkt sind. Dann hat G einen K^t-Minor, der von H gegriffen wird.

Beweis: Da H' ein Hamiltonweg besitzt, ist es O.B.d.A. ein Weg.



Wir definieren eine totale Ordnung auf I mit $i < j$ falls P_i H' vor P_j ~~trifft~~. Sei $x_i = (u_i, v_i)$ die Endecke von P_i in H und y_i die Endecke von P_i in H'

Dann gibt es O.B.d.A. $i_1 \dots i_n \in I$ mit $n \gg t$ $u_{i_1} < u_{i_2} < \dots < u_{i_n}$. Nach dem Satz von Erdös und Szekeres gibt es O.B.d.A eine aufsteigende ~~Folge~~ Teilfolge $j_1 < j_2 < \dots j_{3t(t-1)}$. Sei $Q_i := P_{j_{3i-2}} y_{j_{3i-2}} H' y_{j_{3i}} P_{j_{3i}}$. Dann können wir Lemma 4.3.4 für H und diese Q_i anwenden. $\square$.

<u>Lemma 4.3.6:</u> Sei G ein Graph und sei $H \subseteq G$ ein Gitter. Sei $(P_i : i \in I)$ eine Familie von disjunkten H-Wegen in G mit Endecken x_i, y_i, sodass:

(i) $|I| \gg t$

(ii) Kein x_i liegt im $t(t-1)+2$-Rand von H

(iii) $d_H(x_i, y_i) \geq 2t(t-1)+3$ für $i \in I$.

Dann hat G einen K^t-Minor, der von H gegriffen wird.

<u>Beweis:</u> Der $\frac{t(t-1)}{2}+1$-Rand von H ist eine Vereinigung von ~~...~~ 4 Gitter. Falls also

$$\left|\left\{ i \in I : y_i \text{ im } \frac{t(t-1)}{2}+1\text{-Rand von } H \right\}\right| \gg t,$$

so können wir Lemma 4.3.5 anwenden. Also ~~gilt es O.B.d.A~~ können wir annehmen, dass

$$\left|\left\{ i \in I : y_i \text{ nicht im } \frac{t(t-1)}{2}+1\text{-Rand von } H \right\}\right| \gg t.$$

Sei $x_i := (u_i, v_i)$ und $y_i = (w_i, z_i)$.

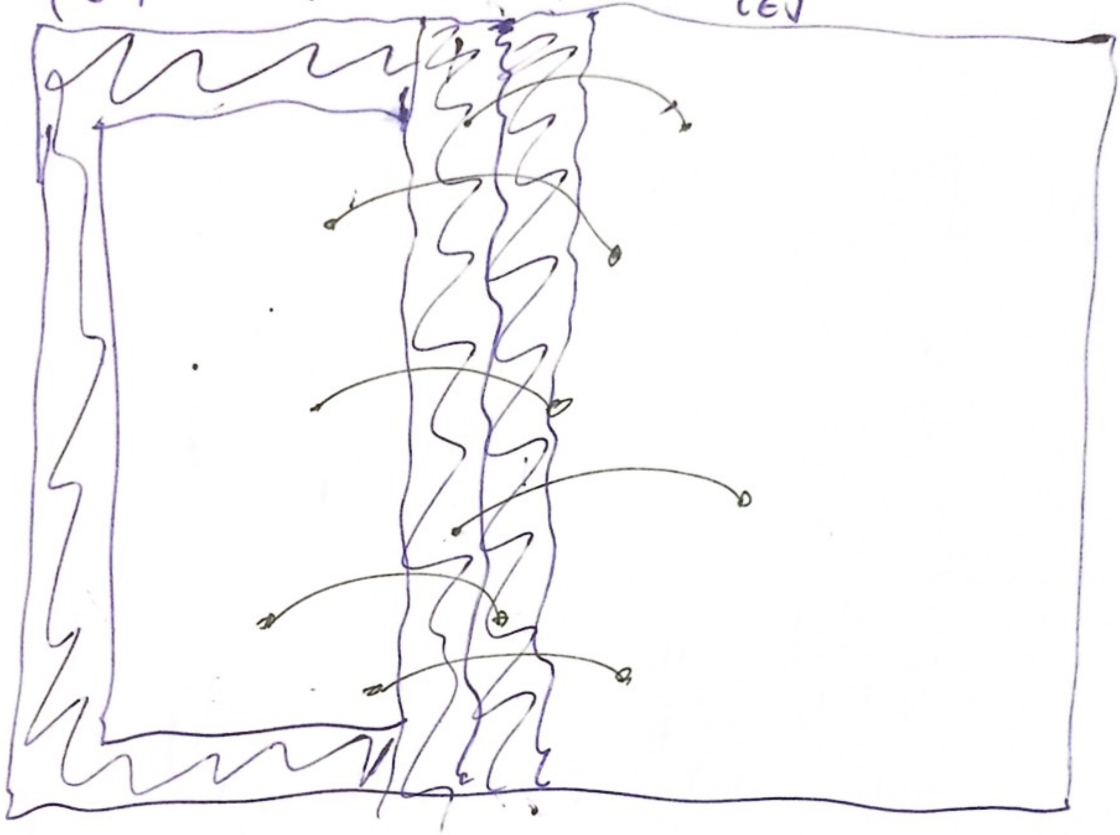
O.B.d.A. gibt es $I' \subseteq I$ mit $|I'| \gg t$ mit y_i nicht im Rand und $|u_i - w_i| \geq t(t-1)+2$ für $i \in I'$.

O.B.d.A. gibt es $I'' \subseteq I'$ mit $|I''| \gg t$ und $w_i > u_i$ für $i \in I''$.

Sei K der Graph auf I'' mit einer Kante von i nach j falls $[u_i, w_i] \cap [u_j, w_j] \neq \emptyset$

Nach dem Satz von Ramsey gibt es ~~ein~~ in K eine große vollständige oder unabhängige Menge.

Fall 1: Es gibt eine vollständige ~~Ma~~ $J \subseteq I''$ mit $|J| >> t$. Sei $u = \max_{i \in J} u_i$



Fall 1.1: Es gibt $J' \subseteq J$ mit $|J'| >> t$ und $u - u_i \geq \frac{t(t-1)}{2} + 1$ für $i \in J'$. Dann wenden wir Lemma 4.3.5 für $H[\{(p,q) \mid p < u\}]$ und $H[\{(p,q) \mid p \geq u\}]$ an.

Fall 1.2: Es gibt $J' \subseteq J$ mit $|J'| >> t$ und $u - u_i < \frac{t(t-1)}{2} + 1$ für $i \in J'$. Dann gilt $w_i \geq u + \frac{t(t-1)}{2} + 2$ für $i \in J'$, und wir wenden Lemma 4.3.5 für $H[\{(p,q) \mid p \leq u + \frac{t(t-1)}{2} + 1\}]$ und $H[\{(p,q) \mid p \geq u + \frac{t(t-1)}{2} + 2\}]$ an

Fall 2: Es gibt eine unabhängige Menge $J'' \subseteq I''$ mit $|J| >> t$. Dann wenden wir Lemma 4.3.4 für die Q_i mit $i \in J$ an $\square$

4.4 Beweis des Flachenmaschensatzes

<u>Definition 4.4.1</u>: Sei M eine Masche, und sei f die Abbildung von $V(M)$ nach der Eckenmenge des entsprechenden Gitters, die die Elementen von $V_{x,y}$ auf (x,y) schickt. Der <u>d-Rand</u> von M ist die Menge von Ecken, die f auf dem d-Rand des Gitters schickt. Das <u>d-Inneres</u> von M ist die größte Teilmasche, die den d-Rand nicht trifft.

Die M-Länge eines M-Weges P von x nach y ist der <u>Abstand</u> im Gitter von $f(x)$ nach $f(y)$. Für ein Intervall $[a,b]$ ist die <u>Teilmasche auf diesem Intervall</u> die größte Teilmasche, deren vertikalen Wegen die Q_i mit $a \leq i \leq b$ ist. die <u>Weite</u> davon ist $b-a$.

<u>Satz 4.4.2</u>: Seien $r, t \in \mathbb{N}$ und sei $T \gg t$. Sei G ein Graph und sei M eine s-Masche in G mit $s \gg r$. Falls es keinen von M gegriffenen K^t-Minor gibt, so gibt es eine Menge $A \subseteq V(G)$ mit $|A| \leq T$ und eine Teilmasche M' auf einem Intervall der Weite r, sodass $V(M') \cap A = \emptyset$ und jeder M'-Weg von M-Länge mehr als $2t(t-1)+3$ beide Endecken im $2t(t-1)+3$-Rand von M' hat.

<u>Beweis</u>: Sei H das $s \times s$-Gitter und sei $f: V(M) \to V(H)$ wie in Definition 4.4.1. Sei H' der Graph der aus H entsteht, indem wir alle Ecken im äußeren Kreis miteinander verbinden. Sei

$$R := \{(v, w) \in V(M)^2 \mid d_{H'}(f(v), f(w)) < 2t(t-1)+3\}$$

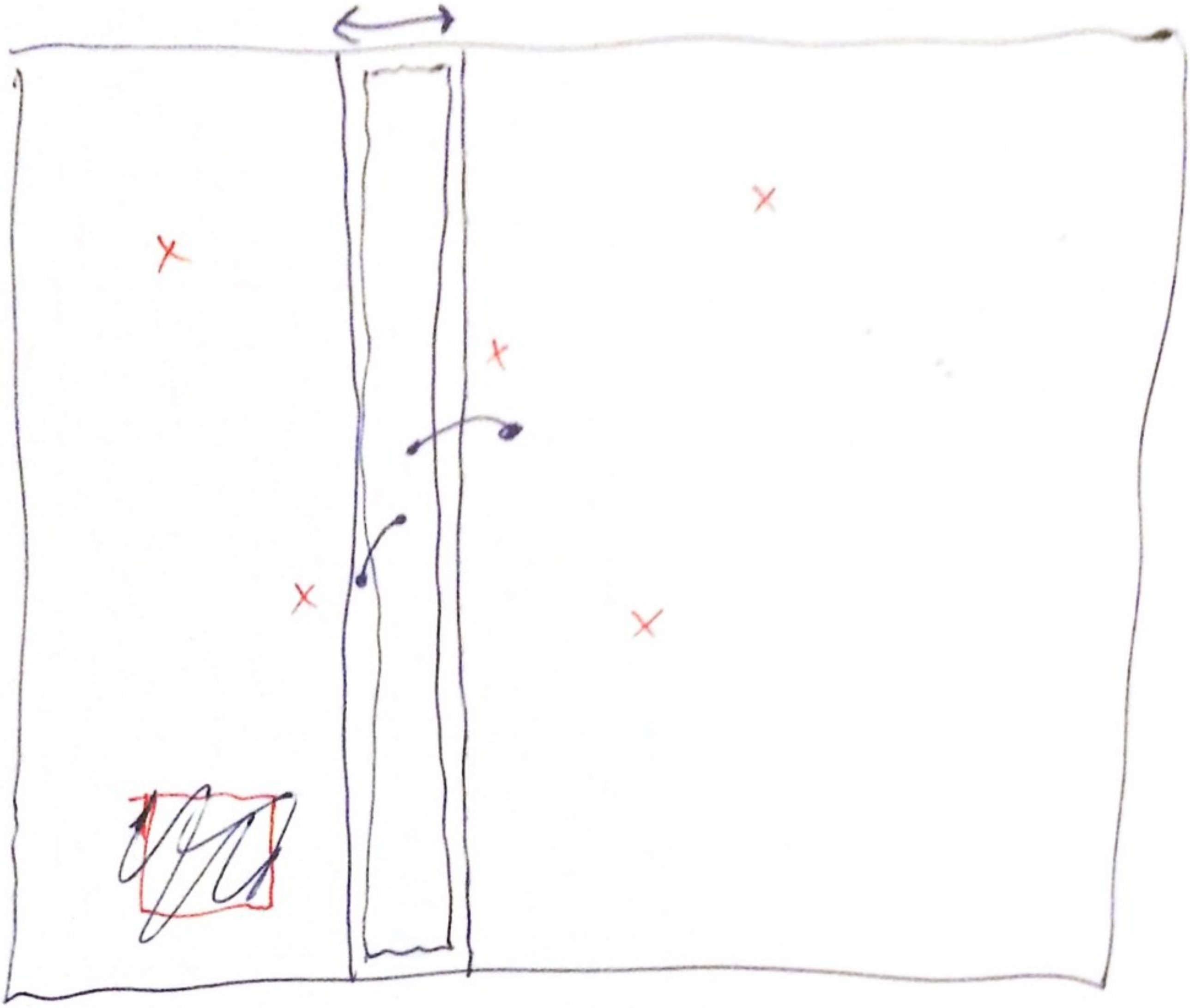
Angenommen es gibt eine R-halbverstreute Familie $(P_i : i \in I)$ von M-Wegen mit $|I| > T$, wobei die Endecken x_i und y_i wie in Definition 4.2.7 gewählt sind. Dann gibt es nicht mehr als ein $i \in I$ mit x_i im $t(t-1)+2$-Rand von M.

Fall 1: Es gibt $I' \subseteq I$ mit $|I'| >> t$, sodass alle y_i mit $i \in I'$ in derselben Verzweigungsmenge liegen. Da diese Verzweigungsmenge eine Vereinigung von 2 Wegen ist und der Rest des Gitters eine Vereinigung von 4 Gitter ist, können wir Lemma 4.3.5 in den Graphen anwenden, wo wir alle andere Verzweigungsmengen kontrahieren, und kriegen ein Widerspruch $\lightning$

<u>Fall 2:</u> Es gibt $I' \subseteq I$ mit $|I'| >> t$, sodass alle y_i mit $i \in I'$ in verschiedenen Verzweigungsmengen liegen. Dann gibt es $I'' \subseteq I'$ mit $|I''| >> t$ mit allen x_i, y_i in verschiedenen Verzweigungsmengen für $i \in I''$, also kriegen wir ein Widerspruch zu Lemma 4.3.6 in dem Graphen, wo wir alle Verzweigungsmengen kontrahieren.

Also gibt es keine solche Familie. Nach Lemma 4.2.2 gibt es $A \subseteq V(G)$ und $Z \subseteq V(M)$ mit $|A| \leq T$, $|Z| \leq 3T$, sodass jeder M-Weg P in $G-A$ mit Endecken x, y eins von $(x,y) \in R$ oder $x, y \in \bigcup_{z \in Z} R(z)$ erfüllt.

Sei nun M' eine Teilmasche von M ~~in~~ auf einem Intervall ~~von~~ der Weite r, die A ~~und alle~~ ~~$R(z)$ mit $z \in Z$~~ Z vermeidet.



Dann ist jeder M'-Weg in $G-A$ mit einer Endecke außerhalb des $t(t-1)+J$-Rand von M' auch ein M-Weg und erfüllt nicht, dass beide Endecken in $\bigcup_{z \in Z} R(z)$, also ist die M'-Länge davon nicht mehr als $2t(t-1)+2$. $\square$

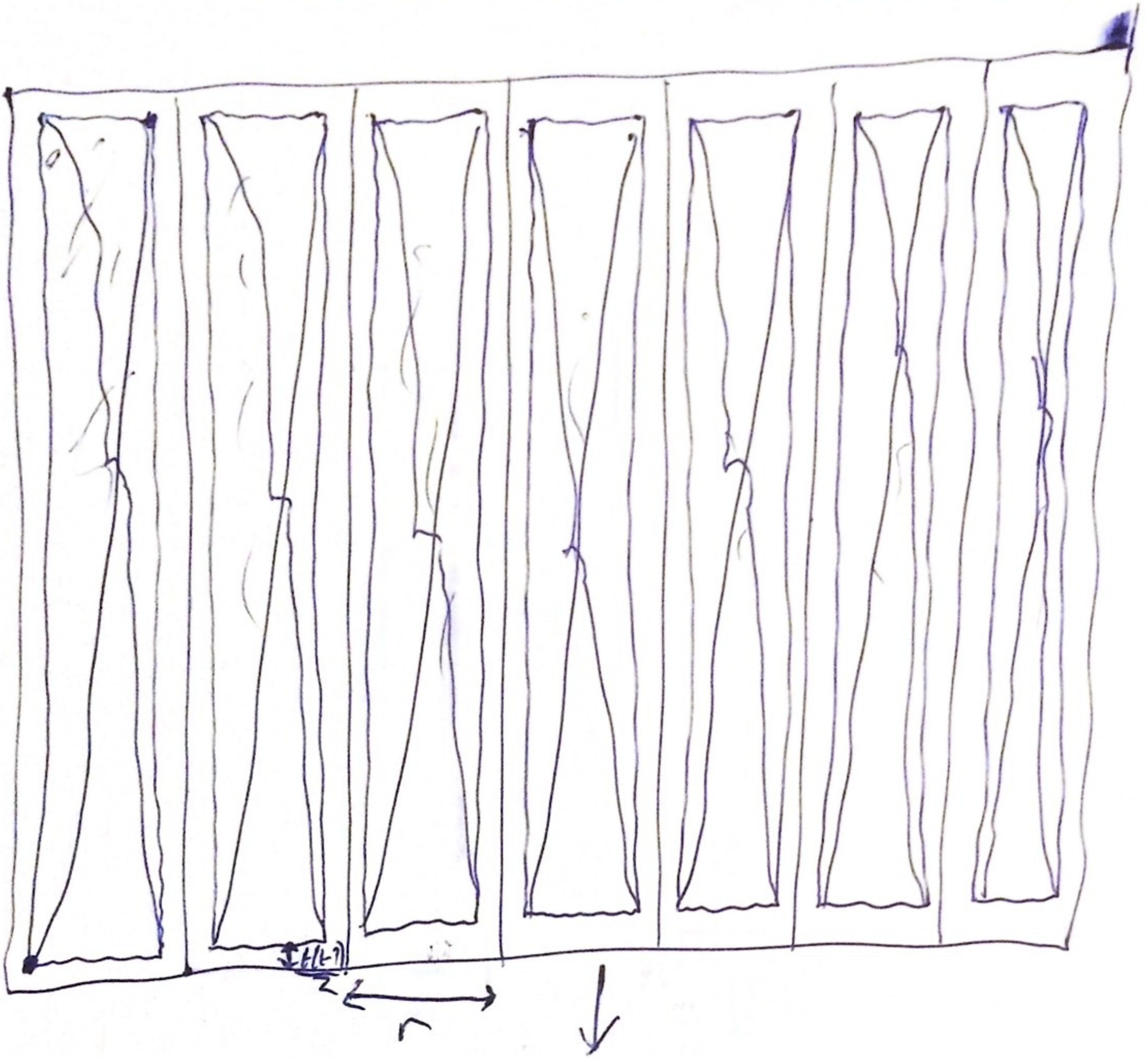
Nun folgt der Flachmaschensatz aus Satz 4.4.2 und dem folgenden Satz:

Satz 4.4.3: Seien $r, d, t \in \mathbb{N}$ und sei $R \gg r, d, t$. ~~und sei~~ Sei G ein Graph und sei M eine R-Masche in G, sodass jeder M-Weg von M-Länge $> d$ in G beide Endecken im d-Rand von M hat. Dann gibt es eins von:

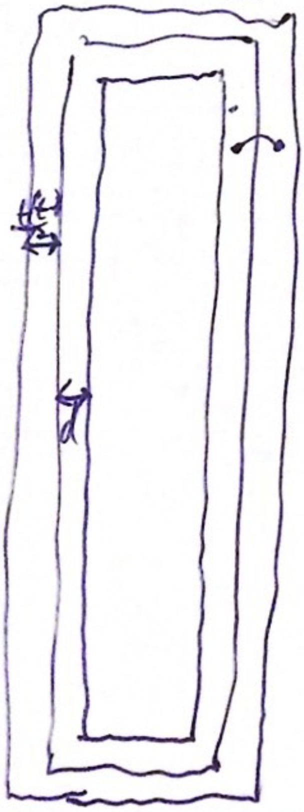
(a) Einen von M gegriffenen K^t-Minor von G.

(b) Eine Teilmasche M' von M auf einem Interval der Weite r, deren $(d+\frac{t(t-1)}{2})$-Inneres in G flach ist.

~~Beweis:~~



~~Große~~ $H^x_{t(t-1)}$-Minor



Beweis: Für $i = 1 \ldots t(t-1)$, sei M_i die Teilmasche auf dem Interval $[r(i-1)+1, ri]$ und sei M_i' das $\frac{t(t-1)}{2}$-Innere von M_i. Sei G_i die Vereinigung von M_i' mit allen M-Brücken, die nur Füße in M_i haben. Seien die Eckecken von M_i' s_i^1, s_i^2, t_i^1, t_i^2, in dieser zyklischen Reihenfolge auf dem äußeren Kreis.

Sei C_i der Kreis $s_i^1 s_i^2 t_i^1 t_i^2$ [eventuell kein Teilgraph von G] und sei $G_i' = G_i \cup C_i$. Falls es in jedem G_i' ein C_i-Kreuz gibt, dann finden wir einen passenden $H^x_{t(t-1)}$-Minor, wo wir Lemma 4.3.2 anwenden können, um einen K^t-Minor wie in (a) zu finden.

Also können wir annehmen, das es ein $i \leq t(t-1)$ gibt, sodass G_i' C_i-Kreuzfrei ist. Nach Satz 3.3.3 gibt es eine C_i-Wiedergaben von G_i'. Sei M_i'' das d-Inneres von M_i', also das $\left(d+\frac{t(t-1)}{2}\right)$-Inneres von M_i. Sei D der äußere Kreis von M_i''.

Nach Lemma 3.4.1 gibt es eine Separation (A, B) von G_i' mit:

1. $A \cap B \subseteq V(D)$.
2. $V(M_i'') \subseteq B$.
3. $V(C_i) \subseteq A$.
4. Es gibt eine $A \cap B$-Wiedergabe von $G_i'[B]$, wobei die zyklische Ordnung auf $A \cap B$ von D induziert wird.

Sei $A' = A \cup (V(G) \setminus B)$. Da $G[B] = G_i'[B]$, reicht es für (b) zu zeigen, dass (A', B) eine Separation von G ist.

Sei also $xy \in E(G)$ mit $x \in A'$, $y \in B$. Sei P ein $(y - M_i')$-Weg in G_i. Da $A \cap B \subseteq V(M_i')$, ist die Endecke von P in M_i' sogar in M_i''. Also gilt $x \in V(G_i)$ und deshalb $x \in A$, woraus folgt $\{x, y\} \cap (A' \cap B) \neq \emptyset$ $\square$