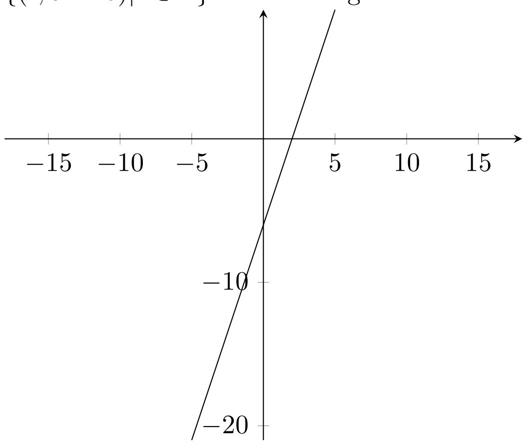
Musterlösungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 1

Nathan Bowler

A: Präsenzaufgaben

1. *Lineare Gleichung in 2 Variablen lösen. Lösung graphisch darstellen*
   Lösen Sie die lineare Gleichung
   $$3x - y = 6\,,$$
   und stellen Sie die Lösung graphisch dar.

   Lösung: Wir setzen $x := t$. Dann gilt $3t - y = 6$, also $y = 3t - 6$. Deshalb ist die Lösungsmenge $\{(t, 3t - 6) | t \in \mathbb{R}\}$. Diese Menge lässt sich wie folgt graphisch Darstellen:



2. *Lösbarkeit von einfachen LGS erkennen.*
   Welche der folgenden LGS sind Lösbar?

   (a)
   $$\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

   Lösung: (a) ist nicht lösbar: gäbe es eine Lösung, so würde $5 = x = 3$ gelten, und das ist nicht möglich. (b) ist Lösbar, weil (1, 2) eine Lösung ist.

3. *Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix finden*
   Finden Sie die Koeffizientenmatrizen und erweiterten Koeffizientenmatrizen folgender Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{aligned} 3x - y &= 6 \\ 6x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} a + 2b - 3c &= 6 \\ b - c &= -3 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:

(a)

$$\text{Koeffizientenmatrix: } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{Erweiterte Koeffizientenmatrix: } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\text{Koeffizientenmatrix: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Erweiterte Koeffizientenmatrix: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. *Gleichungssysteme aus Koeffizientenmatrizen bauen*
Finden Sie Gleichungssysteme mit folgenden erweiterten Koeffizientenmatrizen:

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= -3 \\ x_1 + 5x_2 &= -3 \\ x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

5. *Lösung eines einfachen Systems*
Finden Sie alle Lösungen folgendes Systems:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 6 \\ 3y - z &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Lösung: Wenn wir $z := 2$ in der zweiten Gleichung substituiren, bekommen wir $3y - 2 = 1$, also $y = 1$. Jetzt substituiren wir $z := 2$ und $y := 1$ in der ersten Gleichung. Das Ergebnis ist $x-2+2 = 6$, also $x = 6$. Die einzige Lösung ist deshalb $(6, 1, 2)$.

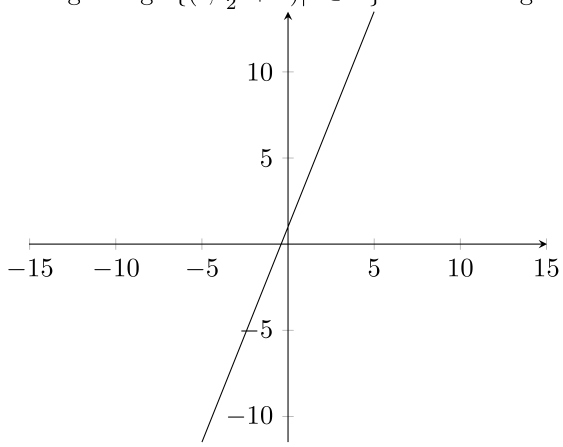
B: Aufgaben

1. *Lineare Gleichung in 2 Variablen lösen. Lösung graphisch darstellen*
Lösen Sie die lineare Gleichung

$$-5x + 2y = 2\,,$$

und stellen Sie die Lösung graphisch dar.

Lösung: Wir setzen $x := t$. Dann gilt $-5t + 2y = 2$, also $y = \frac{5t+2}{2} = \frac{5t}{2} + 1$. Deshalb ist die Lösungsmenge $\{(t, \frac{5t}{2} + 1) | t \in \mathbb{R}\}$. Diese Menge lässt sich wie folgt graphisch Darstellen:



2. *Gleichheit von Mengen beweisen*
Beweisen Sie, dass die Teilmengen $\{(t, \frac{5t}{2} + 1) | t \in \mathbb{R}\}$ und $\{(\frac{2s}{5} - \frac{2}{5}, s) | s \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{R}^2$ gleich sind.

Lösung: Wir nennen die erste Menge $\mathbb{L}_1$ und die zweite $\mathbb{L}_2$.
Sei $(t, \frac{5t}{2} + 1) \in \mathbb{L}_1$. Setze $s := \frac{5t}{2} + 1$. Dann gilt

$$\frac{2s}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2(\frac{5t}{2} + 1)}{5} - \frac{2}{5} = t + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = t\,,$$

woraus folgt $(t, \frac{5t}{2} + 1) = (\frac{2s}{5} - \frac{2}{5}, s) \in \mathbb{L}_2$. Deshalb gilt $\mathbb{L}_1 \subseteq \mathbb{L}_2$.
Sei nun $(\frac{5s}{2} - \frac{5}{2}, s) \in \mathbb{L}_2$. Setze $t := \frac{2s}{5} - \frac{2}{5}$. Dann gilt

$$\frac{5t}{2} + 1 = \frac{5(\frac{2s}{5} - \frac{2}{5})}{2} + 1 = s - 1 + 1 = s\,,$$

woraus folgt $(\frac{2s}{5} - \frac{2}{5}, s) = (t, \frac{5t}{2} + 1) \in \mathbb{L}_1$. Deshalb gilt $\mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_1$.
Insgesamt haben wir jetzt bewiesen, dass $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$.

3. *Lösbarkeit und Äquivalenz von einfachen LGS erkennen.*
Welche der folgenden LGS sind Lösbar? Welche sind zueinander äquivalent?

(a)

$$\begin{aligned} 3x - y &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3x - y &= 6 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 3x - y &= 6 \\ 6x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} 3x - y &= 6 \\ 6x - 2y &= 12 \end{aligned}$$

Lösung: Die einzige Lösung von (a) ist $(3, 3)$. Die einzige Lösung von (b) ist auch $(3, 3)$. Deshalb sind (a) und (b) Lösbar und zueinander äquivalent. (c) ist nicht lösbar: gäbe es eine Lösung, so würde

$$4 = 6x - 2y = 2(3x - y) = 2 \cdot 6 = 12$$

gelten, und das ist nicht möglich. Insbesondere ist (c) nicht zu (a) oder (b) äquivalent. (d) ist lösbar, weil $(2, 0)$ eine Lösung ist. Weil sie aber keine Lösung von (a) oder (b) ist, ist (d) nicht zu (a) oder (b) äquivalent.

4. *Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix finden*
Finden Sie die Koeffizientenmatrizen und erweiterten Koeffizientenmatrizen folgender Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{aligned} p + q &= 0 \\ r - s &= 2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 0 &= 3 \end{aligned}$$

Lösung:

(a)

Koeffizientenmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Erweiterte Koeffizientenmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b)

Koeffizientenmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Erweiterte Koeffizientenmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. *Lösung eines einfachen Systems*
   Finden Sie alle Lösungen folgendes Systems:

$$\begin{aligned} x + 4y - 2z &= 1 \\ y - z + 3t &= 0 \\ z + t &= 8 \end{aligned}$$

Lösung: Aus der dritten Gleichung folgt $z = 8 - t$. Wenn wir $z := 8 - t$ in der zweiten Gleichung substituiren, bekommen wir $y - (8 - t) + 3t = 0$, also $y = 8 - t - 3t = 8 - 4t$. Jetzt substituiren wir $z := 8 - t$ und $y := 8 - 4t$ in der ersten Gleichung. Das Ergebnis ist $x + 4(8 - 4t) - 2(8 - t) = 1$, also $x = 14t - 15$. Die Lösungsmenge ist deshalb $\{(14t - 15, 8 - 4t, 8 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.