Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Lösungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 8
Nathan Bowler

A: Präsenzaufgaben

1. *Linearkombinationen*
Welche der folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind Linearkombinationen von $(2,1,1)$ und $(-4,1,3)$?

   (a) $(0,0,0)$
   (b) $(1,-1,1)$
   (c) $(-1,1,2)$

Lösung

(a) $(0,0,0) = 0 \cdot (2,1,1) + 0 \cdot (-4,1,3)$ ist eine Linearkombination von $(2,1,1)$ und $(-4,1,3)$.

(b) Wir benutzen das Gauß-Verfahren, um das Gleichungssystem $\lambda \cdot (2,1,1) + \mu \cdot (-4,1,3) = (1,-1,1)$ zu lösen. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir teilen zunächst die erste Zeile durch 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun subtrahieren wir die erste Zeile von den Anderen.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wir teilen die zweite Zeile durch 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das 5-Fache der zweiten Zeile von der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die dritte Zeile durch 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die dritte Gleichung in dem Gleichungssystem, die dieser Matrix entspricht, ist $0 = 1$. Deshalb ist das ursprüngliche Gleichungssystem nicht lösbar. Es folgt, dass $(1, -1, 1)$ keine Linearkombination von $(2, 1, 1)$ und $(-4, 1, 3)$ ist.

(c) Wir benutzen wie in (b) das Gauß-Verfahren. Diesmal ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir teilen zunächst die erste Zeile durch 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Nun subtrahieren wir die erste Zeile von den Anderen.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Wir teilen die zweite Zeile durch 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das 5-Fache der zweiten Zeile von der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform. Das entsprechende Gleichungssystem ist

$$\begin{aligned} \lambda - 2\mu &= -\frac{1}{2} \\ \mu &= \frac{1}{2} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Durch Rückwärtssubstitution finden wir die Lösung $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. Weil es eine Lösung gibt ist $(-1, 1, 2)$ eine Linearkombination von $(2, 1, 1)$ und $(-4, 1, 3)$.

2. *Zeilenraum*

Ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in der Zeilenraum von $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$?

Lösung: Wir benutzen wieder das Gauß-Verfahren. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die erste Zeile durch 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das Dreifache der ersten Zeile von der Zweiten, und die erste Zeile selbst von der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wir teilen die zweite Zeile durch $\frac{9}{2}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wir addieren das $\frac{3}{2}$-Fache der zweiten Zeile auf die Dritte.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Wir teilen die dritte Zeile durch $-\frac{2}{3}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die dritte Gleichung in dem Gleichungssystem, die dieser Matrix entspricht, ist $0 = 1$. Deshalb ist das ursprüngliche Gleichungssystem nicht lösbar. Es folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination von $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ ist.

3. *Lineare unabhängigkeit in* $\mathbb{R}^2$
Welche der folgenden Listen von Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind unabhängig?

(a) $(1, 1)$, $(1, 2)$

(b) $(1, 1)$, $(2, 2)$

(c) $(0, 0)$, $(1, 2)$

Lösung:

(a) Die gegebenen Vektoren sind keine Vielfäche voneinander, also ist die gegebene Liste unabhängig.

(b) $(2, 2) = 2 \cdot (1, 1)$, also ist die Liste abhängig.

(c) $(0, 0) = 0 \cdot (1, 2)$, also ist die Liste abhängig.

B: Aufgaben

1. *Linearkombinationen von Matrizen*

   Ist $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination von $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

   Lösung: Wir benutzen das Gauß-Verfahren, um das Gleichungssystem

   $$\lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   zu lösen. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

   $$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Wir teilen die erste Zeile durch -2, und subtrahieren passende Vielfäche dieser Zeile von den Anderen:

   $$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

   Wir teilen die zweite Zeile durch $\frac{7}{2}$, und subtrahieren passende Vielfäche dieser Zeile von den Unteren.

   $$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

   Wir teilen die vierte Zeile durch $\frac{4}{7}$.

   $$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Die vierte Gleichung in dem Gleichungssystem, die dieser Matrix entspricht, ist $0 = 1$. Deshalb ist das ursprüngliche Gleichungssystem nicht lösbar. Es folgt, dass $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination von $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist.

2. *Fundamentalräume finden*

   Was sind die 4 Fundamentalräume von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

   Lösung: Der Zeilenraum ist $\{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} \mu & \lambda \end{pmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$. Ähnlicherweise ist der Spaltenraum auch $\mathbb{R}^2$. Der Kern ist $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Ähnlicherweise ist der Kern der transponierten Matrix auch $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

3. *Spaltenraum*

Ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Spaltenraum von $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -6 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$?

Wir benutzen wieder das Gauß-Verfahren. Die relevante erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren passende Vielfäche der ersten Zeile von den Anderen.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -2 \\ 0 & 3 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die Zweite Zeile durch 3 und subtrahieren ein passendes Vielfach davon von der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform. Sie entspricht folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \lambda - \mu + 2\nu &= 1 \\ \mu - \frac{10}{3}\nu &= \frac{2}{3} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Wir können dieses System durch Rückwärtssubstitution lösen. Zum Beispiel, eine Lösung ist $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = -\frac{2}{3}$, $\nu = 0$. Deshalb ist der gegebene Vektor ein Element des gegebenen Spaltenraums.

4. *Unabhängigkeit in abstrakteren Vektorräumen*

Sei f_1 die Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die alle Zahlen auf die 1 abbildet, f_2 die Abbildung, die die Zahl x auf sich selbst abbildet, und f_3 die Abbildung, die die Zahl x auf x^2 abbildet. Beweisen Sie, dass die Abbildungen f_1, f_2 und f_3, als Vektoren in dem Vektorraum von Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ betrachtet, linear unabhängig sind.

Lösung. Seien λ, μ und ν reele Zahlen, sodass $\lambda \cdot f_1 + \mu \cdot f_2 + \nu \cdot f_3 = 0$. Wir müssen beweisen, dass $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Für jede reele Zahl x gilt $0 = \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) + \nu f_3(x) = \lambda + \mu x + \nu x^2$. Für x gleich 0, 1 und 2 haben wir also folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \\ \lambda + \mu + \nu &= 0 \\ \lambda + 2\mu + 4\nu &= 0 \end{aligned}$$

Wir lösen dieses System mithilfe des Gauß-Jordan-Verfahren. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die erste Zeile von den Anderen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das Zweifache der zweiten Zeile von der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die dritte Zeile durch 2 und subtrahieren sie von der Zweiten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die einzige Lösung des Gleichungssystems ist also $\lambda = \mu = \nu = 0$. Genau das wollten wir beweisen.

5. *Maximale unabhängige Teilmenge finden*
   Finden Sie eine maximale unabhängige Teilmenge folgender Menge von Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\{(1,1,0),(1,2,1),(2,3,1),(0,1,1)\}$$

Lösung: Es ist klar, dass die Menge $\{(1,1,0),(1,2,1)\}$ unabhängig ist denn kein Element ein Vielfach eines Anderen ist.

Wir überprüfen nun, ob wir das weitere Element $(2,3,1)$ hinzufügen können, ohne lineare unabhängigkeit zu verlieren. Die Vektoren $(1,1,0)$, $(1,2,1)$ und $(2,3,1)$ sind genau dann linear unabhängig, wenn das Gleichungssystem $\lambda(1,1,0)+\mu(1,2,1)+\nu(2,3,1) = (0,0,0)$ nur die triviale Lösung hat. Wir bestimmen die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems mithilfe des Gauß-Verfahrens. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die erste Zeile von der Zweiten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist jetzt in Zeilenstufenform. Durch Rückwärtssubstitution mit $\nu := 1$ finden wir die nicht-triviale Lösung $\lambda = -1$, $\mu = -1$, $\nu = 1$. Das heißt, diese Vektoren sind linear abhängig.

Also überprüfen wir, ob wir das Element $(0, 1, 1)$ hinzufügen können. Wir benutzen wieder das Gauß-Verfahren. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die erste Zeile von der Zweiten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist jetzt in Zeilenstufenform. Durch Rückwärtssubstitution mit $\nu := 1$ finden wir die nicht-triviale Lösung $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $\nu = 1$. Das heißt, diese Vektoren sind auch linear abhängig.

Es folgt, dass $\{(1, 1, 0), (1, 2, 1)\}$ eine maximale linear unabhängige Teilmenge der gegebenen Menge ist.