7. Algebraische Strukturen

Allgemeine algebraische Struktur

Definition

Eine algebraische Struktur ist eine Menge X zusammen mit endlich vielen endlichstelligen Operationen $f_1, \ldots, f_k$ auf X, d. h. für $i = 1, \ldots, k$ ist f_i eine Abbildung $f_i \colon X^{\ell_i} \to X$ mit $\ell_i \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkungen

- oftmals sind die Operationen zweistellig/binär, d. h. $\ell_i = 2$
- formal schreibt man $\mathcal{X} = (X, f_1, \ldots, f_k)$ und X heißt unterliegende Menge
- meistens sind die Operationen klar vom Kontext und man identifiziert die Struktur mit der unterliegenden Menge

Beispiele

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, Körper im Allgemeinen
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$
- Boolsche Algebren: z. B. $(\{0,1\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ und $(\wp(M), \cup, \cap, \overline{\ }, \varnothing, M)$
- $F(A) = \{f \mid f \colon A \to A\}$ mit der Komposition $\circ$, d. h. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- $(\mathcal{S}(A), \circ)$ für die Bijektionen $\mathcal{S}(A) = \{f \in F(A) \colon f \text{bijektiv}\}$ auf A

Neutrale Elemente

Definition

Sei $(X, *)$ eine algebraische Struktur mit einem zweistelligen Operator $*$. Ein Element $e \in X$ heißt neutrales Element, falls für alle $x \in X$ gilt

$$e * x = x = x * e\,.$$

Proposition

Ist $*$ eine zweistellige Operation auf X, so gibt es höchstens ein neutrales Element bezüglich $*$.

Beweis:

Seien e, $e' \in X$ neutral. Dann gilt

$$e \overset{e' \text{ neutral}}{=} e * e' \overset{e \text{ neutral}}{=} e'\,.$$

Somit ist $e = e'$. □

Neutrale Elemente – Beispiele

- 0 ist neutral in $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{N}_0, +)$
- 1 ist neutral in $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ und $(\mathbb{N}_0, \cdot)$
- in jedem Körper ist die 0 neutral bezüglich $+$ und die 1 neutral bezüglich $\cdot$
- 0 und 1 sind neutral bezüglich $+$ und $\cdot$ in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
- $[0]_n$ und $[1]_n$ sind neutral bezüglich $+$ und $\cdot$ in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$

- $(\mathbb{N}, +)$ hat **kein** neutrales Element

- Identität $\mathrm{id}_A \colon A \to A$ mit $a \mapsto a$ für alle $a \in A$ ist neutral in $(F(A), \circ)$
- id_A ist eine Bijektion und so auch neutrales Element in $(\mathcal{S}(A), \circ)$

- 0 ist neutral für $\vee$ und 1 ist neutral für $\wedge$ in $(\{0,1\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$
- $\varnothing$ ist neutral für $\cup$ und M ist neutral für $\cap$ in $(\wp(M), \cup, \cap, \overline{\ }, \varnothing, M)$

Inverse Elemente

Definition

Sei $(X, *)$ eine algebraische Struktur mit einem zweistelligen Operator $*$ mit einem neutralen Element e. Ein Element $x \in X$ heißt invertierbar, falls ein Element $y \in X$ existiert, so dass

$$x * y = e = y * x\,.$$

In so einem Fall sagen wir y ist invers zu x (bezüglich $*$).

Beispiele

- $-x$ invers zu x bezüglich $+$ für $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{Z}$
- x^{-1} invers zu x bezüglich $\cdot$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$
- 0 hat kein Inverses bezüglich $\cdot$ in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$
- $[-x]_n$ invers zu $[x]_n$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezüglich $+$
- $[2]_4$ hat kein Inverses in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ bezüglich $\cdot$
- $[3]_4$ ist selbstinvers in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ bezüglich $\cdot$

Gruppen

Definition (Gruppe)

Eine Gruppe ist eine algebraische Struktur $(G, *)$ mit einer zweistelligen Verknüpfung $*$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Assoziativgesetz: $x * (y * z) = (x * y) * z$ für alle $x, y, z \in G$,
2. neutrales Element: es gibt ein neutrales Element $e \in G$
3. inverse Elemente: und jedes x in G ist invertierbar (bezüglich $*$).

Gilt zusätzlich das

4. Kommutativgesetz: $x * y = y * x$ für alle $x, y \in G$,

dann heißt die Gruppe $(G, *)$ abelsch/kommutativ.

Bemerkungen

- algebraische Strukturen die **1** erfüllen, heißen Halbgruppen
- algebraische Strukturen die **1** und **2** erfüllen, heißen Monoide

Beispiele

- algebraische Strukturen $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ und $(F(A), \circ)$ sind Monoide
- $(\mathbb{N}, +)$ ist kein Monoid, da es in $\mathbb{N}$ bezüglich $+$ kein neutrales Element gibt
- $(\mathbb{N}, +)$ ist eine Halbgruppe.
- für eine Menge A, die wir in diesem Zusammenhang Alphabet nennen, sei
  - A^* die Menge aller endlichen Folgen von Zeichen aus A
  - Elemente von A^* heißen Wörter über A
  - für zwei Wörter $v = a_1 \dots a_n$ und $w = b_1 \dots b_m$ definieren wir die Verkettung $v^\frown w$ von v und w als das Wort $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$

$\Rightarrow$ dann ist $(A^*, ^\frown)$ ein Monoid mit dem leeren Wort als neutralem Element

- für jedes $n \geqslant 2$ ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$ ein Monoid

Eindeutigkeit der Inversen

Satz

Ist $(M, *)$ ein Monoid, so besitzt jedes $x \in M$ höchstens ein Inverses.

Beweis: Seien y und $y' \in M$ Inverse von $x \in M$. Dann gilt

$$y \overset{\boxed{2}}{=} y * e = y * (x * y') \overset{\boxed{1}}{=} (y * x) * y' = e * y' = y' .$$

□

Proposition

Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, so gilt $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ für alle x, $y \in G$.

Beweis: Seien x, $y \in G$. Dann gilt

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) \overset{\boxed{1}}{=} x(yy^{-1})x^{-1} = x \cdot e \cdot x^{-1} = xx^{-1} = e .$$

$\Longrightarrow$ $y^{-1}x^{-1}$ ist invers zu xy

$\Longrightarrow$ wegen der Eindeutigkeit der Inversen gilt $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ □

Multiplizieren und Kürzen

- für eine Gruppe G (ohne Angabe der Operation) nehmen wir standardmäßig an, dass $\cdot$ die Operation ist, d. h. für $a, b \in G$ ist die Gruppenoperation $a \cdot b = ab$
- das neutrale Element bezeichnen wir mit e
- für $a \in G$ bezeichnet a^{-1} das Inverse von a

Lemma

Sei G eine Gruppe. Dann gilt für alle $a, b, c \in G$:

1. falls $ab = ac$, dann ist $b = c$. (Genauso folgt aus $ba = ca$ auch $b = c$.)
2. die Gleichung $ax = b$ (ebenso $xa = b$), wobei x eine Unbekannte ist, ist eindeutig lösbar.

Beweis:

1. multipliziere beide Seiten der Gleichung mit a^{-1} von links ✓
2. Multiplikation mit a^{-1} von links zeigt $x = a^{-1}b$ ist eine Lösung
   Sei c auf der anderen Seite eine Lösung $\Rightarrow ac = b = aa^{-1}b$ und somit gilt wegen dem ersten Teil auch $c = a^{-1}b$. □

Gruppen – Beispiele

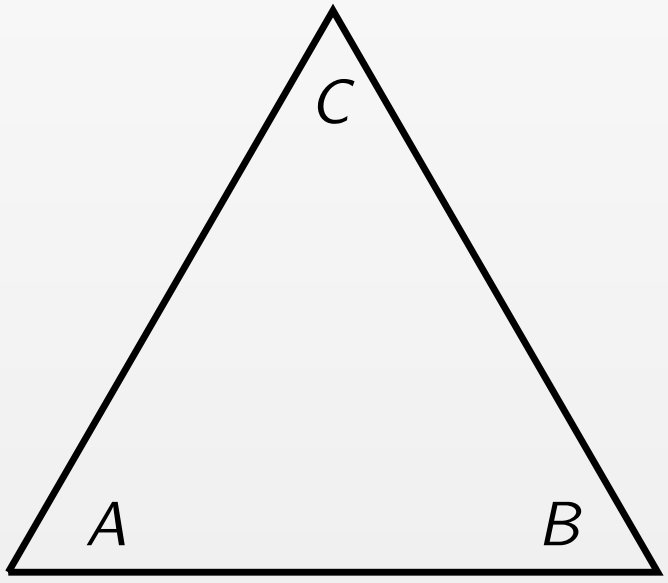
- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$ sind abelsche Gruppen
- für jedes $n \geqslant 1$ ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ eine abelsche Gruppe
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen
- ist p eine Primzahl, so ist $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]_p\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe
- für jedes $n \geqslant 2$ ist die Einheitengruppe $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ eine abelsche Gruppe
- für eine Menge A bildet die Menge $\mathcal{S}(A)$ der Bijektionen von A nach A zusammen mit der Komposition (Hintereinanderausführung) $\circ$ die Gruppe $(\mathcal{S}(A), \circ)$
  - für jede Bijektion $f \in \mathcal{S}(A)$ gibt es eine Umkehrfunktion f^{-1}, die das zu f inverse Element ist
  - $(\mathcal{S}(A), \circ)$ heißt die symmetrische Gruppe auf A
  - für $A = [n] = \{1, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{S}([n])$ die Menge der Permutationen auf $[n]$ und wir bezeichnen die symmetrische Gruppe mit $\mathcal{S}_n := ([n], \circ)$ bzw. bezeichnen sie auch als Permutationsgruppe
  - für $n \geqslant 3$ ist $\mathcal{S}_n$ **nicht** abelsch:

$$(2,3,1) \circ (1,3,2) = (2,1,3) \neq (3,2,1) = (1,3,2) \circ (2,3,1)\,.$$

Geometrisches Beispiel

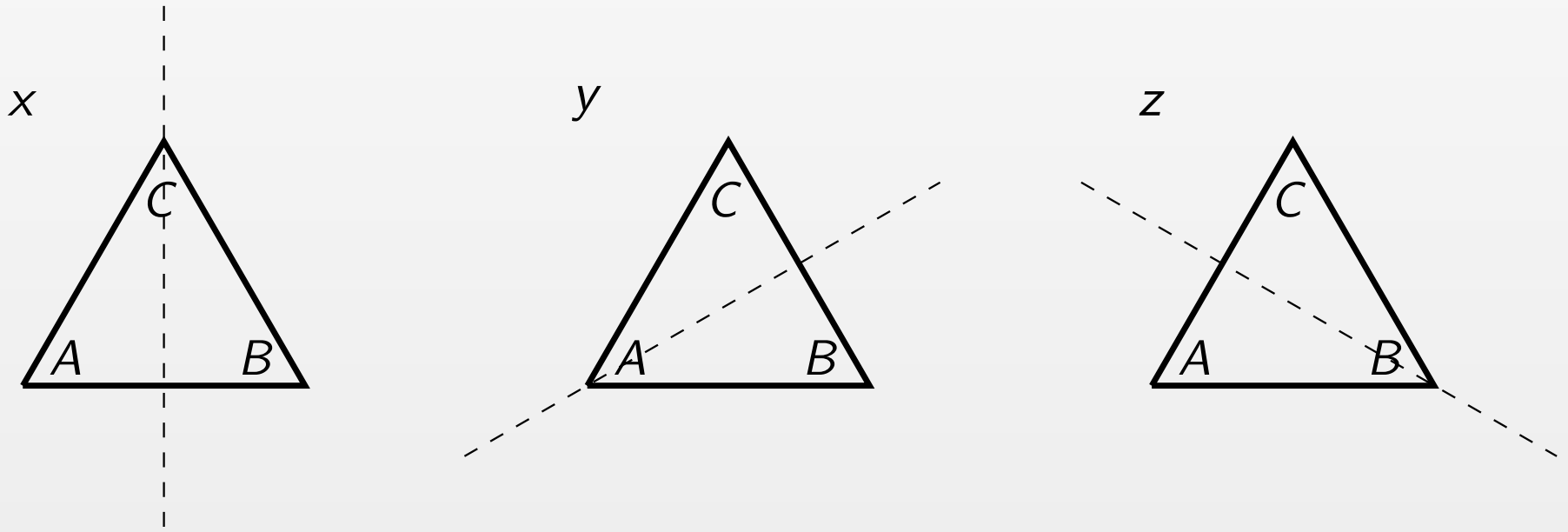
Dreiecksgruppe $G_\triangle$:

- Gruppe auf der Menge der Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks (Transformationen der Ebene, die das Dreieck auf das Dreieck abbilden)
- mit der zweistelligen Operation der Komposition von Abbildungen $\circ$



Elemente von $G_\triangle$

- Identität i: die jeden Punkt der Ebene auf sich selbst abbildet
- Drehung r um 120°: um den Mittelpunkt des Dreiecks entgegen dem Uhrzeigersinn (mathematisch positiver Drehsinn)
- Drehung s um 240°: um den Mittelpunkt des Dreiecks entgegen dem Uhrzeigersinn
- Spiegelungen x, y und z: entlang der Mittelsenkrechten des Dreiecks



$G_\triangle$ und $\mathcal{S}_3$

Beobachtung

- alle Symmetrien i, r, s, x, y und z sind eindeutig durch die Abbildung der Ecken aufeinander bestimmt

$\Rightarrow$ jede Symmetrie entspricht einer Permutation der Menge der Ecken $\{A, B, C\}$

i	r	s
$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$

x	y	z
$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$

- Zwei Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \odot)$ sind isomorph (geschrieben $G \cong H$), falls es eine Bijektion $\varphi\colon G \to H$ mit

$$\varphi(x) \odot \varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$$

für alle x, $y \in G$ gilt und φ heißt Gruppenisomorphismus.

Gruppentafeln

- für (kleine) endliche Gruppen kann man alle Produkte von zwei Gruppenelementen in einer Multiplikationstabelle/Gruppentafel angeben
- in der Zeile für das Element a und der Spalte für das Element b steht das Produkt ab

Gruppentafel von $G_\triangle$:

$\circ$	i	r	s	x	y	z
i	i	r	s	x	y	z
r	r	s	i	z	x	y
s	s	i	r	y	z	x
x	x	y	z	i	r	s
y	y	z	x	s	i	r
z	z	x	y	r	s	i

- Vergleich der Gruppentafeln von $G_\triangle$ und $\mathcal{S}_3$ zeigt, dass die Gruppen isomorph sind

$\Rightarrow$ $G_\triangle \cong \mathcal{S}_3$

Gruppenisomorphismen

- $G \cong H$, falls es eine Bijektion zwischen den unterliegenden Mengen gibt, die mit den Gruppenoperationen verträglich ist

Lemma

1. Ist $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so auch $\varphi^{-1}\colon H \to G$.
2. Sind $\varphi\colon G \to H$ und $\psi\colon H \to I$ Gruppenisomorphismen, so auch $\psi \circ \varphi\colon G \to I$.
3. Ist $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenisomorphismus. Dann gilt
   - $\varphi(e_G) = e_H$ für die neutralen Elemente $e_G \in G$ und $e_H \in H$.
   - $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ für jedes $a \in G$.

Bemerkung

- Teil 1 $\Rightarrow$ Relation $\cong$ ist symmetrisch auf jeder Menge von Gruppen
- Teil 2 $\Rightarrow$ Relation $\cong$ ist transitiv
- Identität $\mathrm{id}_G \Rightarrow$ Relation $\cong$ ist reflexiv

$\Rightarrow$ $\cong$ definiert Äquivalenzrelation

Gruppenisomorphie ist symmetrisch

Beweis von Teil 1:

Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenisomorphismus von $(G, \cdot)$ nach $(H, \odot)$.
Insbesondere φ ist bijektiv und so auch $\varphi^{-1}\colon H \to G$. Wir zeigen, dass φ^{-1} verträglich mit den Gruppenoperationen ist, d. h. wir zeigen

$$\varphi^{-1}(x) \cdot \varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(x \odot y)$$

für alle $x, y \in H$.
Seien $x, y \in H$ beliebig und seien $a, b \in G$ die Urbilder (unter φ), d. h.

$$a = \varphi^{-1}(x) \qquad \text{und} \qquad b = \varphi^{-1}(y)\,.$$

Da φ ein Gruppenisomorphismus ist, gilt insbesondere auch

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b) = x \odot y \quad \Longrightarrow \quad a \cdot b = \varphi^{-1}(x \odot y)\,.$$

Somit folgt die gewünschte Identität

$$\varphi^{-1}(x) \cdot \varphi^{-1}(y) = a \cdot b = \varphi^{-1}(x \odot y)\,.$$

□

Gruppenisomorphie ist transitiv

Beweis von Teil 2:

Seien $\varphi\colon G \to H$ und $\psi\colon H \to I$ Gruppenisomorphismen für die Gruppen $(G,\cdot)$, $(H,\odot)$ und $(I,\circledcirc)$. Insbesondere sind φ und ψ bijektiv und so ist auch $\psi \circ \varphi\colon G \to I$ bijektiv. Wir zeigen die Verträglichkeit von $\psi \circ \varphi$ mit den Gruppenoperationen $\cdot$ und $\circledcirc$, d. h.

$$\psi(\varphi(a)) \circledcirc \psi(\varphi(b)) = \psi(\varphi(a \cdot b))$$

für alle $a, b \in G$.

Seien $a, b \in G$ beliebig. Da ψ ein Gruppenisomorphismus ist, ist ψ verträglich mit $\circledcirc$ und $\odot$ und wir haben

$$\psi(\varphi(a)) \circledcirc \psi(\varphi(b)) = \psi\big(\varphi(a) \odot \varphi(b)\big) .$$

Genauso ist der Gruppenisomorphismus verträglich mit $\odot$ und $\cdot$ und wir erhalten die gewünschte Identität

$$\psi(\varphi(a)) \circledcirc \psi(\varphi(b)) = \psi\big(\varphi(a) \odot \varphi(b)\big) = \psi\big(\varphi(a \cdot b)\big) .$$

Gruppenisomorphie erhält neutrale und inverse Elemente

Beweis von Teil 3:

Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenisomorphismus zwischen den Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \odot)$ mit neutralen Elementen e_G und e_H.
Sei $x \in H$ beliebig und sei $a \in G$ mit $\varphi(a) = x$. Dann gilt

$$x = \varphi(a) = \varphi(a \cdot e_G) = \varphi(a) \odot \varphi(e_G) = x \odot \varphi(e_G)\,.$$

Genauso zeigt man $x = \varphi(e_G) \odot x$ für alle $x \in H$ und durch die Eindeutigkeit des neutralen Elements in H, gilt $e_H = \varphi(e_G)$. ✓

Sei nun $a \in G$ beliebig. Aufgrund des gerade Gezeigten haben wir

$$e_H = \varphi(e_G) = \varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a) \odot \varphi(a^{-1})\,.$$

Multiplikation mit $(\varphi(a))^{-1}$ von links auf beiden Seiten ergibt die gesuchte Identität

$$(\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1})\,.$$

□

Potenzen in Gruppen

Definition

Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir rekursiv

$$g^0 := e \qquad \text{und} \qquad g^{n+1} := g^n \cdot g$$

Für negative Exponenten definieren wir

$$g^{-n} := (g^{-1})^n$$

- wie für Potenzen reeller Zahlen rechnet man schnell für alle $g \in G$ und alle $m, n \in \mathbb{Z}$ die folgenden Rechenregeln nach:

$$g^m g^n = g^{m+n} \qquad \text{und} \qquad (g^m)^n = g^{mn}.$$

Verschlüsselung mit einem gemeinsamen geheimen Schlüssel

Angenommen Alice und Bob kennen einen gemeinsamen geheimen Schlüssel S.

Verschlüsselungsverfahren

1. Vorbereitung Alice und Bob wählen gemeinsam und öffentlich eine Natürliche Zahl m.
2. Verschlüsselung Alice berechnet $C \equiv M + S \pmod{m}$ für Nachricht $M < m$ und schickt Nachricht C an Bob.
3. Entschlüsselung Bob berechnet kanonisches $M' \equiv C - S \pmod{m}$

Korrektheit des Verfahrens:

$$M' \equiv C - S \equiv (M + S) - S \equiv M \pmod{m}\,.$$

Das Diffie-Hellman Schlüsselaustauschverfahren

Das Verfahren

1. Alice and Bob wählen gemeinsam und öffentlich eine Gruppe G und ein Element g von G.
2. Alice wählt eine natürliche Zahl a und speichert sie geheim.
3. Bob wählt eine natürliche Zahl b und speichert sie geheim.
4. Alice berechnet und veröffentlicht $A := g^a$
5. Bob berechnet und veröffentlicht $B := g^b$
6. Alice berechnet B^a, und benutzt dieses weiter als heimlicher Schlüssel.
7. Bob berechnet A^b, und benutzt dieses weiter als heimlicher Schlüssel

Korrektheit können wir wie folgt überprüfen:

$$B^a = (g^b)^a = g^{ba} = g^{ab} = (g^a)^b = A^b \,.$$

Sicherheit ist von der Gruppe G abhängig: es muss schwierig sein, g^{ab} aus g, g^a und g^b zu berechnen. Insbesondere muss es schwierig sein, a aus g und g^a zu berechnen (diskreter Logarithmus).

Effiziente Berechnung von Potenzen in Gruppen

Sei g ein Element einer Gruppe G. Wir können Potenzen von G mit den rekursiven Formeln $g^{2i} := (g^i)^2$ und $g^{2i+1} := g \cdot (g^i)^2$ berechnen.

Beispiel:
Wir berechnen 7^{13} modulo 13. Wir müssen also 7^6, 7^3 und 7^1 berechnen.

$$\begin{aligned} 7^1 &\equiv 7 \pmod{13} \\ 7^3 &\equiv 7 \times 7^2 \equiv 343 \equiv 5 \pmod{13} \\ 7^6 &\equiv (7^3)^2 \equiv 5^2 \equiv 25 \equiv -1 \pmod{13} \\ 7^{13} &\equiv 7 \times (7^6)^2 \equiv 7 \times (-1)^2 \equiv 7 \pmod{13} \end{aligned}$$

Ordnung von Gruppenelementen

Definition (Ordnung)

Sei G eine Gruppe und $g \in G$.

Falls ein $m \geqslant 1$ existiert, so dass $g^m = e$ gilt, so definiert man die Ordnung von g als das kleinste solche $m > 0$.

Falls kein solches m exisitiert, so sagen wir, dass g die Ordnung ∞ hat.

Die Ordnung der Gruppe G ist einfach $|G|$.

Satz

In einer endlichen Gruppe G hat jedes Element eine endliche Ordnung $\leqslant |G|$.

Beweis: Sei $n = |G|$ und $g \in G$. Wir betrachten die Potenzen $g^1, \ldots g^n$. Falls keine Potenz e ergibt und es nur $n-1$ weitere Gruppenelemente gibt, können nicht alle diese Potenzen verschieden sein (Schubfachprinzip).

$\Rightarrow$ es gibt $1 \leqslant \ell < m \leqslant n$, so dass $g^\ell = g^m$

$\Rightarrow g^\ell \cdot e = g^\ell g^{m-\ell}$ (Rechenregeln für Potenzen)

$\Rightarrow e = g^{m-\ell}$ (Kürzen in Gruppen)

$\Rightarrow$ da $1 \leqslant m - \ell \leqslant n$, ist die Ordnung von g höchstens $m - \ell \leqslant n$ $\square$

Ordnung von Gruppenelementen – Beispiele

- Permutation $(2, 3, 4, 1, 5)$ hat in $\mathcal{S}_5$ die Ordnung 4
- in $G_\triangle$ haben r und s die Ordnung 3, x, y und z die Ordnung 2 und i ist neutral und hat Ordnung 1
- $[7]_{10}$ ist in der Einheitengruppe $((\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times, \cdot)$, da ggT$(7, 10) = 1$
  Potenzen von $[7]_{10}$ sind: $[7]_{10}$, $[7]_{10}^2 = [9]_{10}$, $[7]_{10}^3 = [7 \cdot 9]_{10} = [3]_{10}$ und $[7]_{10}^4 = [7 \cdot 3]_{10} = [1]_{10} \Rightarrow$ Ordnung von $[7]_{10}$ ist 4
- **Achtung:** für die Addition in $(\mathbb{Z}, +)$ ist 0 neutral $(e = 0)$ und g^n entspricht $g + \cdots + g = n \cdot g$
  $\Rightarrow$ jede ganze Zahl $x \neq 0$ hat unendliche Ordnung in $(\mathbb{Z}, +)$
- in $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$ hat $[5]_{15}$ die Ordnung 3 und $[4]_{15}$ hat die Ordnung 15

Proposition

Sei G eine Gruppe, in der jedes Element $\neq e$ Ordnung 2 hat. Dann ist G abelsch.

Beweis: Für beliebiges $x \in G$ gilt $xx = e$ und deshalb $x^{-1} = x$. Seien nun x, $y \in G$ beliebig. Dann gilt

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx\,.$$

Vielfache der Ordnung

Satz

Sei G eine Gruppe und sei $g \in G$ ein Element von endlicher Ordnung m. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ genau dann $g^n = e$, wenn m ein Teiler von n ist.

Beweis

„$\Longleftarrow$“ für $n = qm$ mit $q \in \mathbb{Z}$ gilt

$$g^n = (g^m)^q = e^q = e$$

(auch für $q < 0$) ✓

„$\Longrightarrow$“ Sei $n = qm + r$ mit $0 \leqslant r < m$. Wir werden zeigen, dass $r = 0$ gelten muss. Tatsächlich gilt

$$e = g^n = g^{qm+r} = (g^m)^q \cdot g^r = e^q \cdot g^r = g^r \,.$$

Da m die kleinste Zahl $\geqslant 1$ mit $g^m = e$ ist, folgt aus $r < m$ dann $r = 0$. □

Zyklische Gruppen

Definition (Zyklische Gruppe)

Ein Gruppe $(G, \cdot)$ heißt zyklisch, falls sie durch Potenzen über ein Element $a \in G$ erzeugt wird, d. h.

$$G = \{a^z : z \in \mathbb{Z}\}.$$

Beispiele

- $(\mathbb{Z}, +)$ ist zyklisch und sowohl 1 als auch -1 erzeugen die Gruppe
  Erinnerung: multiplikative Schreibweise $\Rightarrow a^z = z \cdot a$
- für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ zyklisch; erzeugt von $[1]_n$
  Bemerkung: für $n = 1$ ist $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$ einelementig $\Rightarrow$ zyklisch
- $\mathcal{S}_2$ ist zyklisch und wird von der Permutation$(2, 1)$ erzeugt
  Bemerkung: alle zweielementigen Gruppen sind isomorph
- $G_\triangle$ ist **nicht** zyklisch:
  - Potenzen (Hintereinanderausführungen) von i bleiben i
  - Drehungen r und s haben jeweils Ordnung 3 und können somit nur 3, nicht aber alle 6 Elemente, von $G_\triangle$ erzeugen
  - Spiegelungen x, y, z haben Ordnung 2 und erzeugen nur 2 Elemente

Klassifizierung zyklischer Gruppen

Satz

Eine Gruppe $(G, \cdot)$ ist zyklisch genau dann, wenn sie isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$ oder isomorph zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

- Rückrichtung hatten wir bereits durch die Beispiele gezeigt
- Satz $\Longrightarrow$ zyklische Gruppen sind abelsch

Beweis: Sei $G = \{a^z : z \in \mathbb{Z}\}$ durch a erzeugt mit neutralem Element e_G.

1. Fall: (a hat Ordnung ∞ in G)

Betrachte die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{Z} \to G$ gegeben durch $z \mapsto a^z$.

- φ ist surjektiv, da G durch a erzeugt wird
- φ ist injektiv, da sonst aus $a^z = a^{z'}$ für $z > z'$ wegen $a^{z-z'} = e_G$ folgt, dass a endliche Ordnung $z - z' > 0$ hätte $\quad \lightning$ zur Fallannahme

$\Rightarrow$ φ ist bijektiv

- φ ist ein Isomorphismus, da

$$\varphi(z + z') = a^{z+z'} = a^z \cdot a^{z'} = \varphi(z) \cdot \varphi(z')$$

✓

Klassifizierung zyklischer Gruppen – endliche Ordnung

2. Fall: (a hat Ordnung n in G)

Betrachte nun die Abbildung $\psi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G$ gegeben durch $[z]_n \mapsto a^z$.

- ψ ist wohldefiniert: Seien $z \equiv z' \pmod{n}$
  $\Rightarrow n \mid z - z'$
  $\Rightarrow a^{z-z'} = e_G$ (Satz über Vielfache der Ordnung)
  $\Rightarrow a^z = a^{z'}$ ✓
- ψ ist injektiv: falls $\psi([z]_n) = a^z = a^{z'} = \psi([z']_n)$
  $\Rightarrow a^{z-z'} = e_G$
  $\Rightarrow n \mid z - z'$ (Satz über Vielfache der Ordnung)
  $\Rightarrow z \equiv z' \pmod{n} \Rightarrow [z] = [z']$ ✓
- ψ ist surjektiv, da a die Gruppe G erzeugt

$\Rightarrow$ ψ ist bijektiv

- ψ ist ein Isomorphismus, da

$$\psi([z]_n + [z']_n) = a^{z+z'} = a^z \cdot a^{z'} = \psi([z]_n) \cdot \psi([z']_n)$$

✓

Untergruppen

Definition (Untergruppe)

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Menge $U \subseteq G$ heißt Untergruppe von G, falls $(U, \cdot)$ eine Gruppe ist, wobei man die Einschränkung von $\cdot$ auf $U \times U$ betrachtet:

1. für alle $u, v \in U$ gilt $u \cdot v \in U$,
2. es existiert $e_U \in U$ mit $u \cdot e_U = u = e_U \cdot u$ für alle $u \in U$
3. und für jedes $u \in U$ gibt es $u' \in U$ mit $u \cdot u' = e_U = u' \cdot u$.

Bemerkungen

- Assoziativität muss nicht extra gefordert werden, da diese sich von G auf U vererbt
- wir werden sehen (Untergruppenkriterium), dass e_U das neutrale Element von G sein muss
- ebenso entsprechen die inversen Elementen denen aus G, d. h. $u' = u^{-1}$

Beispiele

- für $m \in \mathbb{N}_0$ ist $m\mathbb{Z} := \{m \cdot z : z \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$ die Menge aller Vielfachen von m eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$:
  1. $u, v \in m\mathbb{Z} \Longrightarrow m \mid u$ und $m \mid v \Longrightarrow m \mid (u + v) \Longrightarrow u + v \in m\mathbb{Z}$
  2. $0 \in m\mathbb{Z}$ und 0 ist neutral
  3. $u \in m\mathbb{Z} \Longrightarrow m \mid -u \Longrightarrow -u \in m\mathbb{Z}$

  $\Rightarrow$ $(m\mathbb{Z}, +)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$
- jede Gruppe G mit neutralem Element e hat triviale Untergruppen:
  - Untergruppe $\{e\}$ „kleinste Untergruppe“
  - G selbst ist eine Untergruppe von G „größte Untergruppe“
- $G_\triangle$ hat die folgenden Untergruppen:
  - triviale Untergruppen $\{i\}$ und $G_\triangle$,
  - $\{i, x\}$, $\{i, y\}$, $\{i, z\}$ sind Untergruppen, da Spiegelungen selbstinvers sind,
  - die Drehungen bilden mit der Identität die Untergruppe $\{i, r, s\}$ von $G_\triangle$
  - da zwei Spiegelungen eine Drehung erzeugen und jede Drehung zusammen mit jeder beliebigen Spiegelung alle Elemente von $G_\triangle$ erzeugt, gibt es keine anderen Untergruppen in $G_\triangle$
- $\{[0]_{15}, [5]_{15}, [10]_{15}\}$ und $\{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\}$ sind Untergruppen von $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$
- für $a \in G$ ist $\langle a \rangle := \{a^z : z \in \mathbb{Z}\}$ die von a erzeugte Untergruppe

Untergruppenkriterien

Satz

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und $U \subseteq G$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. U ist eine Untergruppe von G,
2. e, u^{-1}, $uv \in U$ für alle u, $v \in U$,
3. $U \neq \varnothing$ und $uv^{-1} \in U$ für alle u, $v \in U$.

Beweise: („1 $\Rightarrow$ 2“)
Sei U eine Untergruppe mit neutralem Element $e_U \in U$. Dann gilt:

$$e_U \cdot e_U \overset{e_U \text{ neutral in } U}{=} e_U \overset{e \text{ neutral in } G}{=} e_U \cdot e \quad \Longrightarrow \quad e_U = e\,.$$

Seien $u \in U$ und $u' \in U$ das Inverse von u in U. Dann gilt:

$$u \cdot u' = e_U = e \quad \text{und} \quad u' \cdot u = e_U = e \quad \Longrightarrow \quad u' = u^{-1}\,,$$

wegen der Eindeutigkeit Inverser Elemente in G. ✓

Beweis der Untergruppenkriterien

„**2** $\Rightarrow$ **3**“

- $e \in U \Longrightarrow U$ ist nicht leer
- $u, v \in U \Longrightarrow v^{-1} \in U \Longrightarrow uv^{-1} \in U$ ✓

„**3** $\Rightarrow$ **1**“

- $U \neq \varnothing \Longrightarrow$ es gibt $u \in U \Longrightarrow uu^{-1} \in U \Longrightarrow uu^{-1} = e \in U$
- da $e \in U$ gilt für $u \in U$ somit auch $eu^{-1} = u^{-1} \in U$
- seien nun $u, v \in U \Longrightarrow v^{-1} \in U \Longrightarrow u \cdot (v^{-1})^{-1} = uv \in U$ □

Korollar

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und für endliches U mit $\varnothing \neq U \subseteq G$ gilt $uv \in U$ für alle u, $v \in U$. Dann ist U eine Untergruppe von G.

Beweis: Sei $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ für ein $n \geqslant 1$. Für jedes $i \in [n]$ sind die n Produkte

$$u_i u_1, \quad u_i u_2, \quad \ldots, \quad u_i u_n$$

paarweise verschieden und liegen alle in U. D. h. für jedes $u \in U$ gibt es ein $j \in [n]$ mit $u_i u_j = u$

$\Rightarrow$ für $u = u_i$ gibt es $j \in [n]$, sodass $u_i u_j = u_i \Rightarrow e = u_j \in U$

$\Rightarrow$ für $u = e$ gibt es $k \in [n]$, sodass $u_i u_k = e \Rightarrow u_i^{-1} = u_k \in U$

$\Rightarrow$ U ist eine Untergruppe nach Teil **2** des vorherigen Satzes. □

Nebenklassen

Definition (Nebenklassen)

Sei G eine Gruppe, sei $U \subseteq G$ eine Untergruppe und $a \in G$. Wir definieren

$$aU := \{au : u \in U\} \qquad \text{und} \qquad Ua := \{ua : u \in U\}.$$

Wir nennen die Mengen der Form aU Linksnebenklassen von U und die Mengen der Form Ua Rechtsnebenklassen.

Beispiele:

- G abelsch $\Rightarrow aU = Ua$ für alle $a \in G$ und Untergruppen U
- für $G = (\mathbb{Z}, +)$ und $U = 6\mathbb{Z}$ ist $\{\ldots, -2, 4, 10, \ldots\} = [4]_6$ die Linksnebenklasse $4 + 6\mathbb{Z}$ additive Schreibweise hier
- für $U = \{i, x\}$ in $G_\triangle$ gilt

$$iU = \{i, x\}, \quad rU = \{r, y\}, \quad sU = \{s, z\}$$

und

$$Ui = \{i, x\}, \quad Ur = \{r, z\}, \quad Us = \{s, y\}.$$

Struktur der Nebenklassen

Satz

Sei G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann gilt:

1. für alle $a \in G$ ist $a \in aU$.
2. für alle $u \in U$ ist $uU = U$.
3. für $a, b \in G$ mit $b \in aU$ gilt $aU = bU$.
4. für $a, b \in G$ sind aU und bU entweder disjunkt oder gleich.
5. für alle $a \in G$ gilt $|aU| = |U|$.

Die Aussagen gelten analog für Rechtsnebenklassen.

Bemerkungen:

- Teile 1 und 4 $\Rightarrow$ Links- bzw. Rechtsnebenklassen von U partitionieren G
  - Linksnebenklassen entsprechen Äquivalenzrelation $x \sim y :\Leftrightarrow x^{-1}y \in U$
  - Rechtsnebenklassen entsprechen Äquivalenzrelation $x \approx y :\Leftrightarrow xy^{-1} \in U$
- Beweise der Teile 1 und 2 folgen direkt aus den Gruppeneigenschaften $e \in U$ und $uv \in U$ für alle $u, v \in U$

Beweise

Teil 3: Sei $b \in aU$, d. h. $b = au_0$ für ein $u_0 \in U$.
$\Rightarrow$ für jedes $u \in U$ gilt $bu = (au_0)u = a(u_0u) \in aU$, da $u_0,\ u \in U$
$\Rightarrow bu \in aU$ für alle $u \in U$
$\Rightarrow bU \subseteq aU$
Andererseits gilt für jedes $u \in U$ auch $au = (bu_0^{-1})u = b(u_0^{-1}u) \in bU$.
$\Rightarrow aU \subseteq bU$. ✓

Teil 4: Falls $aU \cap bU \neq \varnothing$, dann gibt ein $c \in G$ mit $c \in aU$ und $c \in bU$ und wegen 3 gilt

$$aU = cU \qquad \text{und} \qquad bU = cU \qquad \Longrightarrow aU = bU\,.$$

✓

Teil 5: Betrachte die Abbildung $f : aU \to U$ gegeben durch $v \mapsto a^{-1}v$.

- f ist surjektiv: für $u \in U$ ist $au \in aU$ und $f(au) = u$ ✓
- f ist injektiv: falls $f(v) = f(w)$ für $v = au_v$ und $w = au_w \in aU$, dann gilt $u_v = u_w$ und somit auch $v = au_v = au_w = w$ ✓

$\Rightarrow$ f ist eine Bijektion $\Rightarrow |aU| = |U|$ □

Satz von Lagrange

Korollar (Satz von Lagrange)

Ist G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G, so ist die Ordnung $|U|$ von U ein Teiler der Ordnung $|G|$ von G.

Wegen der erzeugten Untergruppe $\langle a \rangle$ teilt somit die Ordnung von $a \in G$ auch die Ordnung $|G|$ von G.

Beweis: Da die Linksnebenklassen von U die Menge G partitionieren (Teile 1 und 4) und alle Nebenklassen die gleiche Größe $|U|$ haben (Teil 5), gilt

$$|G| = |U| \cdot \text{Anzahl der Linksnebenklassen von } U\,.$$

□

Definition (Index)

Für eine Untergruppe U von G ist die Anzahl der Links- bzw. Rechtsnebenklassen der Index von U und wird mit $[G : U]$ bezeichnet.

Satz von Lagrange

$|G| = [G : U] \cdot |U|$ für jede Untergruppe U einer endlichen Gruppe G.

Lagrange $\Longrightarrow$ Satz von Fermat und Euler

Satz (Fermat und Euler)

Seien a, $m \in \mathbb{N}$ teilerfremd und sei $\varphi(m)$ die Eulersche φ-Funktion (d. h. die Anzahl der zu m teilerfremden natürlichen Zahlen kleiner m). Dann gilt

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Beweis:

Da a und m teilerfremd sind, gilt $[a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. Des Weiteren hat die Gruppe $((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ die Ordnung $|(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times| = \varphi(m)$ und nach dem Satz von Lagrange teilt die Ordnung k von $[a]_m$ in $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ somit $\varphi(m)$, d. h. es gibt $\ell \in \mathbb{N}$ mit $k\ell = \varphi(m)$ und es gilt

$$[a]_m^{\varphi(m)} = ([a]_m^k)^\ell = [1]_m^\ell = [1]_m \quad \Longrightarrow \quad a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

□

Zyklizität vererbt sich auf Untergruppen

Satz

Jede Untergruppe U einer zyklischen Gruppe G ist zyklisch.

Beweis:

Sei $G = \{a^z : z \in \mathbb{Z}\} = \langle a \rangle$.

Falls $U = \{e\}$, dann ist U offensichtlich zyklisch.

Sei also $a^z \in U$ mit $a^z \neq 0$.

$\Rightarrow (a^z)^{-1} = a^{-z} \in U$ und entweder $z \in \mathbb{N}$ oder $-z \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ es gibt ein kleinstes $n \geqslant 1$ mit $a^n \in U$.

Wir zeigen nun $U = \{(a^n)^z : z \in \mathbb{Z}\} = \langle a^n \rangle$.

- $\langle a^n \rangle \subseteq U$ ist klar, da U eine Gruppe ist und $a^n \in U$
- sei $a^z \in U$ und $z = qn + r$ mit $q \in \mathbb{Z}$ und $0 \leqslant r < n$
  $\Rightarrow$ da $a^{-qn} \in \langle a^n \rangle \subseteq U$, ist $a^r = a^{-qn} \cdot a^z \in U$
  $\Rightarrow$ wegen der minimalen Wahl von n und $0 \leqslant r < n$ folgt also $r = 0$
  $\Rightarrow a^z = a^{qn} \in \langle a^n \rangle$ □

Gruppen mit Primzahlordnung

Satz

Jede endliche Gruppe G deren Ordnung p eine Primzahl ist, ist zyklisch und hat nur triviale Untergruppen.

Beweis: Sei $a \in G$. Da $p = |G|$ eine Primzahl ist, ist nach dem Satz von LAGRANGE die Ordnung von a entweder 1 oder p.

- Ordnung von a ist $1 \iff a = e$
- da $|G| \geqslant 2$, gibt es ein $a \in G$ mit $a \neq e$

$\Rightarrow$ Ordnung von a ist $p \Rightarrow a^0, a^1, \ldots, a^{p-1}$ sind paarweise verschiedene Elemente von G

$\Rightarrow$ $G = \{a^0, a^1, \ldots, a^{p-1}\} = \langle a \rangle$

□

Permutationen

Erinnerung:

- $\mathcal{S}(A)$ ist die Menge aller Bijektionen von A nach A
- $(\mathcal{S}(A), \circ)$ ist eine Gruppe, genannt symmetrische Gruppe bzw. Permutationsgruppe auf A mit neutralem Element id_A
- für $A = [n]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{S}_n$ die Permuationsgruppe $(\mathcal{S}([n]), \circ)$
- Permuationsgruppen sind „universell“ für endliche Gruppen in folgendem Sinne:

Satz (Cayley)

Jede endliche Gruppe G ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{S}(G)$.

Beweis: Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe. Für jedes $a \in G$ ist die Abbildung $\sigma_a \colon G \to G$ mit $b \mapsto a \cdot b$ eine Bijektion, d. h. $\sigma_a \in \mathcal{S}(G)$. Nun betrachtet man die Abbildung $f \colon G \to \mathcal{S}(G)$ gegeben durch

$$a \mapsto \sigma_a \,.$$

Man überprüft nun, dass f ein Gruppenisomorphismus zwischen G und $\{\sigma_a \colon a \in G\} \subseteq \mathcal{S}(G)$ etabliert.

Gruppenisomorphismus $f\colon G \to \mathcal{S}(G)$ durch $a \mapsto \sigma_a$

- f ist surjektiv: per Definition auf $\{\sigma_a \colon a \in G\} \subseteq \mathcal{S}(G)$
- f ist injektiv: $\sigma_a = \sigma_b$ bedeutet $ac = bc$ für alle $c \in G \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow$ f ist eine Bijektion ✓

Seien a, $b \in G$ beliebig. Die Abbildung $\sigma_{a\cdot b} = f(a \cdot b)$ ist eine Bijektion auf G, d. h. $f(a \cdot b)$ ordnet jedem $c \in G$ ein $\sigma_{a\cdot b}(c) = (a \cdot b) \cdot c \in G$ zu. Somit gilt für jedes $c \in G$

$$f(a \cdot b)(c) = \sigma_{a\cdot b}(c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot \sigma_b(c)$$

und somit gilt

$$f(a \cdot b)(c) = a \cdot \sigma_b(c) = \sigma_a(\sigma_b(c)) = (\sigma_a \circ \sigma_b)(c) = (f(a) \circ f(b))(c)\,.$$

Da diese Identität für alle $c \in G$ gilt, gilt also $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$ und da a, $b \in G$ beliebig waren, ist f somit ein Gruppenisomorphismus. □

Notation

- wir studieren Permuationsgruppen $\mathcal{S}_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$
- Permutationen werden oft mit kleinen griechischen Buchstaben π, σ, oder τ bezeichnet
- manchmal geben wir Permutationen explizit an, z. B.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_5$$

bildet 1 auf 3, 2 auf 2, 3 auf 5, 4 auf 1 und 5 auf 4 ab,

$$\sigma(1) = 3\,, \quad \sigma(2) = 2\,, \quad \sigma(3) = 5\,, \quad \sigma(4) = 1 \quad \text{und} \quad \sigma(5) = 4\,.$$

- da die erste Zeile in der expliziten Darstellung von σ redundant ist, schreiben wir manchmal auch nur $\sigma = (3, 2, 5, 1, 4)$

  ACHTUNG: nicht verwechseln mit der späteren Zyklenschreibweise
- da $\mathcal{S}_5$ endlich ist ($|\mathcal{S}_5| = 5! = 120$), hat σ endliche Ordnung (die nach LAGRANGE ein Teiler von 120 ist), d. h. es gibt ein k mit $k \mid 120$, sodass

$$\sigma^k = \sigma \circ \cdots \circ \sigma = \mathrm{id}_{[5]}\ .$$

Für dieses Beispiel prüft man leicht nach, dass $k = 4$ ist.

Beispiel

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_5$$

- iterierte Anwendungen von σ fixiert die 2 fest ($\sigma(2) = 2$) und „zykelt“ (ausgehend von 1) durch die Elemente $3, 5, 4, 1$

  $$\sigma(1) = 3\,, \quad \sigma^2(1) = \sigma(3) = 5\,, \quad \sigma^3(1) = \sigma(5) = 4$$

  und

  $$\sigma^4(1) = \sigma^3(3) = \sigma^2(5) = \sigma(4) = 1$$

  und danach wiederholt sich diese Sequenz
- σ „zerfällt“ in einen Zyklus $(1\,3\,5\,4)$ und einen Fixpunkt (2) (trivialer Zyklus)

Zyklen

Definition (Zyklus)

Sei $X \subseteq [n]$ mit $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ für $k \geqslant 2$.

Wir bezeichnen mit $(x_1\, x_2 \ldots x_k)$ die Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ definiert durch

$$\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \notin X, \\ x_{i+1} & \text{falls } x = x_i \text{ für } \{\text{i=1,...,k-1}\}, \\ x_1 & \text{falls } x = x_k. \end{cases}$$

Die Permutation σ ist dann ein Zyklus der Länge k und Zyklen der Länge 2 (Vertauschung von zwei Elementen) heißen Transpositionen.

Zwei Zyklen $(x_1\, x_2 \ldots x_k)$ und $(y_1\, y_2 \ldots y_\ell)$ sind disjunkt, wenn die beiden Mengen $\{x_1, \ldots, x_k\}$ und $\{y_1, \ldots, y_\ell\}$ disjunkt sind.

Neben den Schreibweisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $(3, 2, 5, 1, 4)$ gibt es so noch die Zyklenschreibweisen

$$(1\,3\,5\,4) = (3\,5\,4\,1) = (5\,4\,1\,3) = (4\,1\,3\,5) \in \mathcal{S}_5\,.$$

Zyklenzerlegung

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

- Jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ist ein Produkt von paarweise disjunkten Zyklen. Eine solche Darstellung nennt man Zyklenzerlegung von σ und diese ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.
- Jeder Zyklus ist ein Produkt von Transpositionen.

$\Rightarrow$ Jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ist ein Produkt von Transpositionen.

Beispiel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_6$$

$\Rightarrow \sigma = (1\,4\,3) \circ (2\,5\,6)$

$\Rightarrow (1\,4\,3) = (1\,4) \circ (4\,3)$ und $(2\,5\,6) = (2\,5) \circ (5\,6)$

$\Rightarrow \sigma = (1\,4) \circ (4\,3) \circ (2\,5) \circ (5\,6)$

Beweis der Zyklenzerlegung

Beweis: Betrachte die Relation $i \sim j$ auf $[n]$ gegeben durch

$$\exists\, n \in \mathbb{N}_0 \colon \sigma^z(i) = j\,.$$

- man prüft direkt nach, dass $\sim$ eine Äuquivalenzrelation ist
- für jede Äquivalenzklasse $[i]$ gibt es ein $m_i \in \mathbb{N}$, sodass

$$[i] = \{\sigma^0(i), \sigma^1(i), \ldots, \sigma^{m_i-1}(i)\}$$

- ist $m_i = 1$, dann ist i ein Fixpunkt von σ
- ist $m_i > 1$, dann ist $(\sigma^0(i)\,\sigma(i)\,\ldots\,\sigma^{m_i-1}(i))$ ein Zyklus von σ

$\Rightarrow$ Partition durch Äquivalenzklassen codiert disjunkte Zyklen von σ ✓

Der zweite Teil folgt direkt aus der Darstellung

$$(x_1\, x_2\, \ldots\, x_k) = (x_1\, x_2) \circ (x_2\, x_3) \circ \cdots \circ (x_{k-2}\, x_{k-1}) \circ (x_{k-1}\, x_k).$$

□

Transpositionen und Zyklen

Satz

Sei $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Sei $\tau \in \mathcal{S}_n$ eine Transposition. Dann hat $\tau \cdot \sigma$ entweder genau einen Zyklus mehr oder einen Zyklus weniger als σ (hier zählen auch triviale Zyklen mit).

Beweis: Es gibt zwei Fälle:

Fall 1 Die von τ getauschten Elementen liegen auf demselben Zyklus $(x_1\, x_2\, \ldots\, x_k)$ von σ. Sei $\tau = (x_i\, x_j)$ mit $i < j$ und sei P das Produkt von den andern Zyklen von σ. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tau \cdot \sigma &= (x_i\, x_j) \cdot (x_1\, x_2\, \ldots\, x_k) P \\ &= (x_1\, x_2\, \ldots\, x_{i-1}\, x_j\, x_{j+1}\, \ldots\, x_k)(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_k) P\,, \end{aligned}$$

was genau einen Zyklus mehr als σ hat.

Fall 2 Die von τ getauschten Elementen liegen auf verschiedenen Zyklen $(x_1\, x_2\, \ldots\, x_k)$ und $(y_1\, y_2\, \ldots\, y_l)$ von σ. Sei $\tau = (x_i\, y_j)$ und sei P das Produkt von den andern Zyklen von σ. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tau \cdot \sigma &= (x_i\, y_j) \cdot (x_1\, x_2\, \ldots\, x_k)(y_1\, y_2\, \ldots\, y_l) P \\ &= (x_1\, x_2\, \ldots\, x_{i-1}\, y_j\, y_{j+1}\, \ldots\, y_l\, y_1\, \ldots\, y_{j-1}\, x_i\, \ldots\, x_k) P\,, \end{aligned}$$

was genau einen Zyklus weniger als σ hat. □

Parität der Zyklenanzahl

Korollar

Sei $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Seien τ_1 und τ_2 Transpositionen in $\mathcal{S}_n$. Dann ist die Parität der Zyklenanzahl von $\tau_2 \cdot \tau_1 \cdot \sigma$ gleich die von σ.

Beweis: Mit zwei Anwendungen des vorherigen Satzes sehen wir, dass $\tau_2 \cdot \tau_1 \cdot \sigma$ genau 2 Zyklen mehr oder genau 2 Zyklen weniger als σ oder dieselbe Anzahl von Zyklen wie σ hat. □

Korollar

Sei $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Sei k eine natürliche Zahl. Seien $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2k}$ Transpositionen in $\mathcal{S}_n$. Dann ist die Parität der Zyklenanzahl von $\tau_{2k} \cdot \tau_{2k-1} \cdot \cdots \cdot \tau_2 \cdot \tau_1 \cdot \sigma$ gleich die von σ.

Beweis: Induktion nach k. □

Korollar

Sei $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Sei k eine natürliche Zahl. Seien $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2k+1}$ Transpositionen in $\mathcal{S}_n$. Dann ist die Parität der Zyklenanzahl von $\tau_{2k+1} \cdot \tau_{2k-1} \cdot \cdots \cdot \tau_2 \cdot \tau_1 \cdot \sigma$ ungleich die von σ.

Gerade und ungerade Permutationen

Satz

Sei $\pi \in \mathcal{S}_n$. Die Parität (gerade/ungerade) der Anzahl der Transpositionen in jeder Darstellung von π als Transpositionen ist gleich. Dementsprechend sagen wir eine Permutation ist gerade bzw. ungerade.

Beweis: Sonst wären die Paritäten der Zyklenanzahlen von $\pi \cdot \sigma$ und σ immer sowohl gleich als auch ungleich, was unmöglich ist. □

Korollar

Die Menge der geraden Permutationen $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ bildet eine Untergruppe vom Index 2 und heißt alternierende Gruppe.

Beweis:

- $\mathrm{id}_{[n]}$ wird durch 0 Transpositionen dargestellt und ist somit in $\mathcal{A}_n$
- da die Summe zweier gerader Zahlen gerade ist, ist die Komposition zweier gerader Permutationen wieder gerade
- da Transpositionen selbstinvers sind, gilt
  $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k \Longrightarrow \sigma^{-1} = (\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k)^{-1} = \tau_k^{-1} \circ \cdots \circ \tau_1^{-1} = \tau_k \circ \cdots \circ \tau_1$

  $\Rightarrow$ wenn $\sigma \in \mathcal{A}_n$, dann ist auch $\sigma^{-1} \in \mathcal{A}_n$

Somit zeigt das Untergruppenkriterium, dass $\mathcal{A}_n$ eine Untergruppe von $\mathcal{S}_n$ ist. □

Körper

- mithilfe von Gruppen kann man Körper kompakter definieren

Definition (Körper)

Eine Menge K mit verschiedenen Elementen 0_K, $1_K \in K$ und binären Operationen $+ \colon K \times K \to K$ und $\cdot \colon K \times K \to K$ ist ein Körper, falls gilt:

1. $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0_K,
2. $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1_K,
3. für alle a, b, $c \in K$ gelten die Distributivgesetze

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{und} \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\,.$$

Bemerkung:

- mit den Distributivgesetzen folgt $a \cdot 0_K = 0_K \cdot a = 0_K$ für alle $a \in K$:

$$a \cdot 0_K = a \cdot (0_K + 0_K) = a \cdot 0_K + a \cdot 0_K \qquad \Longrightarrow \qquad 0_K = a \cdot 0_K$$

$$0_K \cdot a = (0_K + 0_K) \cdot a = 0_K \cdot a + 0_K \cdot a \qquad \Longrightarrow \qquad 0_K = 0_K \cdot a\,.$$

Ringe

- Ringe benötigen weniger multiplikative Struktur als Körper

Definition (Ring)

Eine Menge R mit binären Operationen $+ \colon R \times R \to R$ und $\cdot \colon R \times R \to R$ ist ein Ring, falls gilt:

1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe,
2. $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe,
3. für alle $a, b, c \in K$ gelten die Distributivgesetze
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{und} \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \,.$$

Das neutrale Element der Addition ist das Nullelement 0_R von R. Wenn die Multiplikation kommutativ ist, dann ist R ein kommutativer Ring. Ist $(R, \cdot)$ sogar ein Monoid mit neutralem Element 1_R, dann ist R ein Ring mit 1/unitärer Ring.

- wie in Körpern folgert man $0_R \cdot a = 0_R = a \cdot 0_R$ aus den Distributivgesetzen
- wir betrachten nur Ringe mit 1 und meinem bei einem Ring immer einen mit 1
- falls $0_R = 1_R$, dann ist $R = \{0_R\}$ der Nullring mit nur einem Element, da dann für jedes $a \in R$ gilt:
$$a = a \cdot 1_R = a \cdot 0_R = 0_R \,.$$

Beispiele und Notation

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sind Körper
- jeder Körper ist ein kommutativer Ring (mit 1)
- ein Ring ist nur dann ein Körper, wenn $(R \setminus \{0_R\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring (mit 1), aber kein Körper
- für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der Restklassenring $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring (mit 1)
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist nur dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist
- wenn die Operationen klar sind, dann identifizieren wir Körper und Ringe mit ihrer Grundmenge
- an Stelle von 0_R, 1_K etc. schreiben wir oft nur 0 und 1
- für ein Element a bezeichnen wir mit $-a$ und a^{-1} die inversen Elemente bezüglich der Addition und Multiplikation

Einheitengruppe

- in einem Monoid sind die inversen Elemente (wenn sie existieren) eindeutig

Definition (Einheiten)

Sei R ein Ring (mit 1). Die Menge der Elemente a die ein multiplikatives Inverses a^{-1} haben, heißt Einheitengruppe $R^\times \subseteq R$, d. h.

$$R^\times := \{a \in R : \text{es gibt } b \in R \text{ mit } a \cdot b = b \cdot a = 1\},$$

und die Elemente von $R^\times$ heißen Einheiten.

Satz

Für jeden Ring (mit 1) ist die Einheitengruppe $(R^\times, \cdot)$ eine Gruppe.

Beweis

- $a, b \in R^\times \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in R \Rightarrow ab \in R^\times$ ($\cdot$ wohldef. auf $R^\times$)
- $1 \in R^\times$ und $a \in R^\times \Rightarrow a^{-1} \in R^\times$
- Assoziativität vererbt sich vom Monoid $(R, \cdot)$ □

Beispiele

- für jeden Körper K ist $K^\times = K \setminus \{0\}$
- insbesondere

$$\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

und für jede Primzahl p gilt

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]_p\}$$

- für die ganzen Zahlen gilt: $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$
- $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}$
- $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times = \{[1]_{15}, [2]_{15}, [4]_{15}, [7]_{15}, [8]_{15}, [11]_{15}, [13]_{15}, [14]_{15}\}$
- allgemein wissen wir für $n \in \mathbb{N}$

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{[a]_n \colon \operatorname{ggT}(a, n) = 1\}$$