

O Oberstufe

Aufgabe 1. (a) (2 P.) Ein konvexes Fünfeck ist durch sich nicht schneidende Diagonalen in drei Dreiecke eingeteilt. Ist es möglich, dass die Schwerpunkte dieser Dreiecke auf einer gemeinsamen Geraden liegen?

(b) (2 P.) Dieselbe Frage für ein nicht-konvexes Fünfeck.

Aufgabe 2. (a) (2 P.) Maria hat eine Balkenwaage, die anzeigt, welche Waagschale schwerer ist oder ob beide das gleiche Gewicht haben. Außerdem hat Maria 4 Gewichte, die alle gleich aussehen, aber Massen von 1000, 1002, 1004 und 1005 g haben. Kann Maria die Massen mit 4 Wägungen bestimmen? Dabei darf sie die Gewichte jeweils abhängig vom Ergebnis der vorherigen Wägungen auswählen.

(b) (2 P.) Dieselbe Frage für den Fall, dass die linke Waagschale um 1 g leichter ist als die rechte, die Waage also dann Gleichheit anzeigt, wenn die Masse auf der linken Waagschale genau um 1 g schwerer ist als die Masse auf der rechten Waagschale.

Aufgabe 3 (5 P.). Für welche n ist es möglich, dass das Produkt von n aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen gleich der Summe von (nicht unbedingt denselben) n aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen ist?

Aufgabe 4 (5 P.). Es ist bekannt, dass eine quadratische Gleichung nicht mehr als 2 Nullstellen haben kann. Ist es möglich, dass eine Gleichung $[x^2] + px + q = 0$ mit $p \neq 0$ mehr als 100 Nullstellen hat? (Mit $[x^2]$ bezeichnen wir die größte ganze Zahl nicht größer als x^2 .)

Aufgabe 5 (6 P.). Sei O der Umkreismittelpunkt des spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$. Sei M der Mittelpunkt von AC . Die Gerade BO schneide die Höhen AA_1 und CC_1 in den Punkten H_a bzw. H_c . Die Umkreise der Dreiecke $\triangle BH_aA$ und $\triangle BH_cC$ schneiden einander (neben B) ein zweites Mal im Punkt K . Beweise, dass K auf der Geraden BM liegt.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden.

Viel Erfolg!